Sur les classes ambiges et les ordres monogenes d'une extension cyclique de degre premier impair sur $\mathbf{Q}$ ou sur un corps quadratique imaginaire

J. J. Payan

I. Rappels et definition

Soit K/k une extension de corps de nombres. Notons A_k et A_K les anneaux d'entiers respectifs de k et K. L'existence de θ dans A_K vérifiant $A_K = A_k[\theta]$ — on dira alors que l'ordre maximal est monogène — outre son intérêt »historique», a l'avantage de faciliter considérablement les calculs dans A_K. Cette existence a été étudiée en détail notamment dans le cas $[K:k] = 3$ ou 4 (voir [2] et [9]). C'est ainsi que s'il existe θ tel que $A_K = A_k[\theta]$ et si on pose $S = \mathrm{Tr}_{K/k}\,\theta$, on voit facilement que $\vartheta = u\theta + v\theta^2$, avec $u, v\ A_k$, vérifie $A_K = A_k[\vartheta]$ si et seulement si $u + v(S - \theta)$ est une unité de A_K. Dans le cas $k = \mathbf{Q}$, le théorème de Thue montre alors qu'il existe au plus un nombre fini de classes modulo $\mathbf{Z}$ de θ tels que $A_K = \mathbf{Z}[\theta]$.

Dans ce qui suit, k désignera, sauf mention explicite du contraire, soit le corps $\mathbf{Q}$ des nombres rationnels, soit un corps quadratique imaginaire. On supposera en outre que K/k est cyclique de degré premier impair p et on notera $\Delta_{K/k}$ le discriminant de K/k et σ un générateur de $G = \mathrm{Gal}\,K/k$. On sait que $\Delta_{K/k} = (\mathfrak{p}_1\mathfrak{p}_2 \dots \mathfrak{p}_t)^{p-1}$, où les idéaux $\mathfrak{p}_1 \dots \mathfrak{p}_t$ sont premiers entre eux deux à deux. En outre si K/k est modérément ramifiée (resp sauvagement ramifiée) les $\mathfrak{p}_i$ sont tous premiers (resp $\mathfrak{p}_1$ ou $\mathfrak{p}_1$ et $\mathfrak{p}_2$ sont puissances d'idéaux premiers au-dessus de (p), les autres $\mathfrak{p}_i$ étant premiers).

Notons U_K (resp U_k) le groupe des unités de A_K (resp A_k), $\mathscr{A}_p$ le p-groupe des classes ambiges de K/k, c'est-à-dire des classes invariantes par σ, et $h_{k,p}$ la participation de p au nombre de classes h_k de k.

On sait, voir [3], que

$$\mathrm{Card}\,\mathscr{A}_p = \frac{h_{k,p} \cdot p^{t-1}}{[U_k : U_k \cap N_{K/k}K^*]}$$