Régularité analytique pour des opérateurs elliptiques singuliers en un point

M. S. Baouendi* et J. Sjöstrand

0. Introduction et résultats

On considère un opérateur différentiel dans $\mathbf{R}^n$ ($n \geqq 2$) de la forme

$$P_0(x, D) = \sum_{|\alpha| \leqq m} a_\alpha(x) D^\alpha \tag{0.1}$$

où a_α est un polynôme de n variables homogène, de degré $|\alpha|$, à coefficients complexes. On suppose que P_0 est elliptique en dehors de l'origine dans $\mathbf{R}^n$.

Le cas particulier suivant

$$L_{\lambda,\mu} = r^2 \Delta + \mu r \frac{\partial}{\partial r} + \lambda$$

où

$$(\lambda, \mu) \in \mathbf{C}^2, \quad r^2 = \sum_{i=1}^n x_i^2 \quad \text{et} \quad \Delta = \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2}{\partial x_i^2},$$

a été étudié dans [4]; il a été démontré que pour tous $(\lambda, \mu) \in \mathbf{C}^2$, $L_{\lambda,\mu}$ n'est pas hypoelliptique dans $\mathbf{R}^n$, mais que pour tout ouvert Ω de $\mathbf{R}^n$, si $u \in \mathscr{C}^\infty(\Omega)$ et $L_{\lambda,\mu} u$ est analytique dans Ω, u est aussi analytique dans Ω.

On se propose de généraliser ces résultats à des opérateurs du type (0.1) et même à des opérateurs plus généraux à coefficients analytiques. On désigne par S_{n-1} la sphère unité de $\mathbf{R}^n$. On a un difféomorphisme naturel

$$S_{n-1} \times \mathbf{R}_+ \simeq \mathbf{R}^n \diagdown \{0\} \tag{0.2}$$

correspondant à prendre des coordonnées polaires. Il résulte de (0.2) le difféomorphisme

$$T^*(S_{n-1}) \times \mathbf{R} \simeq T^*(\mathbf{R}^n)_{|S_{n-1}}. \tag{0.3}$$

* Le premier auteur a bénéficié du "N.S.F. Grant 35 825".