Extension unitaire et fonctions de représentation d'une contraction de classe C_1

B. Beauzamy et M. Rome

§ 1. Extension isométrique d'une contraction de classe C_1

Soit E un espace de Hilbert complexe, et soit T une contraction de classe C_1. sur E, c'est-à-dire un opérateur vérifiant:

$$\|T\| = 1 \quad \text{et} \quad \forall x \neq 0 \quad T^n x \underset{n \to +\infty}{\not\longrightarrow} 0$$

(la terminologie "de classe C_1." est due à Sz.-Nagy—Foiaş [7]).

On peut définir un opérateur A, de E dans lui-même, par la formule:

$$\langle Ax, y \rangle = \lim_{m \to +\infty} \langle T^m x, T^m y \rangle; \tag{1}$$

il est immédiat de vérifier que la limite au second membre existe bien.

Cet opérateur est de norme 1 (puisque, pour tout $\varepsilon > 0$, on peut trouver x de norme 1 tel que $\lim_{m \to +\infty} \|T^m x\|^2 \geqq 1 - \varepsilon$), et est auto-adjoint.

La formule

$$\langle Ax, x \rangle = \lim_{m \to +\infty} \|T^m x\|^2$$

montre que A est injectif, positif, et d'image dense (mais remarquons que A et T ne commutent pas en général).

On peut aussi considérer la formule (1) comme l'introduction sur E d'un nouveau produit scalaire, défini par:

$$[x, y] = \langle Ax, y \rangle. \tag{2}$$

Soit $[\![.]\!]$ la norme déduite de ce produit scalaire, c'est-à-dire:

$$[\![x]\!]^2 = \langle Ax, x \rangle = \lim_{m \to +\infty} \|T^m x\|^2.$$

Il est facile de voir dans quel cas E est complet pour cette norme, ou, ce qui revient au même, à quelle condition A est inversible: