Entropie geometrique des feuilletages

par

E. GHYS, R. LANGEVIN et P. WALCZAK

Université des Sciences et Techniques de Lille I
Villeneuve d'Ascq, France

Université de Dijon
Dijon Cedex, France

University of Lodz
Lodz, Poland

1. Introduction

Par bien des aspects, la théorie des feuilletages s'apparente à celle des systèmes dynamiques. Des notions telles que celles d'ensembles limites, points errants, récurrents ..., s'étendent sans difficulté aux feuilletages. Nous nous proposons ici de définir et d'étudier l'entropie géométrique d'un feuilletage généralisant directement l'entropie topologique d'un flot. Comme cette entropie topologique dépend essentiellement du paramétrage des orbites, nous sommes naturellement conduits à « paramétrer » les feuilles d'un feuilletage par une métrique riemannienne.

Dans un premier temps (paragraphe 2), nous définissons l'entropie d'un pseudogroupe d'homéomorphismes locaux relativement à un système fini de générateurs. Cette définition est immédiatement appliquée aux divers pseudogroupes d'holonomie d'un feuilletage correspondants aux divers recouvrements de la variété ambiante par des ouverts distingués. Au paragraphe 3, nous définissons l'entropie géométrique d'un feuilletage; il s'agit d'un nombre qui mesure essentiellement la rapidité moyenne avec laquelle deux feuilles s'écartent l'une de l'autre. Après s'être assuré que notre définition généralise l'entropie topologique d'un flot (théorème 3.2), nous montrons que cette entropie géométrique peut s'exprimer à l'aide des entropies de ses divers pseudogroupes d'holonomie (théorème 3.4). Ceci permet en particulier d'obtenir diverses estimations, supérieures ou inférieures, de l'entropie géométrique.

Le paragraphe 4 est consacré à quelques exemples qui montrent les phénomènes nouveaux qui interviennent lorsque la dimension des feuilles est strictement supérieure à 1. Au paragraphe 5, nous établissons une forte condition nécessaire à l'annulation de l'entropie géométrique : l'existence d'une mesure transverse invariante au sens de J. Plante (théorème 5.1). Le cas particulier des feuilletages de codimension 1 est traité au paragraphe 6. Le résultat principal de ce paragraphe est le fait que l'entropie géométri-