DÉDUCTION ARITHMÉTIQUE

D'UNE RELATION DUE À JACOBI.

Extrait d'une lettre adressée à M. Hermite

PAR

R. LIPSCHITZ
à BONN.

..... Il y a quelque temps que vous m'avez fait savoir, comme vous jugiez désirable, que la relation de JACOBI

$$\vartheta_0(0,\ q)\vartheta_2(0,\ q)\vartheta_3(0,\ q) = \frac{1}{\pi}\left(\frac{d\vartheta_3(w,\ q)}{dw}\right)_{(w=0)}$$

fût établie arithmétiquement. Ces derniers jours j'ai réussi à en trouver une démonstration, que vous me permettez de vous communiquer.

Je suis parti de l'observation, que, si l'on représente les fonctions $\vartheta_0(0, q)$, $\vartheta_2(0, q)$, $\vartheta_3(0, q)$ à l'aide du produit infini $\prod\limits_{n=1}^{n=\infty}(1-q^n) = G(q)$, comme dans la lettre que j'ai eu le plaisir de vous adresser le 20 Décembre 1883, et qui a été imprimée dans les Acta mathematica, T. 4, p. 195—196, de sorte que l'on ait

$$\vartheta_0(0,\ q) = \frac{G^2(q)}{G(q^2)}, \qquad \vartheta_2(0,\ q) = 2q^{\frac{1}{4}}\frac{G^2(q^4)}{G(q^2)}, \qquad \vartheta_3(0,\ q) = \frac{G^2(-q)}{G(q^2)},$$

le produit des trois fonctions prend la forme

$$\frac{2q^{\frac{1}{4}}G^2(q)G^2(q^4)G^2(-q)}{G^3(q^2)},$$

qui, par l'équation

$$G(q)G(q^4)G(-q) = G^3(q^2)$$