Semi-groupes de moments sur $\mathbf{R}^p$ et $\mathbf{C}^p$

Henri Buchwalter

On sait, par la monographie de Fuglede [6], que le problème des moments réels multidimensionnel sur $\mathbf{R}^p$ n'a pas reçu de réponse positive satisfaisante autre que le critère général de Haviland [7] rappelé ci-dessous. Il en est évidemment de même du problème des moments complexes sur $\mathbf{C}^p$. Toutefois rien n'empêche de considérer le problème des semi-groupes correspondant, déjà résolu pour le cas de la dimension réelle un dans [8] et [4], et pour le cas d'un convexe compact de $\mathbf{R}^p$ dans [2].

Nous offrons ici une solution complète du problème à la fois sur l'espace $\mathbf{R}^p$ et sur l'espace $\mathbf{C}^p$, intéressante par le fait que la caractérisation donnée n'est pas aussi simple qu'on pouvait l'espérer par l'examen attentif des cas précédemment évoqués. En particulier il semble impossible de l'exprimer par un nombre fini de conditions faisant intervenir les monômes élémentaires X_k dans le cas réel et $Z_k = X_k + iY_k$ dans le cas complexe. De plus, dans le cas complexe, on voit apparaître l'existence de formes hermitiennes 2-homogènes d'un genre nouveau, qui ne sont pas de type positif, mais qui remplacent les formes quadratiques positives habituelles de la théorie.

Fixons donc l'entier $p \geqq 1$ et l'espace $\mathbf{R}[X] = \mathbf{R}[X_1, \ldots, X_p]$ des polynômes à p indéterminées. On rappelle qu'une suite $\alpha = (\alpha_n)$, $n = (n_1, \ldots, n_p) \in \mathbf{N}^p$, est une suite de moments sur $\mathbf{R}^p$ lorsqu'il existe une mesure positive μ sur $\mathbf{R}^p$ telle que

$$\alpha_n = \int t^n \, d\mu(t) = \int t_1^{n_1} \ldots t_p^{n_p} \, d\mu(t_1, \ldots, t_p)$$

pour tout $n \in \mathbf{N}^p$. Pour exprimer une condition nécessaire et suffisante pour que α soit une suite de moments, il faut rappeler rapidement que l'espace $\mathbf{R}[X]$ opère sur l'espace S de toutes les suites α selon

$$(1) \qquad (P\alpha)_n = \sum_k u_k \alpha_{n+k} \quad \text{si} \quad P = \sum u_k X^k$$

ce qui permet de définir la forme bilinéaire canonique

$$(2) \qquad \langle \alpha, P \rangle = (P\alpha)_0 = \sum u_k \alpha_k \quad \text{si} \quad P = \sum u_k X^k$$