SUR LE PROBLÈME D'APPROXIMATION DE S. BERNSTEIN ET SES GÉNÉRALISATIONS

PAR

IVAN VIDAV

à Ljubljana

Soit $K(u)$, $-\infty < u < \infty$, une fonction continue et soit C_0 l'espace des fonctions $f(u)$, continues sur la droite entière R de nombres réels, et telles que $f(u) \to 0$ pour $u \to \pm\infty$. Dans un mémoire récent M. H. Pollard a donné des conditions nécessaires et suffisantes, portant sur $K(u)$, pour que à toute fonction $f(u) \in C_0$ et à tout nombre positif ε corresponde un polynôme $P(u)$ tel qu'on ait $|f(u) - P(u)K(u)| < \varepsilon$. Voici le théorème démontré par M. Pollard:

Pour que la suite $\{u^n K(u)\}_0^\infty$ soit complète dans l'espace C_0, il faut et il suffit que

(I) *Il existe une suite de polynômes $p_n(u)$ telle que*

A) $\lim\limits_{n\to\infty} p_n(u)K(u) = 1$; B) $|p_n(u)K(u)| \leq M$, $-\infty < u < \infty$.

(II) $$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\log|K(u)|}{1+u^2}\,du = -\infty.$$

(III) $K(u) \neq 0$, $-\infty < u < \infty$.

La condition (III) est une conséquence immédiate de (I A). D'autre part, en appliquant le théorème de Weierstrass sur l'approximation des fonctions continues, on voit que (III) entraîne (I A).

On peut généraliser le problème d'approximation polynômiale en prenant, au lieu de la droite entière R, un ensemble fermé quelconque E de points de R. C'est M. S. Mandelbrojt qui a posé cette question et qui a donné le premier [3] des conditions suffisantes, portant sur la fonction $K(u)$, pour que la suite $\{u^n K(u)\}_0^\infty$ soit complète sur l'ensemble E. Au lieu de la condition (II) on suppose dans ce cas la divergence d'une intégrale plus compliquée (voir la condition II* dans le théorème

20 – 533807. *Acta Mathematica*. 91. Imprimé le 1 novembre 1954.