ZUM BEWEIS DER VERALLGEMEINERUNG DES FIXPUNKTSATZES

Von Hukukane NIKAIDÔ

Es sei X eine kompakte, konvexe Menge in einem n-dimensionalen Euklidischen Raume, und $f(x)$ eine transformation, die für alle Punkten $x \in X$ definiert ist und als ihre Werte abgeschlossene, konvexe Untermengen von X hat. $f(x)$ heisst nach oben halbstetig, wenn: aus $x_n \to x$, $y_n \to y$ und $y_n \in f(x_n)$ folgt $y_n \in f(x)$.

Für jede nach oben halbstetige $f(x)$ von X gibt es einen solchen Punkt x, dass $x \in f(x)$. Diese Verallgemeinerung des Brouwerschen Fixpunktsatzes wurde von J. von Neumann [1] initiert und von S. Kakutani [2] aufgestellt und bewiesen. Letztlich hat K. Fan [3] diesen Kakutanischen Satz auf lokal konvexe topologische lineare Räume erweitert; dabei heisst $f(x)$ nach oben halbstetig, wenn es für jede $f(x)$ enthaltende offene Menge O eine solche Umgebung von x gibt, so dass $f(W_x) \subset O$. Eine solche Verallgemeinerung des Fixpunktsatzes ist sehr wünschenswert um so mehr, als man mit den in der Neumannschen Theorie der Gesellschaftsspiel relevanten Minimaxsätze mittels dieser Verallgemeinerung glatt verfahrt. Unser Zweck ist nicht es, eine weitere Verallgemeinerung der oben erwähnten Werke zu versuchen, sondern es, einen anderen Beweis der Fanschen Verallgemeinerung des Kakutanischen Satzes zu zeigen, auf Grund einer Charakterisierung der kompakten Mengen in einem lokal konvexen topologischen linearen Raume, die zwar schon von M. Hukuhara [4] festgestellt ist, die wir aber in diesem Werke von der Pseudo-Norm unabhängig beweisen wollen.

Charakterisierung der kompakten Mengen.

L sei ein topologischer linearer Raum, der durchweg für lokal konvex angenommen sei.

Eine stetige auf einer Untermenge von L erklärte Abbildung in L, $x \longrightarrow \Phi(x)$, heisst U-Verschiebung, wenn es eine solche Umgebung des Nullpunktes U gibt, dass $\Phi(x) - x \in U$ für jeden x in ihrem Definitionsgebiete.

Nun beweisen wir den die kompakten Mengen von L charakterisierenden

Satz Ist X eine kompakte Menge in L, so gibt es für jede beliebige U eine U-Verschiebung, die X auf eine Euklidische kompakte Menge abbildet. Umgekehrt, wenn eine abgeschlossene Menge X in einem vollständigen L für jede U auf eine kompakte Menge U-verschoben werden kann, so ist X kompakt.

Dieser Satz ist ja eine Verallgemeinerung der Alexandroffschen Charakterisierung der kompakten Mengen in einem separabelen Hilbertischen Raume in ziemlich allgemeine lineare Räume.

Wir mögen annehmen, dass die zu betrachtenden Umgebungen des Nullpunktes alle konvex und symmetrisch seien.

Nun ist L als eine topologische Gruppe ein regulärer Raum, also natürlich Hausdroffsch. Andererseits, da X eine kompakte Untermenge von L ist, ist X als ein Hausdorffscher kompakter Raum normal.

Sei U eine beliebige Umgebung des Nullpunktes.

Dann gibt es für jeden $x \in X$ eine solche Umgebung V_x des Nullpunktes, dass

$$(1) \quad (x + \overline{V_x}) \cap X \subset (x + U) \cap X.$$

Sodann, aus der Kompaktheit von X folgt, dass man ein solches System von endlich vielen Punkten $a_i \in X$ finden kann, das genügt:

$$(2) \qquad X \subset \bigcup_{i=1}^{s} (a_i + V_{a_i}).$$

Da X normal ist, für jede i gibt es eine reelle stetige, auf X definierte Funktion, $\varphi_i(x)$, so dass

$$\varphi_i(x) = 0, \ \text{falls} \ x \notin a_i + U,$$

$$\varphi_i(x) = 1, \ \text{falls} \ x \in a_i + \overline{V_{a_i}},$$

und $0 \leq \varphi_i(x) \leq 1$ für jeden $x \in X$.

Es ist leicht zu sehen, dass

(I) $$\sum_{i=1}^{s} \varphi_i(x) > 0$$

für jeden $x \in X$;

(II) Aus $\varphi_i(x) > 0$ folgt $x \in a_i + U$.

Betrachten wir die stetige Abbildung
$X \ni x \longrightarrow$
$$\Phi(x) = \frac{\sum \varphi_i(x) a_i}{\sum \varphi_i(x)} \in C(a_1, a_2, \cdots, a_s),$$

wobei $C(a_1, a_2, \cdots, a_s)$ die konvexe Hülle von $\{a_i;\ i=1,2,\cdots,s\}$ bezeichnet.

Wir zeigen, dass die oben erhaltene $\Phi(x)$ eine U-Verschiebung ist.

In der Tat, da, wie oben gesehen ist, aus $\varphi_i(x) > 0$ folgt $x - a_i \in U$, und, da U konvex ist, haben wir sofort
$$\Phi(x) - x = \frac{\sum \varphi_i(x) a_i}{\sum \varphi_i(x)} - x$$
$$= \frac{\sum \varphi_i(x)(a_i - x)}{\sum \varphi_i(x)} \in U$$

für jeden $x \in X$.

Umgekehrt, sei angenommen, dass eine abgeschlossene Menge X in einem vollständigen L bei jeder beliebigen U auf eine kompakte Menge U-verschoben werden kann.

Wäre X nicht total beschränkt, so gäbe es eine solche Punktfolge $\{c_n\} \subset X$, dass für $i \neq j$ $c_i - c_j \notin U$, wobei U eine geeignete Umgebung ist.

Sodann wählen wir eine Umgebung des Nullpunktes V, die erfüllt:

(3) $$V - V + V \subset U$$

Sei $\Phi(x)$ eine V-Verschiebung, die X auf eine kompakte Menge abbildet. Da $\Phi(X)$ kompakt ist, für geeignete i_0 und j_0 ($i_0 \neq j_0$)

(4) $$\Phi(c_{i_0}) - \Phi(c_{j_0}) \in V,$$

so haben wir
$$c_{i_0} - c_{j_0} = \Phi(c_{i_0}) - \Phi(c_{j_0}) + c_{i_0} - \Phi(c_{i_0}) + \Phi(c_{j_0}) - c_{j_0}$$
$$\in V - V + V \subset U,$$

was der Annehmung widerspricht. Somit muss X total beschränkt sein.

Und X ist notwendigerweise kompakt als eine total beschränkte abgeschlossene Menge in einem vollständigen L.

Fixpunktsätze

Nachdem die Existenz der U-Verschiebungen für X festgestellt worden ist, ist es leicht zu beweisen den Fixpunktsatz für eine stetige Transformation, $x \longrightarrow f(x)$, die eine konvexe kompakte $X \subset L$ in sich abbildet.

Zum Beweis des Satzes sei U eine beliebige Umgebung des Nullpunktes und $\Phi(x)$ eine U-Verschiebung, die X auf ein Euklidisches Kompaktum M abbildet; vermöge unserer Konstruktion von $\Phi(x)$ haben wir $M \subset X$.

Wir bezeichnen mit $C(M)$ die konvexe Hülle von M.

Nun bildet die stetige Abbildung, $x \longrightarrow \Phi(f(x))$, $C(M)$ in $C(M)$ ab, und, nach dem Brouwerschen Fixpunktsatz, gibt es einen Punkt $a \in C(M) \subset X$, so dass $a = \Phi(f(a))$.

Aber, da $\Phi(x)$ eine U-Verschiebung ist, so besagt $a = \Phi(f(a))$:

(5) $$a - f(a) \in U$$

Somit haben wir, dass für jede U
$$A_U = \{x;\ x \in X;\ x - f(x) \in \overline{U}\}$$

eine nicht leere, abgeschlossene Menge in X ist;

So aus der Kompaktheit von X folgt, dass

(6) $$\bigcap A_U \neq \phi$$

für alle U

Und die Punkte $\in \bigcap_U A_U$ sind natürlich die Fixpunkte von $f(x)$.

Mittels der U-Verschiebungen können wir auch die K.Fansche Verallgemeinerung des Neumann-Kakutanischen Fixpunktsatzes beweisen.

Es seien E, F topologische Räume und $\mathfrak{F}(F)$ die Familie aller abgeschlossenen Mengen in F. Eine

Abbildung $E \ni x \longrightarrow f(x) \in \mathfrak{F}(F)$ heisst nach oben halbstetig, wenn es für jede $f(x)$ enthaltende offene Menge O eine Umgebung W_x von x gibt, so dass $f(W_x) \subset O$.

Falls F ein linearer Raum ist, bezeichnen wir mit $\mathfrak{F}_c(F)$ die Unterfamilie von $\mathfrak{F}(F)$, die aus allen konvexen abgeschlossenen Untermengen von F besteht.

Satz Es seien L und X wie oben. Für jede nach oben halbstetige Abbildung $f(x)$ von X in $\mathfrak{F}_c(X)$ gibt es einen solchen Punkt $x \in X$, dass $x \in f(x)$.

Sei U eine Umgebung des Nullpunktes und $\Phi(x)$ eine V-Verschiebung, mit $V+V \subset U$, die X auf ein Euklidisches Kompaktum $\subset X$ abbildet.

Wir bezeichnen, wie oben, mit $C(A)$ die konvexe Hülle (+) einer Untermenge $A \subset L$.

Dann ist die Abbildung

$$
(7) \qquad X \ni x \longrightarrow C[\Phi(f(x))] \in \mathfrak{F}_c[C[\Phi(X)]]
$$

nach oben halbstetig.

In der Tat, sei O eine $C[\Phi(f(x))]$ enthaltende offene Menge, die vermöge der lokalen Konvexität von L für konvex angenommen werden mag. Da O natürlich $\Phi(f(x))$ enthält, ist $\Phi^{-1}(O)$ eine $f(x)$ enthaltende offene Untermenge von X, und folglich gibt es eine Umgebung V_x von x, so dass $f(V_x \cap X) \subset \Phi^{-1}(O)$. Daraus folgt $\Phi(f(V_x \cap X)) \subset O$. Aber, da O konvex ist, haben wir auch $C[\Phi(f(V_x \cap X))] \subset O$, was besagt, dass die betrachtete Abbildung nach oben halbstetig ist.

Nun, weil die Transformation, $x \longrightarrow C[\Phi(f(x))]$, $C[\Phi(X)]$ in $\mathfrak{F}_c[C[\Phi(X)]]$ abbildet, gibt es, nach dem Neumann-Kakutanischen Satz, einen Punkt $a \in C[\Phi(X)] \subset X$, so dass

$$
(8) \qquad a \in C[\Phi(f(a))].
$$

Nach (8) kann man ein System von endlich vielen Punkten, $b_j \in f(a)$, finden, so dass für gewisse reelle Zahlen β_j mit $\beta_j \geq 0$, $\sum_{j=1}^{n} \beta_j = 1$,

$$
(9) \qquad a - \sum_{j=1}^{n} \beta_j \Phi(b_j) \in V.
$$

Folglich haben wir, angesichts (9),

$$
(10) \qquad a - \sum_{j=1}^{n} \beta_j b_j = a - \sum_{j=1}^{n} \beta_j \Phi(b_j) + \sum_{j=1}^{n} \beta_j(\Phi(b_j)) - b_j) \in V + V \subset U.
$$

Denn, erstens ist $\Phi(x)$ eine V-Verschiebung und zweitens ist V konvex.

Da andererseits $f(a)$ konvex ist, haben wir

$$
(11) \qquad a \in \sum_{j=1}^{n} \beta_j b_j + U \subset f(a) + U.
$$

Somit haben wir gesehen, dass für jede

$$
H_U = \{ x \,;\, x \in X \,;\, x \in f(x) + \bar{U} \}
$$

eine nicht leere, abgeschlossene(*) Untermenge von X ist.

Dann, aus der Kompaktheit von folgt

$$
\bigcap_{\text{für alle } U} H_U \neq \phi
$$

und für $x \in \bigcap_U H_U$ haben wir $x \in f(x)$.

(*) Beweis dafür, dass H_U in X abgeschlossen ist.

Sei $a \in X$, $a \notin f(a) + \bar{U}$, so, da $(f(a) + \bar{U}) \cap X$ in X abgeschlossen ist, gibt es eine Umgebung des Nullpunktes V, die genügt:

$$
(12) \qquad (a + V) \cap (f(a) + \bar{U}) \cap X = \phi
$$

Andererseits, gibt es, wegen der Halbstetigkeit von $f(x)$, eine Umgebung W_a von a, so dass $f(W_a \cap X) \subset f(a) + \bar{U}$ und $W_a \subset a + V$.

Dann für $x \in W_a \cap X$ haben wir $x \notin f(x) + \bar{U}$.

[1] J. von Neumann, Über ein ökonomisches Gleichungssystem und eine Verallgemeinerung des Brouwerschen Fixpunktsatzes, Ergebnisse eines Math. Kolloquiums Heft 8, 1935-1936, Wien.

[2] S.Kakutani, A generalization of Brouwer's fixed point theorem, Duke Math. J. 8. pp.457-459 (1941).

[3] K. Fan, Fixed point and minimax theorem in locally convex topological linear spaces, Proc. N. A. S. 38, (1952) No.2.

[4] M.Hukuhara, Sur l'existence des points d'une transformation dans l'espace fonctionnel, Jap. J. Math. Vol.XX (1950).

[5] A.Tychonoff, Ein Fixpunktsatz, Math. Ann. Bd.111, (1935).

(‡) Unter der konvexen Hülle einer Menge verstehen wir die kleinste konvexe a b g e s c h l o s s e n e Menge, die sie enthält.

Naturwissenschaftliche Hochschule zu Tokio.

(*) Received Oct. 21, 1952.