72. Stetige Konvergenz und der Satz von Ascoli und Arzelà. V

Von Harry POPPE
Sektion Mathematik, Ernst-Moritz Arndt Universität, D. D. R.

(Comm. by Kinjirô KUNUGI, M. J. A., May 13, 1968)

Die vorliegende Arbeit enthält Anwendungen der Ergebnisse von "III, IV"[1] auf Kompaktheitskriterien vom Ascoli-Arzelà-Typ (Verschärfungen von Kriterien in [8] und [6]). Ferner ergibt sich ein spezielles Ergebnis über die Gültigkeit des Exponentialgesetzes für τ_c. Speziell werden Anwendungen der folgenden Ergebnisse von "IV" betrachtet. Wir benutzen dabei in der vorliegenden Arbeit die Bezeichnungen von "III, IV" und führen die dort begonnene Numerierung der Ergebnisse weiter:

(7) Y, Z seien L-Räume, Z erfülle die Axiome L III und LT_2; es sei $H\subset C(Y, Z)$ (oder allgemeiner $H\subset Z^Y$); lim sei eine Limesabbildung für H und es gelte:

1) H ist bezüglich lim kompakt,

2) $\omega:(H, \lim)\times Y\to Z$ ist stetig.

Dann ist H gleichstetig.

(8) Y, Z seien L-Räume; es sei $H\subset Z^Y$; lim sei eine Limesabbildung für H. Ist $A\subset Y$, so bezeichnen wir mit f_A die Einschränkung von $f\in Z^Y$ auf A. lim genüge folgenden Bedingungen:

(a) Ist $K\subset Y$ kompakt, so ist lim für $q_K(H)$ erklärt und die Abbildung $q_K: f\to f_K$ von $(H, \lim)$ auf $(q_K(H), \lim)$ ist stetig.

(b) Ist K kompakt in Y, so stimmen in $q_K(H)$ lim und s-lim überein.

Es sei $M\subset H\times Y$ und $pr_Y M$ sei kompakt in Y. Dann ist ω auf M stetig.

1) Aus (7) ergibt sich zunächst ein Satz von Kelley und Morse ([6], Chapter 7, Satz 20):

Y sei ein beliebiger, Z ein Hausdorffscher regulärer topologischer Raum; es sei $H\subset C(Y, Z)$ und τ sei eine Topologie für H (oder für $C(Y, Z)$) mit der Eigenschaft, daß $\omega:(H, \tau)\times Y\to Z$ stetig ist.[2] Ist dann $H\tau$-kompakt, so ist H gleichstetig.

Nach (7) genügt hierbei die Voraussetzung, daß Z Hausdorffsch ist.

---

1) Siehe [11].

2) In der englisch-sprachigen Literatur ist hierfür die Sprechweise "τ ist "admissible" (oder "jointly continuous") für H" üblich.

"(7) läßt sich insbesondere auf die stetige Konvergenz anwenden. Betrachten wir in (7) speziell lim $=s$-lim, so ist die Bedingung 2) von (7) unmittelbar erfüllt (siehe [8], (2.3b)). Damit erhalten wir nochmals das Ergebnis [8], (3.4a), entsprechend [9] leicht modifiziert (siehe auch die Fußnote auf S. 9 von "III"). Wir geben diesen Satz hier an, weil wir ihn später noch verwenden werden."

(9) Y, Z seien L-Räume; es sei $H \subset C(Y, Z)$.

1. Z erfülle das Axiom LT_3. Dann sind folgende Bedingungen hinreichend für die Kompaktheit von H bezüglich s-lim:

(a) H ist abgeschlossen bezüglich s-lim in $C(Y, Z)$.

(b) $H(y)$ (bzw. $(H(y))^{\lambda}$) ist kompakt für jedes $y \in Y$.

(c) H ist gleichstetig (im Sinne von (7), (II)).

2. Z erfülle die Axiome L III und LT_2 (jedoch nicht notwendig LT_3). Ist H kompakt bezüglich s-lim in $C(Y, Z)$, so erfüllt H die Bedingungen (a), (b), und (c).

Bemerkung: Es ergibt sich also, daß für die Notwendigkeit das Hausdorffsche Trennungsaxiom ausreicht, für die hinreichende Aussage benötigt man die Regularität, weil nur dann die Grenzfunktion eines stetig konvergenten Filters aus $C(Y, Z)$ stetig ist (siehe [8], (2.11). Entsprechende Verallgemeinerungen ergeben sich für die notwendigen Aussagen der Kompaktheitskriterien für τ_c in [6] und [8].

Wir betrachten dazu zunächst die Aussage (8).

2) Y und Z seien topologische Räume; es sei $C_K(Y, Z) = \{f \in Z^Y : f_K$ ist stetig auf K für jede kompakte Menge $K \subset Y\}$. Ist dann K eine kompakte Menge in Y, so gilt $q_K(C_k(Y, Z)) \subset C(K, Z)$. Ist Y (und damit auch K) Hausdorffsch oder regulär, so stimmen in $q_K(C_k(Y, Z))$ τ_c-lim und s-lim überein, wobei τ_c-lim die Konvergenz bezüglich τ_c bezeichne (man vergleiche [8], S. 98). Ferner ist $q_K : (C_k(Y, Z), \tau_c) \to (q_K(C_k(Y, Z)), \tau_c)$ stetig (wie man leicht erkennt, siehe auch [8], S. 117, unten). Damit ist (8) auf $H = C_k(Y, Z)$ und τ_c-lim anwendbar und es folgt für $M = (C_k(Y, Z), \tau_c) \times K$ das Lemma auf S. 23 von [7], für $M = (C(Y, Z), \tau_c) \times K$ etwas spezieller das Lemma (1.3) von [3] und für $M \subset (C(Y, Z), \tau_c) \times Y$ und M ein Hausdorffscher k-Raum (im Sinne von [6], S. 230) das Lemma der Arbeit [2] von Bagley und Yang.[1] (Es ist ja in diesem Falle ω genau dann auf M stetig, wenn die Einschränkung von ω auf jede kompakte und abgeschlossene Teilmenge von M stetig ist).

Sind Y, Z beliebige topologische Räume, ist $H \subset Z^Y$ und $A \subset Y$, so heißt H bekanntlich gleichstetig auf A, wenn $H_A = q_A(H)$ gleichstetig in Z^A ist (siehe [6]). Es gilt dann:

1) In [2] ist spezieller $M = H \times Y$, wobei $H \subset C(Y, Z)$.

(10) Y sei Hausdorffsch oder regulär, Z sei Hausdorffsch; es sei $H \subset C_k(Y, Z)$ und H sei in $C_k(Y, Z)$ bezüglich τ_c kompakt. Dann ist H gleichstetig auf allen kompakten Mengen von Y.

Beweis: Es sei K eine beliebige kompakte Menge aus Y; aus $H \subset C_k(Y, Z)$ folgt $H_K = q_K(H) \subset q_K(C_K(Y, Z)) \subset C(K, Z)$; wendet man (8) und (7) auf $H_K \times K \subset C(K, Z) \times K (= C_k(K, Z) \times K)$ an, so folgt, daß H_K gleichstetig ist.

Nun können wir noch den Satz (3.10) aus [8] verallgemeinern. In der hinreichenden Aussage von (3.10) (Aussage 1) würde nur die Kompaktheit von H in Y^X betrachtet. (Der Zusatz "$(H \subset C(X, Y)$" in der Voraussetzung von 1. ist überflüssig.) Ferner muß in der notwendigen Aussage (Aussage 2.) X nicht als beliebiger topologischer sondern als Hausdorffscher oder regulärer Raum vorausgesetzt werden (es wurde im Beweis das Kriterium (3.6) von [8] benutzt!).

Die neue erweiterte Fassung von [8], (3.10) lautet nun:

(11) Satz: Abgeschlossenheit und Kompaktheit beziehen sich im folgenden stets auf τ_c.

(I) Y, Z seien beliebige topologische Räume; es sei $H \subset Z^Y$. Hinreichend für die Kompaktheit von H sind die Bedingungen:

(a) H ist in Z^Y abgeschlossen.

(b) $\overline{H(y)}$ ist kompakt für jedes $y \in Y$.

(c′) H ist gleichstetig auf jeder kompakten Menge von Y.

(II) 1. Y sei ein beliebiger topologischer Raum, Z sei regulär; es sei $H \subset C_k(Y, Z)$. Hinreichend für die Kompaktheit von H in $C_k(Y, Z)$ sind die Bedingungen (a): H abgeschlossen in $C_k(Y,Z)$, (b), und (c′).

2. Y sei Hausdorffsch oder regulär, Z sei Hausdorffsch. Dann sind (a), (b), (c′) notwendig für die Kompaktheit von $H \subset C_k(Y, Z)$.

(III) 1. Y, Z seien Räume wie in (II), 1.; es sei $H \subset C(Y, Z)$.

α) H erfülle (a): H ist abgeschlossen in $C(Y, Z)$, (b), und (c′). Dann ist H in $C(Y, Z)$ kompakt, wenn H auch abgeschlossen ist in $C_k(Y, Z)$. Insbesondere ist also H kompakt in $C(Y, Z)$, wenn Y zusätzlich ein k-Raum ist, denn dann gilt $C_k(Y, Z) = C(Y, Z)$.

β) H erfülle (a), (b), und (c): H ist gleichstetig. Dann ist H kompakt in $C(Y, Z)$.

2. Y, Z seien Räume wie in (II), 2.; es sei $H \subset C(Y, Z)$. Notwendig für die Kompaktheit von H sind die Bedingungen (a), (b), (c′) von (III), 1.

Ist Y zusätzlich ein Hausdorffscher k-Raum, so sind (a), (b), und (c): H ist gleichstetig notwendig.

Beweis: (I) wurde in [8] bewiesen. (II), 1.: Es genügt folgendes zu zeigen: $\mathfrak{F}$ sei ein Filter in Z^Y, es sei $H \in \mathfrak{F}$, $f \in Z^Y$ und es gelte $f \in p\text{-}\lim \mathfrak{F}$ (punktweise Konvergenz); dann folgt $f \in C_k(Y, Z)$: sei K eine beliebige kompakte Menge aus Y; dann ist $q_K\mathfrak{F}$ Filter in Z^K und es gilt $f_K \in p\text{-}\lim q_K\mathfrak{F}$ in Z^K; ferner ist $H_K = q_K(H) \in q_K\mathfrak{F}$ und H_K ist gleichstetig; daraus folgt $f_K \in s\text{-}\lim q_K\mathfrak{F}$ ([8], 3.2a) und daraus wiederum $f_K \in C(K, Z)$ ([8], (2.11)), da Z regulär ist.

(II), 2.: (a) und (b) sind klar, (c′) folgt aus (10).

(III), 1., α): Nach (II), 1. folgt, daß H kompakt in $C_K(Y, Z)$ ist; wegen $H \subset C(Y, Z)$ ist dann aber H auch in $C(Y, Z)$ kompakt. β) folgt aus (9), 1.

(III), 2.: Der erste Teil folgt aus (II), 2.; ist Y zusätzlich ein Hausdorffscher k-Raum, so kann man so schließen: H ist kompakt und Hausdorffsch in $C(Y, Z)$ und folglich ist $H \times Y$ ein Hausdorffscher k-Raum; nach (8) und (7) folgt dann die Behauptung.

(11a) Folgerung: Y sei ein Hausdorffscher k-Raum, Z sei ein Hausdorffscher und regulärer Raum; es sei $H \subset C(Y, Z)$. Dann ist H genau dann kompakt in $C(Y, Z)$, wenn die Bedingungen (a), (b), und (c) gelten.

Das ist der Satz (3.6a) von [8] und der Satz 4 von [2] und verallgemeinert das Ergebnis 7.21, Bemerkung von [6]. Bagley und Yang beweisen (11a) mit Hilfe ihres Lemmas und der Sätze aus [6] (der Beweis von (III), 2. benutzt den Grundgedanken dieses Beweises); wir zeigten in [8], daß (11a) zu dem Kompaktheitskriterium von Gale [5] äquivalent ist.