Nombres de Lelong généralisés, théorèmes d'intégralité et d'analyticité

par

JEAN-PIERRE DEMAILLY

Université de Grenoble I
Saint Martin d'Hères, France

0. Introduction

Soit X un espace complexe de Stein, T un courant positif fermé de bidimension (p,p) sur X, et φ: $X \to [-\infty, +\infty[$ une fonction psh (plurisousharmonique) exhaustive. Nous définissons alors des nombres de Lelong $\nu(T,\varphi)$ qui généralisent ceux classiques de P. Lelong [Le3] ainsi que ceux introduits récemment par C. O. Kiselman [Ki3]. La définition repose sur l'utilisation des opérateurs de Monge-Ampère de Bedford-Taylor [B-T] et peut s'interpréter en disant que $\nu(T,\varphi)$ est la masse de la mesure $T\wedge(dd^c\varphi)^p$ portée par l'ensemble polaire $\varphi^{-1}(-\infty)$. Dans ce cadre, nous démontrons que $\nu(T,\varphi)$ ne dépend que du comportement asymptotique de φ au voisinage des pôles; la méthode utilisée est inspirée de notre article antérieur [De1], mais elle se trouve ici considérablement simplifiée par le fait que l'on peut manipuler des poids φ qui sont seulement continus. La souplesse d'utilisation des nombres de Lelong généralisés permet d'obtenir aussi des démonstrations très simples de résultats classiques concernant les nombres de Lelong usuels; en particulier, ces nombres sont invariants par changement de coordonnées locales (cf. [Siu]). Nous redémontrons ensuite le théorème de P. Thie [Th], suivant lequel le nombre de Lelong d'un ensemble analytique X en un point $x \in X$ coïncide avec la multiplicité algébrique de X en x; ce résultat est une conséquence directe du fait que l'on peut représenter le germe (X,x) comme un revêtement ramifié au dessus de $\mathbf{C}^p$, contenu dans un cône convexe de sommet x. On obtient enfin une version généralisée du théorème de Siu sur l'analyticité des ensembles de niveau associés aux nombres de Lelong; cette version contient comme cas particulier le résultat récent de C. O. Kiselman [Ki3] relatif aux nombres de Lelong directionnels. La démonstration est inspirée de Kiselman [Ki2] et repose essentiellement sur trois ingrédients :

11–878283 *Acta Mathematica* 159. Imprimé le 23 octobre 1987