Théorème de point fixe et d'approximation

B. Beauzamy et P. Enflo

Notre but dans cet article est de donner plusieurs applications de la notion (introduite dans [2] et développée dans [3]) de point minimal par rapport à un ensemble.

Nous renvoyons à [3] pour l'étude de cette notion; rappelons simplement qu'un point x est dit minimal par rapport à un sous-ensemble M d'un espace de Banach E si $\forall y \in E$, les conditions

$$\|y-m\| \leqq \|x-m\| \quad \forall m \in M$$

impliquent $y=x$.

La première application concerne la convergence faible vers les points fixes des contractions: nous montrons qu'en rempla çant les sommes de Césaro $\frac{1}{n} \sum_0^{n-1} T^k e$ par un point minimal par rapport à l'ensemble $\{e, Te, \ldots, T^{n-1}e\}$ (qui se réduit à la somme de Césaro dans les espaces de Hilbert), on peut étendre aux espaces uniformément convexes des résultats démontrés par J. B. Baillon [1] dans les espaces de Hilbert. Cette question fait l'objet du premier paragraphe.

Dans le second paragraphe, nous nous intéressons à l'approximation des points minimaux, et nous le faisons dans un cadre plus large: celui des optima de Pareto, qui sont étudiés en Economie. Les définitions précises sont données plus loin; disons simplement que si $u_1, \ldots, u_N$ sont des fonctions concaves définies sur un espace de Banach E, x est un optimum de Pareto pour ces fonctions si $\forall y \neq x$, $\exists i_0$, $u_{i_0}(y) < u_{i_0}(x)$.

Nous montrons que si un point x est un optimum de Pareto pour N fonctions u_i, il peut être approximé par un point qui est un optimum de Pareto pour seulement n de ces fonctions; en outre la plupart des choix de ces n fonctions donnent un bon résultat.

Nous énonçons, à la fin du second paragraphe, le résultat d'approximation dans le cas particulier des points minimaux, et, dans le troisième paragraphe, nous l'appliquons pour calculer, connaissant la taille d'un compact, la taille de ses points minimaux.