LES POTENTIELS D'ENERGIE FINIE

Par

JACQUES DENY

à STRASBOURG.

Introduction.

La théorie du potentiel newtonien a connu ces vingt dernières années un développement considérable. Etudiée d'abord en fonction du problème de Dirichlet, elle a fait ensuite l'objet de nombreux travaux autonomes, qui ont permis des généralisations de nature très variée, et montré en même temps le rôle essentiel joué par deux théorèmes : l'un relatif *au signe de l'intégrale d'énergie*, l'autre affirmant l'exactitude du *principe du maximum*.

Soit $h(r) = r^{2-p}$ le « noyau newtonien » de l'espace euclidien réel R^p à $p \geq 3$ dimensions. Selon une notation très commode de H. Cartan nous désignerons par $U^{\mu}(M) = \int h(\overline{MP})d\mu(P)$ le potentiel newtonien engendré en M par la mesure positive μ (distribution de masses, ou fonction additive d'ensembles selon les auteurs). L'énergie de μ est la quantité :

$$||\mu||^2 = \int U^{\mu}(M)d\mu(M) = \iint h(\overline{MP})d\mu(M)d\mu(P) \,. \tag{1}$$

Le premier théorème fondamental est alors le suivant : *Si μ est la différence de deux mesures positives d'énergie finie, l'intégrale* (1) *est positive, et ne s'annule que si μ est identiquement nulle.*

Ce résultat est connu depuis longtemps dans le cas d'une distribution régulière de masses (réparties par exemple dans un domaine limité par un nombre fini de surfaces à courbure bornée, avec une densité spatiale continue). Le théorème classique de Green conduit alors dans R^3 à la relation suivante :

$$||\mu||^2 = \frac{1}{4\pi}\int(\overrightarrow{\text{grad}}\; U^{\mu})^2 d\tau \,, \tag{2}$$

où l'intégrale est étendue à tout l'espace R^3, dont $d\tau$ représente l'élément de volume