ÜBER SIMULTANE APPROXIMATION ALGEBRAISCHER ZAHLEN DURCH RATIONALE

VON

WOLFGANG M. SCHMIDT

University of Colorado, Boulder, Col., U.S.A.

1. Einleitung

1.1. *Problemstellung.* Ist ξ eine algebraische Irrationalzahl und $\varepsilon > 0$, so gibt es nach einem berühmten Satz von K. F. Roth [6] höchstens endlich viele rationale Zahlen p/q, so daß

$$\left|\xi - \frac{p}{q}\right| < |q|^{-2-\varepsilon}$$

ist. In diesem Satz darf die Konstante 2 in $|q|^{-2-\varepsilon}$ durch keine kleinere ersetzt werden.

Sind $\xi_1, \ldots, \xi_n$ algebraisch, aber $1, \xi_1, \ldots, \xi_n$ linear unabhängig über dem rationalen Zahlkörper $\mathbf{Q}$, und ist $\varepsilon > 0$, so ist zu vermuten, daß es höchstens endlich viele $(n+1)$-tupel ganzrationaler Zahlen $q > 0; p_1, \ldots, p_n$ gibt, so daß

$$\left|\xi_j - \frac{p_j}{q}\right| < q^{-(1+1/n)-\varepsilon} \quad (j = 1, \ldots, n)$$

gilt. Man kann leicht sehen, daß man in dieser Vermutung $1 + 1/n$ durch keine kleinere Konstante ersetzen darf.

Dual zum Problem der simultanen Approximation ist das Linearformenproblem. Macht man dieselben Voraussetzungen über $\xi_1, \ldots, \xi_n$ und ε wie vorhin, so ist zu vermuten, daß es höchstens endlich viele $(n+1)$-tupel $q_1, \ldots, q_n; p$ ganzrationaler Zahlen mit $q = \mathrm{Max}\,(|q_1|, \ldots, |q_n|) > 0$ gibt, so daß

$$|q_1 \xi_1 + \ldots + q_n \xi_n - p| < q^{-n-\varepsilon}$$

erfüllt wird.

Leider können wir die angeführten Vermutungen, die übrigens nach dem Khintchine'schen Übertragungssatz [3] äquivalent sind, nicht beweisen. Wir werden hier Sätze

11 – 652933 *Acta mathematica* 114. Imprimé le 19 octobre 1965.