PROBLÈMES AUX LIMITES EN THÉORIE DES DISTRIBUTIONS

PAR

J. L. LIONS

Introduction

Le présent travail a pour but essentiel l'étude des problèmes mixtes au sens de M. Hadamard. Rappelons très brièvement le problème : on donne un ouvert Ω de R^n et sur cet ouvert un opérateur différentiel elliptique D, linéaire, à coefficients constants ou variables; on considère le cylindre $\Omega \times (t \geq 0)$, t variable de temps; on cherche $u(x, t)$, $x \in \Omega$, $t \geq 0$, solution de $D_x u(x, t) + \frac{\partial}{\partial t} u = 0$ $\left(\text{ou } D_x u(x, t) + \frac{\partial^2}{\partial t^2} u = 0\right)$ pour $t > 0$, les fonctions $u(x, 0)$ $\left(\text{resp. et en outre } \frac{\partial}{\partial t} u(x, 0)\right)$ étant données (conditions initiales) et $u(x, t)$ étant assujetti à certaines conditions aux limites sur la frontière $\Gamma \times (t > 0)$, $\Gamma =$ frontière de Ω (exemple : $u(x, t)$ est donné sur $\Gamma \times (t > 0)$) (voir dans la bibliographie les travaux cités d'Hadamard, Courant-Hilbert, Bureau, Petrowsky).

Il existe classiquement deux méthodes de résolution pour ces problèmes (sans parler de la méthode des différences finies):

1ère méthode. On effectue une transformation de Laplace en t (Doetsch [1]); on est ramené à l'étude de problèmes aux limites attachés à l'opérateur elliptique $D + \lambda$, $\lambda =$ paramètre.

2ème méthode (Méthode des fonctions propres; cf. Bureau [1]). On suppose que D est auto-adjoint, que l'ouvert Ω est borné de frontière « régulière » de sorte que les fonctions propres de l'opérateur D $(D u_k = \lambda_k u_k)$ forment un système orthonormal complet dans $L^2(\Omega)$ (espace des fonctions de carré sommable sur Ω); on cherche alors u sous la forme : $u(x, t) = \sum_{k=0}^{\infty} u_k(x) X_k(t)$.

Ces deux méthodes sont applicables sous des conditions différentes, mais il y a toujours essentiellement les deux mêmes difficultés: