Homology, Homotopy and Applications, vol. 9(1), 2007, pp.193–212

HYPERARBRES, ARBRES ENRACINÉS ET PARTITIONS POINTÉES

F. CHAPOTON

(*communicated by Jean-Louis Loday*)

Abstract

We compute the characteristic polynomials of the posets of hypertrees. We show that the generating series of the polynomials can be expressed using cyclic hypertrees. We also propose a conjecture on the action of symmetric groups on the Whitney homology of these posets. In addition, we show that Vallette's poset of pointed partitions is homotopy equivalent to Pitman's poset of forests. The implicit common theme of these topics is the combinatorics of the PreLie operad.

On calcule les polynômes caractéristiques des posets des hyperarbres. On montre que la série génératrice de ces polynômes fait intervenir les hyperarbres cycliques. On donne aussi une conjecture pour l'action du groupe symétrique sur l'homologie de Whitney de ces posets. Par ailleurs, on montre que le poset des partitions pointées de Vallette est équivalent homotopiquement au poset des forêts d'arbres enracinés de Pitman. Le thème commun implicite à tous ces objets est la combinatoire de l'opérade PreLie.

0. Introduction

Les hyperarbres sont des objets combinatoires relativement nouveaux, notamment par rapport aux arbres. Ils ont été introduits par Berge dans sa généralisation de la théorie des graphes aux hypergraphes [**2**]. Plus récemment, ils ont été utilisés pour étudier certains sous-groupes d'automorphismes du groupe libre [**15**]. L'objet de cet article est d'esquisser un rapport possible avec la théorie des opérades, plus précisément avec l'opérade anticyclique PreLie.

Cet article comprend deux parties principales. La première étudie le poset des hyperarbres sur n sommets. Le résultat principal est le calcul du polynôme caractéristique, suivant une méthode inspirée par le calcul par McCammond et Meier du nombre de Möbius du poset obtenu par l'ajout d'un maximum. Cette description fait intervenir la notion nouvelle d'hyperarbre cyclique. On propose ensuite une conjecture décrivant l'action naturelle du groupe symétrique sur l'homologie

Received May 22, 2006, revised December 7, 2006; published on February 6, 2007.
2000 Mathematics Subject Classification: 05E25, 06A11, 18D50.
Key words and phrases: Poset, homology, hypertree, tree, symmetric group, operad.
Copyright © 2007, International Press. Permission to copy for private use granted.

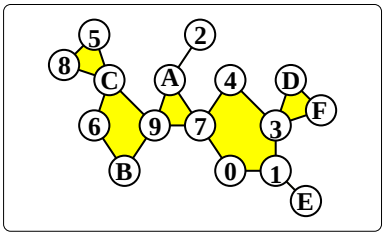

Figure 1: Un exemple d'hyperarbre sur $\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, A, B, C, D, E, F\}$.

de Whitney de ce poset. On montre que si cette conjecture est vérifiée, alors cette homologie est fortement liée à l'opérade anticyclique décrivant les algèbres pré-Lie [**6, 5**].

La seconde partie est plutôt consacrée aux arbres enracinés. On montre que le poset des partitions pointées (introduit par Vallette en théorie des opérades) est équivalent par homotopie au poset des forêts (introduit par Pitman en probabilités). En utilisant les méthodes de Sundaram, on donne une description de l'action du groupe symétrique sur l'homologie de Whitney du poset des partitions pointées. Dans ce contexte, l'opérade PreLie joue un rôle explicite et mieux compris que dans le cadre des hyperarbres.

1. Ordre partiel sur les hyperarbres

Un **hypergraphe** sur un ensemble fini de sommets I est un ensemble non vide de parties de I de cardinal au moins 2. Ces parties sont appelées les **arêtes** de l'hypergraphe. On peut définir une notion de chemin entre deux sommets dans un hypergraphe : formellement c'est une suite alternée d'arêtes et de sommets où chaque arête contient les deux sommets adjacents. On peut donc parler d'hypergraphe connexe et de cycle dans un hypergraphe.

Un **hyperarbre** sur un ensemble fini de sommets I est un hypergraphe connexe sur I qui ne contient pas de cycle. Ceci entraîne que deux arêtes distinctes se rencontrent en au plus un sommet.

On va définir un ordre partiel sur l'ensemble des hyperarbres sur I. Ce poset a été étudié par J. McCammond and J. Meier [**15**] en relation avec la cohomologie ℓ^2 de certains groupes d'automorphismes des groupes libres ; ils montrent notamment que le poset des hyperarbres est Cohen-Macaulay.

La relation d'ordre sur les hyperarbres est définie comme suit. Un hyperarbre S est inférieur ou égal à un hyperarbre T si chaque arête de S est la réunion d'une ou plusieurs arêtes de T.

Le rang $\mathrm{Rg}(T)$ d'un hyperarbre T est le nombre d'arêtes de T moins un. Le poset des hyperarbres est gradué par le rang. L'unique élément $\hat{0}$ de rang 0 est l'hyperarbre dont la seule arête est l'ensemble I tout entier. Les éléments de rang maximal (égal à $|I| - 2$) sont les $|I|^{|I|-2}$ arbres sur I, dont toutes les arêtes ont cardinal 2.

2. Séries génératrices des hyperarbres

On considère ici des séries génératrices classiques pour les hyperarbres, voir [**9, 15**] pour des travaux antérieurs.

Soit $\mathcal{HA}_n$ l'ensemble des hyperarbres sur l'ensemble $\{1,\dots,n\}$. On définit le **poids** d'un hyperarbre T comme le produit

$$\mathrm{Poids}(T) = \frac{1}{t}\prod_a (t\,u_{|a|}),$$

où a parcourt les arêtes de T. Autrement dit, le poids d'un hyperarbre est un monôme en les variables t et $(u_i)_{i\geqslant 2}$. La puissance de t est le rang de T. La puissance de u_i est le nombre d'arêtes de cardinal i dans T.

On introduit alors une série génératrice HA des hyperarbres selon le poids, définie comme suit :

$$\mathsf{HA} = \sum_{n\geqslant 2}\sum_{T\in\mathcal{HA}_n} \mathrm{Poids}(T)\frac{x^n}{n!} = \frac{x^2}{2}u_2 + \frac{x^3}{6}(u_3+3u_2^2t) + \cdots .$$

Soit HA^p la série génératrice similaire des hyperarbres pointés en un sommet, HA^a celle des hyperarbres pointés en une arête et HA^{pa} celle des hyperarbres pointés en un drapeau, c'est-à-dire munis d'une paire formée d'un sommet distingué et d'une arête distinguée contenant ce sommet.

On peut facilement obtenir une description récursive de ces séries génératrices. Tout d'abord, un hyperarbre pointé en un sommet se décompose naturellement selon les arêtes contenant le sommet distingué. On obtient ainsi que la série HA^p est caractérisée par la relation

$$\mathsf{HA}^p = \frac{x}{t}(\exp(t\mathsf{Y})-1), \tag{1}$$

où la série auxiliaire Y, définie par

$$\mathsf{Y} = \sum_{n\geqslant 1} u_{n+1}\frac{(x+t\,\mathsf{HA}^p)^n}{n!}, \tag{2}$$

est la série génératrice des hyperarbres sur l'ensemble $\{1,\dots,n\}\sqcup\{\bullet\}$, où le sommet $\bullet$ appartient à une seule arête.

Par ailleurs, on peut décomposer un hyperarbre pointé en une arête selon les composantes connexes de l'hypergraphe obtenu en enlevant cette arête. Chacune de ces composantes est un hyperarbre pointé en un sommet. On obtient ainsi la relation

$$\mathsf{HA}^a = \sum_{n\geqslant 1} u_{n+1}\frac{(x+t\,\mathsf{HA}^p)^{n+1}}{(n+1)!}.$$

De même, on décrit un hyperarbre pointé en un drapeau en utilisant la série auxiliaire Y. On obtient l'équation

$$\mathsf{HA}^{pa} = x\mathsf{Y}\exp(t\mathsf{Y}).$$

Enfin, par le principe de dissymétrie (voir [**3**, Chap. 4.1] pour le cas des arbres) qui consiste à utiliser l'existence d'un centre naturel pour un hyperarbre (qui est

soit une arête soit un sommet), on a

$$\mathsf{HA}^{pa} + \mathsf{HA} = \mathsf{HA}^{p} + \mathsf{HA}^{a}.$$

Toutes ces relations permettent le calcul par récurrence de ces séries génératrices. On a de plus la relation

$$\mathsf{HA}^{p} = x\partial_x \mathsf{HA}, \tag{3}$$

qui est la traduction habituelle du pointage en un sommet au niveau des séries génératrices.

3. Séries génératrices des hyperarbres cycliques

Un **hyperarbre cyclique** est un hyperarbre muni en chaque sommet d'un ordre cyclique sur les arêtes contenant ce sommet.

3.1. Version complète

Soit $\mathcal{HAC}_n$ l'ensemble des hyperarbres cycliques sur l'ensemble $\{1,\dots,n\}$ et soit HAC la série génératrice des hyperarbres cycliques définie par

$$\mathsf{HAC} = \sum_{n\geqslant 2} \sum_{T\in\mathcal{HAC}_n} \mathrm{Poids}(T)\frac{x^n}{n!} = \frac{x^2}{2}u_2 + \frac{x^3}{6}(u_3 + 3u_2^2 t) + \cdots,$$

avec la même définition du poids que précédemment.

Soit HAC^{p} la série génératrice des hyperarbres cycliques pointés en un sommet, HAC^{a} celle des hyperarbres cycliques pointés en une arête et HAC^{pa} celle des hyperarbres cycliques pointés en un drapeau.

Remarque 3.1. On peut aussi voir les hyperarbres cycliques pointés en un drapeau comme des hyperarbres pointés en un sommet (la racine) et munis d'un ordre total sur les arêtes entrantes en chaque sommet (l'arête sortante est l'arête la plus proche de la racine). On appelle **hyperarbre ordonné** ce type d'hyperarbre. Pour la bijection entre ces deux types d'objets, on utilise la structure arborescente et le drapeau initial pour définir pour chaque sommet (sauf le sommet pointé) une arête sortante, celle qui est la plus proche du sommet fixé. Les ordres cycliques sont alors équivalents à des ordres totaux, en utilisant le drapeau initial (pour la racine) ou l'arête sortante (pour les autres sommets) pour effectuer la conversion entre les deux types d'ordres.

Comme précédemment pour les hyperarbres, on a une description de ces séries génératrices par des équations fonctionnelles d'origine combinatoire.

En utilisant la description par les hyperarbres ordonnés, on voit que la série HAC^{pa} est caractérisée par la relation

$$\mathsf{HAC}^{pa} = \frac{x\mathsf{YC}}{1 - t\mathsf{YC}}, \tag{4}$$

où la série auxiliaire YC, définie par

$$\mathsf{YC} = \sum_{n\geqslant 1} u_{n+1}\frac{(x + t\,\mathsf{HAC}^{pa})^n}{n!}, \tag{5}$$

est la série génératrice des hyperarbres ordonnés sur l'ensemble $\{1,\dots,n\}\sqcup\{\bullet\}$ où le sommet $\bullet$, qui est la racine, est contenu dans une seule arête.

Quand on pointe un hyperarbre cyclique en une arête, on obtient un ensemble (de cardinal au moins 2) d'hyperarbres ordonnés. On a donc

$$\mathsf{HAC}^a = \sum_{n\geqslant 1} u_{n+1}\frac{(x+t\,\mathsf{HAC}^{pa})^{n+1}}{(n+1)!}.$$

Quand on pointe en un sommet, on obtient un cycle d'hyperarbres ordonnés ayant un sommet racine en commun. Ceci entraîne la relation

$$\mathsf{HAC}^p = -\frac{x}{t}\ln(1-t\mathsf{YC}).$$

Enfin, à nouveau par le principe de dissymétrie, on a

$$\mathsf{HAC}^{pa}+\mathsf{HAC} = \mathsf{HAC}^p+\mathsf{HAC}^a.$$

Toutes ces relations permettent le calcul par récurrence de ces séries génératrices. On a de plus la relation

$$\mathsf{HAC}^p = x\partial_x\mathsf{HAC},$$

qui exprime comme précédemment le pointage en un sommet.

3.2. Version simplifiée

On spécialise les résultats de la section précédente en posant $u_i = 1$ pour tout $i\geqslant 2$. Le poids d'un hyperarbre devient simplement la variable t à la puissance la rang de T. Par abus de notation, on garde le même nom pour les séries génératrices, dont les versions complètes ne seront pas utilisées.

La série HAC^{pa} est déterminée par

$$\mathsf{HAC}^{pa} = x(\exp(x+t\,\mathsf{HAC}^{pa})-1)/(1-t(\exp(x+t\,\mathsf{HAC}^{pa})-1)). \tag{6}$$

On a la relation suivante :

$$\mathsf{HAC}^p = -\frac{x}{t}\ln(1-t(\exp(x+t\,\mathsf{HAC}^{pa})-1)). \tag{7}$$

On a aussi

$$\mathsf{HAC}^a = \exp(x+t\,\mathsf{HAC}^{pa})-1-(x+t\,\mathsf{HAC}^{pa}). \tag{8}$$

Enfin, on a

$$\mathsf{HAC} = \mathsf{HAC}^p+\mathsf{HAC}^a-\mathsf{HAC}^{pa}. \tag{9}$$

Bien sûr, on a encore

$$\mathsf{HAC}^p = x\partial_x\mathsf{HAC}. \tag{10}$$

4. Calcul du polynôme caractéristique

Dans cette section, on calcule les polynômes caractéristiques des posets des hyperarbres à l'aide des séries génératrices des hyperarbres cycliques.

Soit χ_n le polynôme caractéristique du poset $\mathcal{HA}_n$, en la variable s :

$$\chi_n = \sum_{T \in \mathcal{HA}_n} \mu(\hat{0}, T) s^{n-2-\mathrm{Rg}(T)},$$

où $\mu(\hat{0}, T)$ est le nombre de Möbius de l'intervalle $[\hat{0}, T]$.

Soit χ_T le polynôme caractéristique du poset $\mathcal{HA}_n^{\geqslant T}$ formé par les éléments de $\mathcal{HA}_n$ supérieurs à T :

$$\chi_T = \sum_{U \geqslant T} \mu(T, U) s^{n-2-\mathrm{Rg}(U)}.$$

Comme le poset $\mathcal{HA}_n^{\geqslant T}$ est isomorphe au produit $\prod_a \mathcal{HA}_{|a|}$ où a parcourt les arêtes de T (voir [**15**, Lemme 2.5]), on a la relation

$$\chi_T = \prod_a \chi_{|a|}.$$

Par conséquent,

$$\frac{\chi_T}{s} = \frac{1}{s} \prod_a \left(s \frac{\chi_{|a|}}{s}\right).$$

On sait de plus, par la définition des polynômes caractéristiques, que

$$\sum_{T \in \mathcal{HA}_n} \chi_T = s^{n-2}.$$

Donc on a

$$\sum_{T \in \mathcal{HA}_n} \frac{1}{s} \chi_T = s^{n-3}.$$

On définit des séries $\overline{\mathsf{HA}}, \overline{\mathsf{Y}}, \ldots$ en remplaçant u_i par χ_i/s et t par s dans HA, Y, etc. On obtient alors

$$\overline{\mathsf{HA}} = \sum_{n \geqslant 2} s^{n-3} \frac{x^n}{n!} = \frac{1}{s^3}(\exp(sx) - 1 - sx).$$

On en déduit donc, par la relation (3), que

$$\overline{\mathsf{HA}}^p = \frac{x}{s^2}(\exp(sx) - 1).$$

Par ailleurs, en inversant la relation (1), on montre que

$$s^2 \overline{\mathsf{Y}} = s \ln \left(1 + \frac{s \overline{\mathsf{HA}}^p}{x}\right).$$

On a donc obtenu les équations suivantes :

$$A := s^2 \overline{\mathsf{Y}} = s \sum_{n \geqslant 1} \chi_{n+1} \frac{(x + s\overline{\mathsf{HA}}^p)^n}{n!} = s \ln \left(1 + \frac{s \overline{\mathsf{HA}}^p}{x}\right),$$

et

$$B := sx + s^2\, \overline{\mathsf{HA}}^p = sx + x(\exp(sx) - 1).$$

Ces relations caractérisent les polynômes χ_n de la variable s.

On effectue ensuite le changement de variables $s = -1/t$ et $x = -tz$. Soit τ_{n+1} le polynôme $(-t)^{n-1}\chi_{n+1}(-1/t)$ en la variable t. On a alors les relations suivantes :

$$A = \sum_{n \geqslant 1} \tau_{n+1} \frac{B^n}{n!},$$

et

$$\begin{cases} A &= -\frac{1}{t}\ln(B/z), \\ B &= z - tz(\exp(z) - 1). \end{cases} \tag{11}$$

Ces relations caractérisent les polynômes τ_n.

Théorème 4.1. *La solution unique du système* (11) *en fonction de B est donnée par*

$$\begin{cases} A &= \partial_B \mathsf{HAC}(B), \\ z &= B + t\,\mathsf{HAC}^{pa}(B). \end{cases}$$

Démonstration. L'unicité est claire. Il suffit donc de vérifier la solution proposée. Soient A et B comme dans l'énoncé du théorème. En utilisant les relations (6),(7) et (10) entre les séries génératrices d'hyperarbres cycliques, on a

$$BA = \mathsf{HAC}^{p}(B) = -\frac{B}{t}\ln(1 - t(\exp(z) - 1)), \tag{12}$$

$$(z - B)/t = \mathsf{HAC}^{pa}(B) = B(\exp(z) - 1)/(1 - t(\exp(z) - 1)). \tag{13}$$

On obtient en simplifiant

$$A = -\frac{1}{t}\ln(1 - t(\exp(z) - 1)), \tag{14}$$

$$B = z - tz(\exp(z) - 1). \tag{15}$$

Ceci entraîne que

$$A = -\frac{1}{t}\ln(B/z). \qquad \square$$

Corollaire 4.1. *Le polynôme $\tau_n = (-t)^{n-2}\chi_n(-1/t)$ est la fonction génératrice de l'ensemble fini des hyperarbres cycliques sur n sommets selon le nombre d'arêtes. En particulier, le polynôme caractéristique χ_n du poset $\mathcal{HA}_n$ a des coefficients alternés.*

La seconde partie du corollaire est déjà connue, car elle résulte du fait que le poset $\mathcal{HA}_n$ est Cohen-Macaulay.

Pour retrouver les résultats de McCammond et Meier [**15**] sur le nombre de Möbius du poset $\widehat{\mathcal{HA}}_n$ obtenu en rajoutant artificiellement un élément maximal à $\mathcal{HA}_n$, on doit faire $t = -1$ dans le système (11), qui se simplifie en

$$\begin{cases} A &= \ln(B/z), \\ B &= z\exp(z). \end{cases}$$

La solution est bien connue, donnée par $z = A = W(B)$, où W est la fonction W

de Lambert définie par

$$W(B) = -\sum_{n\geqslant 1} n^{n-1}\frac{(-B)^n}{n!}.$$

On obtient donc

$$\mu(\widehat{\mathcal{HA}}_{n+1}) = -\chi_{n+1}(1) = (-1)^n n^{n-1},$$

comme attendu.

5. Homologie de Whitney des hyperarbres

5.1. Rappels sur les fonctions symétriques

Comme référence sur les fonctions symétriques, on renvoie le lecteur au livre classique de Macdonald [**14**]. On travaille ici dans le complété de l'anneau des fonctions symétriques par rapport à sa graduation naturelle, avec comme anneau de base les polynômes en une variable auxiliaire t.

On note ch le caractère de Frobenius qui associe à un module sur le groupe symétrique une fonction symétrique.

Le pléthysme des fonctions symétriques sera noté $\circ$. Il agit aussi sur la variable t selon la règle $p_n \circ t = t^n$. La suspension d'une fonction symétrique $f = f(p_1, p_2, p_3, \dots)$ exprimée en termes de sommes de puissances est la fonction symétrique $\Sigma_t f$ définie par

$$\Sigma_t f = -\frac{1}{t} f(-tp_1, -t^2 p_2, -t^3 p_3, \dots).$$

On a clairement $\partial_{p_1}\Sigma_t = (-t)\Sigma_t \partial_{p_1}$. Par convention, Σ désigne la suspension en $t = 1$. Notons que le pléthysme commute avec la spécialisation en $t = 1$.

Introduisons quelques fonction symétriques associées à des opérades. On confond, par abus de notation, une opérade avec la fonction symétrique associée.

Pour l'opérade associative, on a

$$\mathrm{Assoc} = p_1/(1 - p_1), \tag{16}$$

qui correspond à la somme des représentations régulières des groupes symétriques.

Soit Comm la fonction symétrique suivante :

$$\mathrm{Comm} = \exp\left(\sum_{k\geqslant 1} p_k/k\right) - 1. \tag{17}$$

Cette fonction symétrique correspond à la somme des représentations triviales.

Le fait que les opérades Lie et Comm soient des opérades quadratiques binaires de Koszul et duales implique (voir [**11**], en utilisant le Th. (3.3.2)(b) pour adapter la prop. (4.1.4)(b) au cas des fonctions symétriques ; voir aussi [**10**], § 7) la relation

$$\Sigma\,\mathrm{Lie} \circ \mathrm{Comm} = p_1, \tag{18}$$

où Lie est la fonction symétrique associée à l'opérade Lie. On peut aussi voir $\Sigma_t\,\mathrm{Lie}$ comme la fonction symétrique associée à la coopérade duale de Lie.

On a la relation classique

$$\mathrm{Comm} \circ \mathrm{Lie} = \mathrm{Assoc}\,. \tag{19}$$

Soit $\mathrm{Perm}(n)$ l'espace vectoriel de base $\{1, \ldots, n\}$ muni de l'action naturelle de $\mathfrak{S}_n$. On note Perm la fonction symétrique définie comme la somme des caractéristiques de Frobenius $\mathrm{ch}(\mathrm{Perm}(n))$ pour $n \geqslant 1$. On a alors la formule

$$\mathrm{Perm} = p_1(1 + \mathrm{Comm}). \tag{20}$$

Le fait que les opérades PreLie et Perm soient des opérades quadratiques binaires de Koszul et duales implique la relation

$$\Sigma\,\mathrm{PreLie} \circ \mathrm{Perm} = \mathrm{Perm} \circ \Sigma\,\mathrm{PreLie} = p_1, \tag{21}$$

où PreLie est la fonction symétrique associée aux arbres enracinés [**6**]. Par l'interprétation usuelle de l'action de $p_1\partial_{p_1}$ comme le pointage en un sommet, la fonction $p_1\partial_{p_1}$ PreLie correspond donc aux arbres doublement pointés. Un tel objet se décompose de façon unique (en utilisant l'unique chemin joignant les deux points marqués) en une liste d'arbres enracinés. On a donc la relation

$$p_1\partial_{p_1}\,\mathrm{PreLie} = \mathrm{Assoc} \circ \mathrm{PreLie}\,. \tag{22}$$

Des relations (20) et (21), on déduit la relation

$$\Sigma\,\mathrm{PreLie}\,(\mathrm{Comm} \circ \Sigma\,\mathrm{PreLie}) = p_1 - \Sigma\,\mathrm{PreLie}\,. \tag{23}$$

Lemma 5.1. *On a*

$$p_1\partial_{p_1}\Sigma\,\mathrm{PreLie} + \partial_{p_1}(\mathrm{Comm} \circ \Sigma\,\mathrm{PreLie}) = 1.$$

Démonstration. Ceci équivaut à

$$\Sigma(p_1\partial_{p_1}\,\mathrm{PreLie}) + \partial_{p_1}(\mathrm{Comm} \circ \Sigma\,\mathrm{PreLie}) = 1.$$

En utilisant la relation (22), le membre de gauche devient

$$\Sigma\,\mathrm{Assoc} \circ \Sigma\,\mathrm{PreLie} + (\partial_{p_1}\Sigma\,\mathrm{PreLie})(1 + \mathrm{Comm} \circ \Sigma\,\mathrm{PreLie}).$$

En utilisant l'expression (16) de Assoc et les relations (23) et (22), ceci devient

$$\frac{\Sigma\,\mathrm{PreLie}}{1 + \Sigma\,\mathrm{PreLie}} - \Sigma\left(\frac{\mathrm{PreLie}}{p_1(1 - \mathrm{PreLie})}\right)\left(\frac{p_1}{\Sigma\,\mathrm{PreLie}}\right),$$

ce qui donne bien 1. □

5.2. Quelques fonctions symétriques nouvelles

Introduisons de nouvelles fonctions symétriques, inspirées de celles associées aux hyperarbres cycliques, mais distinctes.

Soit HAL^{pa} la fonction symétrique avec un paramètre t définie par

$$\mathsf{HAL}^{pa} = p_1[\Sigma_t\,\mathrm{Assoc}] \circ \mathrm{Comm} \circ [p_1 + (-t)\mathsf{HAL}^{pa}]. \tag{24}$$

Notons qu'ici et dans toute la suite, le pléthysme agit de façon non triviale sur la variable t : on a $p_k \circ t = t^k$. La variable t peut donc seulement être spécialisée en 0 ou 1.

Soit HAL^p la fonction symétrique avec un paramètre t définie par

$$\mathsf{HAL}^p = p_1[\Sigma_t \operatorname{Lie}] \circ \operatorname{Comm} \circ [p_1 + (-t)\mathsf{HAL}^{pa}]. \tag{25}$$

Soit HAL^a la fonction symétrique avec un paramètre t définie par

$$\mathsf{HAL}^a = [\operatorname{Comm} - p_1] \circ [p_1 + (-t)\mathsf{HAL}^{pa}]. \tag{26}$$

Soit enfin HAL la fonction symétrique avec un paramètre t définie par

$$\mathsf{HAL} = \mathsf{HAL}^p + \mathsf{HAL}^a - \mathsf{HAL}^{pa}. \tag{27}$$

Ces relations permettent de calculer ces fonctions symétriques par récurrence. Par les formules (19),(24) et (25), on a aussi la relation suivante :

$$\frac{\mathsf{HAL}^{pa}}{p_1} = [\Sigma_t \operatorname{Comm}] \circ \frac{\mathsf{HAL}^p}{p_1}.$$

Proposition 5.2. *On a la relation*

$$\mathsf{HAL}^p = p_1 \partial_{p_1} \mathsf{HAL}.$$

Démonstration. On pose $C = \operatorname{Comm} \circ (p_1 - t\mathsf{HAL}^{pa})$. On calcule d'abord, en utilisant la relation (24), la dérivée $\partial_{p_1}\mathsf{HAL}^{pa}$ en fonction de C. On obtient

$$\partial_{p_1}\mathsf{HAL}^{pa} = \frac{C}{1+tC} + p_1(1 - t\partial_{p_1}\mathsf{HAL}^{pa})\frac{1+C}{(1+tC)^2}.$$

En simplifiant les dénominateurs, ceci donne la relation

$$(1 + 2tC + t^2C^2 + tp_1 + tp_1C)\partial_{p_1}\mathsf{HAL}^{pa} = C + tC^2 + p_1 + p_1C. \tag{28}$$

On utilise ensuite la relation (27) pour calculer $p_1\partial_{p_1}\mathsf{HAL}$. On obtient

$$\mathsf{HAL}^p + p_1^2(1 - t\partial_{p_1}\mathsf{HAL}^{pa})\frac{1+C}{1+tC} + p_1(1 - t\partial_{p_1}\mathsf{HAL}^{pa})C - p_1\partial_{p_1}\mathsf{HAL}^{pa}.$$

Pour démontrer la proposition, il faut donc vérifier la relation

$$\partial_{p_1}\mathsf{HAL}^{pa} = p_1(1 - t\partial_{p_1}\mathsf{HAL}^{pa})\frac{1+C}{1+tC} + (1 - t\partial_{p_1}\mathsf{HAL}^{pa})C.$$

Mais ceci résulte immédiatement de la relation (28) obtenue plus haut. □

5.3. Description de l'homologie de Whitney

Soit P un poset gradué avec un élément minimum $\hat{0}$ et dont toutes les chaînes maximales ont la même longueur. Les groupes d'homologie de Whitney de P, dénotés $\mathrm{WH}_i(P)$, ont été introduits par Baclawski [**1**] et étudiés par Björner [**4**]. Si le poset P est Cohen-Macaulay, alors on a la relation suivante avec le polynôme caractéristique :

$$\sum_{i=0}^{r} s^{r-i}(-1)^i \dim \mathrm{WH}_i(P) = \chi_P(s),$$

où r est le rang maximal dans P.

Les groupes d'homologie de Whitney ont la description suivante :

$$\mathrm{WH}_i(P) = \bigoplus_{x\in P} \widetilde{\mathrm{H}}_{i-2}(\hat{0}, x),$$

où les $\widetilde{\mathrm{H}}$ sont les groupes d'homologie réduite des intervalles de P.

Soit WH la fonction symétrique génératrice des caractères de l'action des groupes symétriques sur l'homologie de Whitney des posets $\mathcal{HA}_n$:

$$\mathrm{WH} := \sum_{n\geqslant 2} \sum_{i=0}^{n-2} \mathrm{ch}(\mathrm{WH}_i(\mathcal{HA}_n))(-t)^i.$$

On propose la conjecture suivante décrivant l'action du groupe symétrique sur l'homologie de Whitney du poset des hyperarbres.

Conjecture 5.3. *On a la relation suivante*

$$\mathrm{WH} = \mathsf{HAL}.$$

Cette conjecture est vraie au niveau des dimensions. Pour le vérifier, il suffit de comparer l'expression des polynômes caractéristiques obtenue plus haut en fonction de HAC (en $u_i = 1$ pour $i \geqslant 2$) et la spécialisation en $p_k = 0$ pour $k \geqslant 2$ des fonctions symétriques HAL.

Cette comparaison utilise notamment le fait que la spécialisation de la fonction symétrique Lie est $-\ln(1-p_1)$.

5.4. Caractéristiques d'Euler et relation avec PreLie

On substitue $t = 1$ dans les formules de la section 5.2. Les fonctions symétriques obtenues sont notées $\overline{\mathsf{HAL}}$, etc.

On sait ([**19**, Lemme 1.1]) que si la conjecture 5.3 est vérifiée, alors $\overline{\mathsf{HAL}}$ correspond (aux signes près) à l'action sur l'homologie du poset $\widehat{\mathcal{HA}}_n$ obtenu en ajoutant un maximum artificiel au poset $\mathcal{HA}_n$.

Soit $\overline{\mathsf{HAL}}^{pa}$ la fonction symétrique définie par

$$\overline{\mathsf{HAL}}^{pa} = p_1 \left[\frac{p_1}{1+p_1}\right] \circ \mathrm{Comm} \circ [p_1 - \overline{\mathsf{HAL}}^{pa}].$$

Ceci se simplifie en la relation

$$\overline{\mathsf{HAL}}^{pa} = (p_1 - \overline{\mathsf{HAL}}^{pa})\,\mathrm{Comm} \circ (p_1 - \overline{\mathsf{HAL}}^{pa}).$$

Par comparaison avec la relation (23), on a donc

$$\overline{\mathsf{HAL}}^{pa} = p_1 - \Sigma\,\mathrm{PreLie}\,.$$

On obtient ensuite

$$\overline{\mathsf{HAL}}^{p} = p_1[\Sigma\,\mathrm{Lie} \circ \mathrm{Comm}] \circ [p_1 - \overline{\mathsf{HAL}}^{pa}] = p_1[p_1 - \overline{\mathsf{HAL}}^{pa}] = p_1 \Sigma\,\mathrm{PreLie}\,.$$

Par la prop. 5.2, on a aussi la relation

$$\frac{1}{p_1}\overline{\mathsf{HAL}}^{p} = \partial_{p_1}\overline{\mathsf{HAL}} = \Sigma\,\mathrm{PreLie}\,. \tag{29}$$

On calcule

$$\overline{\mathsf{HAL}}^{a} = (\mathrm{Comm} - p_1) \circ [p_1 - \overline{\mathsf{HAL}}^{pa}] = \mathrm{Comm} \circ \Sigma\,\mathrm{PreLie} - \Sigma\,\mathrm{PreLie}\,.$$

Enfin, on obtient

$$\overline{\mathsf{HAL}} = -p_1 + \Sigma\,\mathrm{PreLie} + p_1\Sigma\,\mathrm{PreLie} + \mathrm{Comm} \circ \Sigma\,\mathrm{PreLie} - \Sigma\,\mathrm{PreLie},$$

ce qui donne

$$\overline{\mathsf{HAL}} = -p_1 + p_1\Sigma\,\mathrm{PreLie} + \mathrm{Comm} \circ \Sigma\,\mathrm{PreLie}\,. \tag{30}$$

Mais on sait, par la relation (23), que

$$\mathrm{Comm} \circ \Sigma\,\mathrm{PreLie} = -1 + p_1/\Sigma\,\mathrm{PreLie}\,.$$

Donc on a

$$1 + \overline{\mathsf{HAL}} = p_1(-1 + \Sigma\,\mathrm{PreLie} + 1/\Sigma\,\mathrm{PreLie}).$$

On rappelle que l'opérade PreLie est une opérade anticyclique [**5**], donc il existe une action du groupe symétrique $\mathfrak{S}_{n+1}$ sur le module $\mathrm{PreLie}(n)$. On note $M(n+1)$ ce module et M la fonction symétrique définie comme la somme pour $n \geqslant 2$ des caractères de Frobenius $\mathrm{ch}(M(n))$. La fonction symétrique M est caractérisée par la relation suivante (voir [**5**, Eq. (50)]) :

$$M + 1 = p_1(1 + \mathrm{PreLie} + 1/\,\mathrm{PreLie}).$$

Comme la suspension est anti-multiplicative,

$$\Sigma M - 1 = -p_1(-1 + \Sigma\,\mathrm{PreLie} + 1/\Sigma\,\mathrm{PreLie}).$$

Donc

Proposition 5.4. *On a la relation*

$$\overline{\mathsf{HAL}} = -\Sigma M.$$

Si la conjecture 5.3 est vérifiée, ceci devrait fournir une relation entre la suspension de l'opérade anticyclique PreLie et l'homologie du poset $\widehat{\mathcal{HA}}_n$.

6. Partitions pointées et forêts d'arbres enracinés

6.1. Partitions pointées

Le poset des partitions pointées PP_I d'un ensemble I, introduit par Vallette dans [**20**] et étudié ensuite dans [**7**], est une variante intéressante du poset classique des partitions.

Une partition pointée de I est la donnée d'une partition de I et d'un élément distingué ("pointé") dans chaque part de cette partition. Par abus de notation, on note par la même lettre une partition pointée et la partition sous-jacente. La relation d'ordre est la suivante : une partition pointée ν est inférieure à π si la partition ν raffine la partition π (chaque part de π est l'union de parts de ν) et si les éléments pointés dans π sont aussi pointés dans ν. Le poset des partitions pointées a un élément minimal donné par la partition en singletons, et $|I|$ éléments maximaux correspondant aux différents pointages de la partition de I en une seul part.

6.2. Forêts d'arbres enracinés

Le poset des forêts F_I a été introduit par Pitman dans [**16**], pour des motivations en probabilité. Il est aussi utile en combinatoire, voir [**17**, Ex. 5.29].

Une forêt d'arbres enracinés sur I est un graphe sur l'ensemble de sommets I dont les composantes connexes sont simplement connexes (des arbres) et munies chacune d'un élément distingué appelé la racine. On peut alors orienter les arêtes vers les racines. Un point de vue équivalent est de considérer un forêt comme un ensemble d'arêtes orientées ayant les propriétés adéquates (absence de cycles et de fourches divergentes).

La relation d'ordre est la suivante : une forêt G est inférieure à une forêt F si on peut obtenir G en enlevant des arêtes orientées à F. Le poset des forêts a un unique élément minimal donné par la forêt dont les arbres sont des singletons, et $|I|^{|I|-1}$ éléments maximaux qui correspondent aux arbres enracinés sur I.

Les intervalles dans F_I sont des posets booléens. La fonction de Möbius est donc -1 à la puissance le rang. On voit aussi que le poset F_I provient d'un complexe simplicial sur l'ensemble des arêtes orientées. Ceci entraîne que sa réalisation géométrique est la subdivision barycentrique de ce complexe simplicial.

6.3. Comparaison

On a un morphisme de poset ϕ de F_I dans PP_I qui associe à une forêt la partition de I formée par les arbres et le pointage de chaque part donné par la racine de chaque arbre. Cette application est équivariante pour l'action du groupe symétrique.

Théorème 6.1. *L'application ϕ induit une équivalence en homotopie.*

Démonstration. On suppose que I n'est pas un singleton, le théorème étant trivialement vrai dans ce cas. On utilise le critère suivant : il suffit de vérifier que la fibre de chaque élément est contractile (Lemme de la fibre de Quillen, voir [**21**]). On choisit de regarder la fibre vers le bas.

Comme la fibre d'une partition pointée en plusieurs morceaux est isomorphe comme poset au produit des fibres des morceaux, il suffit de montrer que la fibre d'une partition pointée en un seul bloc est contractile. On fixe donc un ensemble fini I et un élément pointé i dans I. On note p_i cette partition pointée.

Par la définition de la relation d'ordre de F_I par enlèvement d'arêtes, la réalisation géométrique de F_I est naturellement une subdivision barycentrique du complexe simplicial X sur l'ensemble I^2 (une paire (a, b) est vue comme une arête $(a \leftarrow b)$) dont les simplexes sont les ensembles d'arêtes de forêts. Ce complexe simplicial est pur et les simplexes maximaux sont en bijection avec les arbres enracinés sur I.

La fibre par ϕ de la partition pointée p_i correspond alors au sous-complexe simplicial X_1 dont les simplexes maximaux sont les arbres ayant i pour racine. Les simplexes de X_1 sont les ensembles d'arêtes ne contenant aucune arête de source i et correspondent aux forêts ayant i parmi leurs racines. Ce complexe simplicial est pur.

On définit, pour $1 \leqslant r \leqslant |I| - 1$, un complexe simplicial X_r comme le sous complexe simplicial de X dont les simplexes maximaux sont les arbres ayant i pour

racine et tels que la valence de i est au moins r. Ce sont des complexes simpliciaux purs.

On a des inclusions naturelles $X_{|I|-1} \subset \cdots \subset X_1$.

On va montrer que X_r est contractile par récurrence descendante sur r.

Considérons le cas $r = |I| - 1$. Il y a un seul simplexe maximal, correspondant à la corolle de racine i, formé par les arêtes $(i \leftarrow j)$ pour $j \in I \setminus \{i\}$. Ce complexe est évidemment contractile.

Supposons maintenant que X_r soit contractile, pour un certain $2 \leqslant r \leqslant |I| - 1$. On va montrer que X_{r-1} se rétracte sur X_r, donc est aussi contractile.

Soit C un simplexe maximal de X_{r-1} correspondant à un arbre dont la racine i est de valence exactement $r - 1$. Ceci signifie que C contient exactement $r - 1$ arêtes de type $(i \leftarrow j)$ et donc $|I| - 1 - (r - 1)$ autres arêtes. Considérons les simplexes de codimension 1 au bord de C qui contiennent $r - 2$ arêtes de type $(i \leftarrow j)$. Chacun de ces simplexes est contenu dans un seul simplexe maximal de X_{r-1}, qui est C. On peut donc écraser C sur le reste de son bord. Cette partie restante du bord de C est formée de simplexes (non-maximaux) contenant $r - 1$ arêtes de type $(i \leftarrow j)$. Ce bord est donc contenu dans le sous complexe X_r.

Ceci montre que X_{r-1} se rétracte sur X_r qui est contractile par récurrence, donc X_{r-1} aussi. Ceci termine la récurrence.

On a donc montré que la fibre X_1 est contractile. Ceci termine la démonstration. □

Comme corollaire du théorème 6.1, on obtient que les groupes d'homologie de PP_I et F_I sont isomorphes comme modules sur les groupes symétriques, à cause de l'invariance de l'homologie par équivalence homotopique [**21**, Th. 5.2.2].

7. Homologie de Whitney

7.1. Calcul pour les partitions pointées

On sait ([**7**, Th. 1.3]) que le polynôme caractéristique du poset PP_I est

$$(s - |I|)^{|I|-1}.$$

On vérifie aussi (voir [**17, 13**]) que ce polynôme est également le polynôme caractéristique du poset F_I, par la propriété que tous les intervalles dans F_I sont des posets booléens et en utilisant la série génératrice connue $(s + |I|)^{|I|-1}$ pour les forêts.

On obtient ici une description de l'action du groupe symétrique sur l'homologie de Whitney des partitions pointées.

On se place pour ce qui suit dans la catégorie des espaces vectoriels gradués avec la règle des signes de Koszul (*i.e.* la catégorie des complexes avec différentielle nulle).

Proposition 7.1. *Le caractère de l'homologie de Whitney du poset des partitions pointées est donné par*

$$\mathrm{Comm} \circ \Sigma_t \, \mathrm{PreLie}\,.$$

Démonstration. Les orbites du groupe symétrique $\mathfrak{S}_n$ sur PP_n sont indexées par les partitions de n. Soit x_λ un représentant de l'orbite λ. On note λ_i le nombre de parts de taille i dans une partition λ.

Le stabilisateur de x_λ est le sous-groupe

$$\mathrm{Stab}(x_\lambda) = \prod_i \mathfrak{S}_{\lambda_i}[\mathfrak{S}_{i-1}],$$

où $\mathfrak{S}_{\lambda_i}[\mathfrak{S}_{i-1}]$ est un produit en couronne. On introduit aussi le groupe un peu plus gros défini par

$$G_\lambda = \prod_i \mathfrak{S}_{\lambda_i}[\mathfrak{S}_i].$$

Alors, on a la description suivante, voir [**4**, Th. 5.1], [**19**, Th. 1.2], de l'action de $\mathfrak{S}_n$ sur l'homologie de Whitney :

$$\mathrm{WH}(\mathrm{PP}_n) \simeq \bigoplus_\lambda \mathrm{Ind}_{\mathrm{Stab}(x_\lambda)}^{\mathfrak{S}_n} \widetilde{\mathrm{H}}(\hat{0}, x_\lambda). \tag{31}$$

On décompose l'induction en deux étapes :

$$\bigoplus_\lambda \mathrm{Ind}_{G_\lambda}^{\mathfrak{S}_n} \mathrm{Ind}_{\mathrm{Stab}(x_\lambda)}^{G_\lambda} \widetilde{\mathrm{H}}(\hat{0}, x_\lambda).$$

Par l'isomorphisme de Künneth, on décompose l'homologie réduite en produit selon la taille des parts de λ (voir [**18**, prop. 2.1]) et on décompose l'induction en produit d'inductions :

$$\bigoplus_\lambda \mathrm{Ind}_{G_\lambda}^{\mathfrak{S}_n} \bigotimes_i \mathrm{Ind}_{\mathfrak{S}_{\lambda_i}[\mathfrak{S}_{i-1}]}^{\mathfrak{S}_{\lambda_i}[\mathfrak{S}_i]} \widetilde{\mathrm{H}}(\hat{0}, x_{(i^{\lambda_i})}).$$

Par la description de l'homologie pour les puissances d'un poset (voir [**18**, prop. 2.3]), on a

$$\widetilde{\mathrm{H}}(\hat{0}, x_{(i^{\lambda_i})}) \simeq \mathrm{Sym}^{\lambda_i} \widetilde{\mathrm{H}}(\hat{0}, x_{(i)}),$$

où Sym désigne la puissance symétrique.

On obtient alors (par compatibilité entre produit en couronnes et puissance symétrique)

$$\bigoplus_\lambda \mathrm{Ind}_{G_\lambda}^{\mathfrak{S}_n} \bigotimes_i \mathrm{Sym}^{\lambda_i} \left(\mathrm{Ind}_{\mathfrak{S}_{i-1}}^{\mathfrak{S}_i} \widetilde{\mathrm{H}}(\hat{0}, x_{(i)}) \right).$$

Or, par un cas particulier (terme de degré maximal) de la formule (31) et les résultats de [**20**] sur l'homologie de PP_n, on a

$$\mathrm{Sgn}(n) \otimes_{\mathfrak{S}_n} \mathrm{PreLie}(n) = \mathrm{WH}_{n-1}(\mathrm{PP}_n) = \mathrm{Ind}_{\mathfrak{S}_{n-1}}^{\mathfrak{S}_n} \widetilde{\mathrm{H}}(\hat{0}, x_{(n)}),$$

où ces espaces sont placés en degré $n-1$ et $\mathrm{Sgn}(n)$ est la représentation signe.

Donc on a obtenu

$$\bigoplus_{\lambda} \mathrm{Ind}_{G_\lambda}^{\mathfrak{S}_n} \bigotimes_i \mathrm{Sym}^{\lambda_i} \left(\mathrm{Sgn}(i) \otimes_{\mathfrak{S}_i} \mathrm{PreLie}(i)\right).$$

Au niveau des caractères, on reconnaît dans cette expression le pléthysme

$$\mathrm{Comm} \circ \Sigma_t \, \mathrm{PreLie}. \qquad \square$$

On peut obtenir une preuve plus courte de cette proposition en utilisant les résultats de [**7**] et les méthodes de [**20**] qui donnent un description du complexe d'ordre de chaque intervalle dans le poset des partitions pointées.

On a aussi une description explicite du caractère de ce module. Par commodité, on donne plutôt le résultat équivalent pour une suspension.

Proposition 7.2. *La caractéristique de Frobenius de* $\Sigma_t \, \mathrm{Comm} \circ \mathrm{PreLie}$ *est*

$$\sum_{\lambda, |\lambda| \geqslant 1} (\lambda_1 - t)^{\lambda_1 - 1} \prod_{k \geqslant 2} \left((f_k(\lambda) - t^k)^{\lambda_k} - k\lambda_k (f_k(\lambda) - t^k)^{\lambda_k - 1} \right) \frac{p_\lambda}{z_\lambda},$$

où la somme porte sur les partitions non vides λ, λ_k *est le nombre de parts de taille* k *dans la partition* λ *et* $f_k(\lambda)$ *est le nombre de points fixes de la puissance* k^{eme} *d'une permutation de type cyclique* λ. *Les* p_λ *sont les fonctions symétriques sommes de puissances et les* z_λ *des constantes classiquement associées aux partitions.*

Démonstration. On a la relation

$$\Sigma \, \mathrm{Perm} \circ \mathrm{PreLie} = \left(p_1 \exp\left(-\sum_{k \geqslant 1} p_k / k \right) \right) \circ \mathrm{PreLie} = p_1$$

On introduit de nouvelles variables

$$y_\ell = p_\ell \circ \mathrm{PreLie}.$$

On a alors la relation inverse

$$p_\ell = y_\ell \exp\left(-\sum_k y_{k\ell} / k \right).$$

Soit λ une partition. Pour calculer le coefficient de p_λ dans la fonction symétrique $\Sigma_t \, \mathrm{Comm} \circ \mathrm{PreLie}$, il faut calculer le résidu

$$\iiint (\Sigma_t \, \mathrm{Comm} \circ \mathrm{PreLie}) \prod_{i=1}^{r} \frac{dp_i}{p_i^{\lambda_i + 1}}.$$

On peut supposer sans restriction que toutes les variables y_j et p_j pour $j > r$ sont nulles. La suspension de Comm est

$$\Sigma_t \, \mathrm{Comm} = \frac{-1}{t} \left(\exp\left(-\sum_{k \geqslant 1} t^k p_k / k \right) - 1 \right).$$

On effectue le changement de variables pour obtenir une intégrale en les variables

y. On a

$$\prod_{i=1}^{r} dp_i = \exp\left(-\sum_i \sum_k y_{ik}/k\right) \prod_{i=1}^{r} (1-y_i)dy_i.$$

A un facteur $-t$ et au terme constant près, on a donc à calculer le résidu

$$\iiint \exp\left(-\sum_{k\geqslant 1} t^k y_k/k\right) \exp\left(\sum_i \lambda_i \sum_k y_{ik}/k\right) \prod_{i=1}^{r} \frac{(1-y_i)}{y_i^{\lambda_i+1}} dy_i.$$

En regroupant les exponentielles et en inversant les sommations, on trouve

$$\iiint \exp\left(\sum_{k\geqslant 1} (f_k(\lambda) - t^k) y_k/k\right) \prod_{i=1}^{r} \frac{(1-y_i)}{y_i^{\lambda_i+1}} dy_i.$$

Cette intégrale se décompose en un produit de résidus en chaque variable y_i. On obtient facilement le résultat attendu. □

7.2. Relation avec l'opérade PreLie

A une fonction symétrique $f = \sum_{n\geqslant 1} f_n$ correspond une suite de modules $\mathscr{F}_n$ sur les groupes symétriques et un foncteur $\mathscr{F}$ qui associe à un espace vectoriel V l'espace vectoriel

$$\mathscr{F}(V) = \oplus_{n\geqslant 1} \mathscr{F}_n \otimes_{\mathfrak{S}_n} V^{\otimes n}.$$

Les foncteurs ainsi obtenus sont appelés foncteurs analytiques. Réciproquement, on peut retrouver la suite de modules $(\mathscr{F}_n)_n$ à partir du foncteur $\mathscr{F}$.

La composition des foncteurs correspond au pléthysme des fonctions symétriques associées. On a fait en sorte en introduisant la variable t, notamment dans la définition de la suspension Σ_t, que la spécialisation en $t = 1$ des fonctions symétriques corresponde au passage à la caractéristique d'Euler.

La fonction symétrique $\Sigma_t \operatorname{Comm} \circ \operatorname{PreLie}$ sert ainsi à décrire le complexe de Chevalley-Eilenberg calculant la cohomologie des algèbres pré-Lie libres vues comme algèbres de Lie. En effet, la fonction symétrique PreLie correspond au foncteur qui associe à V l'algèbre pré-Lie libre sur V. La composition avec la suspension de Comm correspond à prendre l'algèbre extérieure. La variable t sert à indiquer que la $k$ieme puissance extérieure est considérée en degré cohomologique $k-1$.

Comme on sait que les algèbres pré-Lie libres sont des algèbres de Lie libres [**8**], la cohomologie du complexe de Chevalley-Eilenberg est concentrée en degré zéro et correspond aux générateurs. Comme la spécialisation en $t = 1$ commute avec le pléthysme, la caractéristique d'Euler

$$\Sigma \operatorname{Comm} \circ \operatorname{PreLie}$$

correspond donc aux générateurs des algèbres pré-Lie libres comme algèbres de Lie.

Bien sûr, comme dans le cas des hyperarbres, $\operatorname{Comm} \circ \Sigma \operatorname{PreLie}$ (qui est la suspension de la caractéristique d'Euler précédente) décrit aussi l'homologie du poset obtenu en rajoutant un élément maximal au poset des partitions pointées.

On obtient ci-dessous une description de cette fonction symétrique à l'aide des fonctions symétriques $\overline{\mathsf{HAL}}$. Si la conjecture 5.3 est vraie, ceci donne une relation homologique non triviale entre le poset des hyperarbres et le poset des partitions pointées.

Proposition 7.3. *On a la relation suivante :*

$$\mathrm{Comm} \circ \Sigma \,\mathrm{PreLie} = p_1 - (p_1 \partial_{p_1} \overline{\mathsf{HAL}} - \overline{\mathsf{HAL}}).$$

Démonstration. On va calculer

$$\mathrm{Comm} \circ \Sigma \,\mathrm{PreLie} + p_1 \partial_{p_1} \overline{\mathsf{HAL}} - \overline{\mathsf{HAL}}.$$

En utilisant (30) et (29), on obtient

$$\mathrm{Comm} \circ \Sigma \,\mathrm{PreLie} + p_1 \Sigma \,\mathrm{PreLie} + p_1 - p_1 \Sigma \,\mathrm{PreLie} - \mathrm{Comm} \circ \Sigma \,\mathrm{PreLie}\,. \qquad \square$$

Remarque 7.4. Les composantes homogènes de $\mathrm{Comm} \circ \Sigma_t \,\mathrm{PreLie}$ apparaissent aussi implicitement dans les travaux de McCammond et Meier comme décrivant l'action du groupe symétrique sur l'algèbre de cohomologie du groupe des automorphismes symétriques du groupe libre [**12**].

8. Annexe

Pour éventuelle référence ultérieure, on rassemble ici les formules essentielles qui décrivent l'action des groupes symétriques sur les hyperarbres et les hyperarbres cycliques. Les preuves, essentiellement basées sur les descriptions combinatoires des sections 2 et 3, sont omises.

8.1. Caractère des hyperarbres

Soit $\underline{\mathsf{HA}}^p$ la fonction symétrique avec un paramètre t définie par

$$\underline{\mathsf{HA}}^p = p_1 [\Sigma_t \,\mathrm{Comm}] \circ \mathrm{Comm} \circ [p_1 + t \underline{\mathsf{HA}}^p].$$

Soit $\underline{\mathsf{HA}}^{pa}$ la fonction symétrique avec un paramètre t définie par

$$\underline{\mathsf{HA}}^{pa} = p_1 \left(\mathrm{Comm} \circ [p_1 + t \underline{\mathsf{HA}}^p]\right) [1 + t \Sigma_t \,\mathrm{Comm}] \circ \mathrm{Comm} \circ [p_1 + t \underline{\mathsf{HA}}^p].$$

Soit $\underline{\mathsf{HA}}^a$ la fonction symétrique avec un paramètre t définie par

$$\underline{\mathsf{HA}}^a = [\mathrm{Comm} - p_1] \circ [p_1 + t \underline{\mathsf{HA}}^p].$$

Soit enfin $\underline{\mathsf{HA}}$ la fonction symétrique avec un paramètre t définie par

$$\underline{\mathsf{HA}} = \underline{\mathsf{HA}}^p + \underline{\mathsf{HA}}^a - \underline{\mathsf{HA}}^{pa}.$$

Ces relations permettent de calculer ces fonctions symétriques par récurrence. On a la relation

$$\underline{\mathsf{HA}}^p = p_1 \partial_{p_1} \underline{\mathsf{HA}}.$$

8.2. Caractère des hyperarbres cycliques

Soit $\underline{\mathsf{HAC}}^{pa}$ la fonction symétrique avec un paramètre t définie par

$$\underline{\mathsf{HAC}}^{pa} = p_1[\Sigma_t \,\mathrm{Assoc}] \circ \mathrm{Comm} \circ [p_1 + t\underline{\mathsf{HAC}}^{pa}].$$

Soit $\underline{\mathsf{HAC}}^{p}$ la fonction symétrique avec un paramètre t définie par

$$\underline{\mathsf{HAC}}^{p} = p_1[\Sigma_t \,\mathrm{Cyc}] \circ \mathrm{Comm} \circ [p_1 + t\underline{\mathsf{HAC}}^{pa}],$$

où Cyc est la fonction symétrique dont le terme en degré n correspond à l'action du groupe symétrique sur l'ensemble des ordres cycliques sur n symboles.

Soit $\underline{\mathsf{HAC}}^{a}$ la fonction symétrique avec un paramètre t définie par

$$\underline{\mathsf{HAC}}^{a} = [\mathrm{Comm} - p_1] \circ [p_1 + t\underline{\mathsf{HAC}}^{pa}].$$

Soit enfin $\underline{\mathsf{HAC}}$ la fonction symétrique avec un paramètre t définie par

$$\underline{\mathsf{HAC}} = \underline{\mathsf{HAC}}^{p} + \underline{\mathsf{HAC}}^{a} - \underline{\mathsf{HAC}}^{pa}.$$

Ces relations permettent de calculer ces fonctions symétriques par récurrence.

On a la relation

$$\underline{\mathsf{HAC}}^{p} = p_1 \partial_{p_1} \underline{\mathsf{HAC}}.$$

References

[1] K. Bacławski, Whitney numbers of geometric lattices, *Advances in Math.* **16** (1975), 125–138.

[2] C. Berge, *Hypergraphes : combinatoire des ensembles finis*, μ_B, Gauthier-Villars, Paris, 1987. [Hypergraphs: Combinatorics of finite sets].

[3] F. Bergeron, G. Labelle, and P. Leroux, *Combinatorial species and tree-like structures*, vol. 67 of *Encyclopedia of Mathematics and its Applications*, Cambridge University Press, Cambridge, 1998.

[4] A. Björner, On the homology of geometric lattices, *Algebra Universalis* **14**(1) (1982), 107–128.

[5] F. Chapoton, On some anticyclic operads, *Algebr. Geom. Topol.* **5** (2005), 53–69.

[6] F. Chapoton and M. Livernet, Pre-Lie algebras and the rooted trees operad, *Internat. Math. Res. Notices* **8** (2001), 395–408.

[7] F. Chapoton and B- Vallette, Pointed and multi-pointed partitions of type A and B, *J. Algebraic Combin.* **23** (2006), 295–316.

[8] L. Foissy, Finite-dimensional comodules over the Hopf algebra of rooted trees, *J. Algebra* **255** (2002), 89–120.

[9] I. M. Gessel and L. H. Kalikow, Hypergraphs and a functional equation of Bouwkamp and de Bruijn, *J. Combin. Theory Ser. A* **110** (2005), 275–289.

[10] E. Getzler and M. M. Kapranov, Modular operads, *Compositio Math.* **110**(1) (1998), 65–126.

[**11**] V. Ginzburg and M. Kapranov, Koszul duality for operads, *Duke Math. J.* **76**(1) (1994), 203–272.

[**12**] C. Jensen, J. McCammond, and J. Meier, The integral cohomology of the group of loops, *Geom. Topol.* **10** (2006), 759–784.

[**13**] D. N. Kozlov, Complexes of directed trees, *J. Combin. Theory Ser. A* **88**(1) (1999), 112–122.

[**14**] I. G. Macdonald (with contributions by A. Zelevinsky), *Symmetric Functions and Hall Polynomials*, Oxford Mathematical Monographs, Clarendon Press, Oxford, second edition, 1995.

[**15**] J. McCammond and J. Meier. The hypertree poset and the l^2-Betti numbers of the motion group of the trivial link, *Math. Ann.* **328**(4) (2004), 633–652.

[**16**] J. Pitman, Coalescent random forests, *J. Combin. Theory Ser. A* **85**(2) (1999), 165–193.

[**17**] R. P. Stanley, *Enumerative combinatorics. Vol. 2*, vol. 62 of *Cambridge Studies in Advanced Mathematics*, Cambridge University Press, Cambridge, 1999. With foreword by G.-C. Rota and Appendix 1 by S. Fomin.

[**18**] S. Sundaram, Applications of the Hopf trace formula to computing homology representations, In *Jerusalem Combinatorics '93*, vol. 178 of *Contemp. Math.*, pp. 277–309. Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1994.

[**19**] S. Sundaram. The homology representations of the symmetric group on Cohen-Macaulay subposets of the partition lattice, *Adv. Math.* **104**(2) (1994), 225–296.

[**20**] B. Vallette, Homology of generalized partition posets, *J. Pure Appl. Algebra* **208**(2) (2007), 699–725.

[**21**] M. L. Wachs, Poset topology: Tools and applications, to appear in *Geometric Combinatorics* Volume of Institute for Advanced Study, Park City Mathematics Institute Lecture Series, 119 p. `arXiv:math.CO/0602226`.

F. Chapoton `chapoton@math.univ-lyon1.fr`

Institut Camille Jordan
Université Claude Bernard Lyon 1
Bâtiment Braconnier
21 Avenue Claude Bernard
F-69622 VILLEURBANNE Cedex
FRANCE

This article is available at `http://intlpress.com/HHA/v9/n1/a8`