Journal of the Mathematical Society of Japan Vol. 6, No. 1, March, 1954

Zur Bildung der auflösbaren Gruppen.

Von Eizi INABA

(Eingegangen am 25, Sept. 1953)

Es sei G_0 eine auflösbare Gruppe endlicher Ordnung, und l ein Primteiler der Ordnung von G_0. G_0 hat dann einen abelschen Normalteiler H mit dem Typus $(l,\cdots,l)$, und die Faktorgruppe $G_0/H=G$ ist wieder auflösbar. Also kann G_0 als eine Erweiterung der abelschen Gruppe H nach einer auflösbaren Gruppe G mit niedrigerer Ordnung als G_0 aufgefasst werden, und jede auflösbare Gruppe endlicher Ordnung kann durch Wiederholung der Erweiterung solcher Art konstruiert werden. In einer früheren Arbeit habe ich die Struktur der auflösbaren Gruppe von diesem Standpunkt aus untersucht, und insb. den Fall betrachtet, wo die l-Sylowgruppe von G Normalteiler von G ist.[1] Die vorliegende Arbeit ist eine Fortsetzung dieser Untersuchung; jetzt soll aber solche beschränkende Bedingung beiseite galassen, und allgemeine Struktursätze für die auflösbare Gruppe aufgestellt werden.

Ist H eine abelsche Gruppe vom Typus $(l,\cdots,l)$ für eine Primzahl l, so wird eine Erweiterung $\overline{G}$ von H nach einer endlichen Gruppe G eine *l-Aufspaltung* von G genannt und mit $\overline{G}=(H,G)$ bezeichnet.[2] Hierbei entspricht jedem Element s aus G eine Linksklasse g_sH von H in $\overline{G}$. Ordnet man zu $h\in H$ das Element $g_shg_s^{-1}$ zu, so findet ein Automorphismus statt, der unabhängig von Wahl des Vertreters g_s innerhalb der Klasse durch s eindeutig bestimmt wird. Wir setzen $s(h)=g_shg_s^{-1}$ und H wird dann ein G-Linksmodul, wenn H als eine additive Gruppe mit Linksoperatoren $s\in G$ aufgefasst wird. Ist n der Rang von H und P der Primkörper von Charakteristik l, so wird jedes Element aus H als ein n-dimensionaler Spaltenvektor mit Komponenten aus P dargestellt. Der Modul H gibt eine Darstellung von G in P, indem eine Matrix $A(s)$ zu $s\in G$ zugeordnet wird, und wir können so wie $s(h)=A(s)h$ schreiben. Die $\overline{G}$ wird dann eine *l-Aufspaltung von G mit Darstellung A* genannt. Setzt man $g_sg_t=g_{st}A(s,t)$ mit

$A(s,t) \in H$, so wird die Gesamtheit aller $A(s,t)$ ein ***Faktorensystem der Aufspaltung*** genannt und mit $\{A(s,t)\}$ bezeichnet. Wenn man $A(s,t)$ als Spaltenvektoren auffasst, so gilt die Relation

$$(1) \qquad \Lambda(u^{-1})\, A(s,t) + A(st,u) = A(s,tu) + A(t,u)$$

für alle Elemente s, t, u aus G.[3] Zwei Faktorensysteme $\{A'(s,t)\}$ und $\{A(s,t)\}$ heissen *äquivalent*, wenn es für jedes s aus G ein Spaltenvektor $B(s)$ derart gibt, dass

$$A'(s,t) = A(s,t) + \Lambda(t^{-1})\, B(s) - B(st) + B(t)\,.$$

Man erhält dieses neue Faktorensystem, indem man statt g_s neue Vertreter $g_s B(s)$ der Klassen $g_s H$ wählt. Zwei l-Aufspaltungen von G mit derselben Darstellung können als identisch (bis auf Isomorphismus) angesehen werden, wenn die zugehörigen Faktorensysteme äquivalent sind. Die Änderung der Basis von H möge eine zu Λ äquivalente Darstellung $D\,\Lambda\, D^{-1}$ ergeben. Man muss hierbei das neue Faktorensystem $DA(s,t)$ statt $A(s,t)$ nehmen. Es ist wohlbekannt, dass für jede Darstellung von G mit einem zugehörigen Faktorensystem eine entsprechende l-Aufspaltung von G existiert.

N sei eine Untergruppe von G und Λ diejenige Darstellung von G, die von der Hauptdarstellung (Einsdarstellung ersten Grades) der Untergruppe N induziert wird. Man multipliziert ein Element s aus G zu Linksklassen $x_i N$, $i=1,\cdots,r$ von N in G und erhält $sx_i N = x_{i(s)} N$, wobei x_1 das Eins von G bedeutet. Dem Element s entspricht dann die Matrix $\Lambda(s) = (\lambda_{ij}(s))$. Hier ist $\lambda_{ij}(s)$ gleich Eins oder Null, je nachdem $i=j(s)$ oder $i \neq j(s)$ ist. Ist $j \neq 1$ und $s \in N$, so gilt offenbar $\lambda_{11}(s)=1$ und $\lambda_{j1}(s)=\lambda_{1j}(s)=0$. Die Basis des G-Linksmoduls H über P, die die Darstellung Λ von G erzeugt, sei $h_i, i=1,\cdots,r$. Es kommt $s(h_1)=\Lambda(s)h_1=h_1$, falls $s \in N$, und $x_i(h_1)=\Lambda(x_i)h_1=h_i$. Hieraus folgt: $s(h_i)=sx_i(h_1)=h_{i(s)}$. Wenn man eine zu N konjugierte Untergruppe $c^{-1}Nc$ nimmt, so ersieht man leicht, dass die von der Hauptdarstellung von $c^{-1}Nc$ induzierte Darstellung von G mit Λ äquivalent ist. Wir wollen im folgenden das Faktorensystem normieren. Man setze $sx_i = x_{i(s)}\varphi(i,s)$ mit $\varphi(i,s) \in N$ und erhält

$$stx_i = sx_{i(t)}\varphi(i,t) = x_{i(st)}\varphi\big(i(t), s\big)\, \varphi(i,t)\,.$$

Also haben wir $i(st)=i(t)(s)$ und

$$\tag{2} \varphi(i, st) = \varphi\big(i(t), s\big)\varphi(i, t) .$$

Mittels der Relationen (1) und (2) berechnen wir folgendermassen.

$$\begin{aligned} \Lambda(x_i^{-1})A(s, t) &= A\big(s, x_{i(t)}\varphi(i, t)\big) - A(st, x_i) + A(t, x_i) \\ &= \Lambda\big(\varphi(i, t)^{-1}\big)A(s, x_{i(t)}) + A\big(sx_{i(t)}, \varphi(i, t)\big) \\ &\quad - A\big(x_{i(t)}, \varphi(i, t)\big) - A(st, x_i) + A(t, x_i) \\ &= A\big(\varphi(i(t), s), \varphi(i, t)\big) + \Lambda\big(\varphi(i, t)^{-1}\big)A(s, x_{i(t)}) \\ &\quad - \Lambda\big(\varphi(i, t)^{-1}\big)A\big(x_{i(st)}, \varphi(i(t), s)\big) - A(st, x_i) \\ &\quad + A\big(x_{i(st)}, \varphi(i, st)\big) + A(t, x_i) - A\big(x_{i(t)}, \varphi(i, t)\big) . \end{aligned}$$

Man bezeichne mit $a_i(s, t)$ die i-te Komponente des Vektors $A(s, t)$. Durch Vergleichung der ersten Komponenten im obigen Ausdruck erhält man

$$\begin{aligned} a_i(s, t) = {} & a_1\big(\varphi(i(t), s), \varphi(i, t)\big) + a_1(s, x_{i(t)}) - a_1\big(x_{i(st)}, \varphi(i(t), s)\big) \\ & - a_1(st, x_i) + a_1\big(x_{i(st)}, \varphi(i, st)\big) + a_1(t, x_i) - a_1\big(x_{i(t)}, \varphi(i, t)\big) . \end{aligned}$$

Man bezeichne mit $A_0(s, t)$ bzw. $B(s)$ den Spaltenvektor, dessen i-te Komponente $a_1\big(\varphi(i(t), s), \varphi(i, t)\big)$ bzw. $a_1(s, x_i) - a_1\big(x_{i(s)}, \varphi(i, s)\big)$ ist. Dann erhalten wir

$$A(s, t) = A_0(s, t) + \Lambda(t^{-1})B(s) - B(st) + B(t) .$$

Hierbei ist es von Wichtigkeit, dass das normierte Faktorensystem $A_0(s, t)$ völlig durch die ersten Komponenten des auf N bezüglichen Teils von $A(s, t)$ bestimmt wird. Diese stimmen mit den ersten Komponenten von $A_0(s, t)$ überein und werden mit $a(\sigma, \tau)$ statt $a_1(\sigma, \tau)$ bezeichnet, wo σ und τ die Untergruppe N durchlaufen. Die Gesamtheit dieser Elemente $a(\sigma, \tau)$ aus P werde *Grundkomponente der l-Aufspaltung* genannt. Es gilt offenbar die Relation

$$\tag{3} a(\sigma, \tau) + a(\sigma\tau, \varphi) = a(\sigma, \tau\varphi) + a(\tau, \varphi)$$

für alle σ, τ, φ aus N. Wird umgekehrt jedem Paar σ, τ aus N ein Element $a(\sigma, \tau) \in P$ mit der Relation (3) zugeordnet, so bilde man die Spaltenvektoren $A_0(s, t)$, deren i-ten Komponenten $a\big(\varphi(i(t), s), \varphi(i, t)\big)$ sind. Man bestätigt leicht, dass $A_0(s, t)$ der Relation (1) genügen, und dass diese ein Faktorensystem einer l-Aufspaltung ausmachen. Zwei Grundkomponente $\{a(\sigma, \tau)\}$ und $\{a'(\sigma, \tau)\}$ heissen äquivalent, falls es $b(\sigma) \in P$ gibt, so dass

$$a'(\sigma, \tau) = a(\sigma, \tau) + b(\sigma) - b(\sigma\tau) + b(\tau).$$

Zwei normierte Faktorensysteme sind d. u. n. d. äquivalent, wenn ihre Grundkomponente äquivalent sind. Es sei bemerkt, dass eine solche Normierung des Faktorensystems nicht mehr möglich ist, falls die Darstellung Λ beliebig ist. Der Fall, wo die Untergruppe eine l-Sylowgruppe S von G ist, wird später besonders wichtig. Λ_0 sei die Darstellung von G, die von der Hauptdarstellung von S induziert wird. Eine l-Aufspaltung von G mit Darstellung Λ_0 soll eine *reguläre l-Aufspaltung* von G genannt werden.

HILFSSATZ 1. *Ist eine Darstellung Λ von G reduzibel in der Form*

$$\begin{pmatrix} \Lambda_1 & 0 \\ M & \Lambda_2 \end{pmatrix},$$

so wird jede l-Aufspaltung $\overline{G} = (H, G)$ mit Darstellung Λ eine l-Aufspaltung einer Gruppe G_1 mit Darstellung Λ_2, wobei G_1 wieder eine l-Aufspaltung von G mit Darstellung Λ_1 ist.

BEWEIS. H besitzt einen G-Untermodul H_2, der die Darstellung Λ_2 angibt. Dann liefert der Faktormodul H/H_2 die Darstellung Λ_1. Die Faktorgruppe $\overline{G}/H_2$ wird dann eine l-Aufspaltung $(H/H_2, G)$ mit Darstellung Λ_1.

HILFSSATZ 2. *Wenn eine Darstellung Λ von G direkt zerlegbar in der Form*

$$\begin{pmatrix} \Lambda_1 & 0 \\ 0 & \Lambda_2 \end{pmatrix},$$

und wenn $\overline{G}_1 = (H_1, G)$ eine l-Aufspaltung von G mit Darstellung Λ_1 ist, so gibt es stets eine l-Aufspaltung $\overline{G} = (H, G)$ mit Darstellung Λ und eine G-zulässige Untergruppe (G-Untermodul) H_2 von H, so dass $\overline{G}_1$ und $\overline{G}/H_2$ dieselbe l-Ausfpaltnng von G sind.

BEWEIS. $A(s, t)$ sei das Faktorensystem von $\overline{G}_1 = (H_1, G)$. Ist m bzw. n der Grad von Λ bzw. Λ_1, so denke man sich den m-dimensionalen Spaltenvektor $C(s, t)$, dessen i-te Komponente für $i \leq n$ mit der von $A(s, t)$ übereinstimmt und für $i > n$ Null ist. $C(s, t)$ wird dann ein Faktorensystem mit Darstellung Λ und liefert eine Aufspaltung $\overline{G} = (H, G)$. Dabei ist H eine direkte Summe zweier G-Untermoduln

H_i, $i=1,2$, die bzw. die Darstellung Λ_i geben. Die Faktorgruppe $\overline{G}/H_2$ wird nun eine l-Aufspaltung von G mit Darstellung Λ_1 und mit dem Faktorensystem $A(s,t)$. Folgich sind $\overline{G}_1$ und $\overline{G}/H_2$ dieselbe l-Aufspaltung.

HILFSSATZ 3. *S sei eine Gruppe, deren Ordnung Potenz einer Primzahl l ist. Jede irreduzible Darstellung Λ von S im Primkörper P von Characteristik l ist Hauptdarstellung.*

Die Richtigkeit dieses wohlbekannten Hilfssatzes erkennt man leicht aus der Tatsache, dass der S-Linksmodul über P, der die Darstellung Λ gibt, besitzt ein Element $h \neq 0$, dem die Eigenschaft, $\sigma(h)=h$ für alle $\sigma \in S$, zukommt.

HILFSSATZ 4. *Λ sei eine Darstellung einer endlichen Gruppe G in P und S eine l-Sylowgruppe von G. Indem man bei Λ nur die den Elementen aus S zugeordneten Matrizen betrachtet, erhält man eine Darstellung von S, die mit Λ_s bezeichnet werde. Die von Λ_s induzierte Darstellung von G ist äquivalent mit einer Darstellung von der Form*

$$\begin{pmatrix} \Lambda & 0 \\ 0 & * \end{pmatrix}.$$

BEWEIS. Λ_0 sei die von der Hauptdarstellung der Gruppe S induzierte Darstellung von G und h_i, $i=1,\cdots,r$ die Basis des G-Linksmoduls H über P, der Λ_0 angibt. Die Gesamtheit aller Elemente $\sum_{i=1}^{r} h_i\alpha_i$, $\alpha_i \in P$ mit $\sum_{i=1}^{r}\alpha_i=0$ bildet einen G-Untermodul H_1 vom Rang $r-1$, da die Relation $s(h_i)=h_{i(s)}$ für $s \in G$ besteht. Da der Index r von S in G zu l teilerfremd ist, gehört das Element $g=\sum_{i=1}^{r} h_i$ nicht zu H_1. Wegen $s(g)=g$ erzeugt g einen G-Untermodul H_2 vom Rang 1. Da H direkte Summe von H_1 und H_2 ist, und da H_2 die Hauptdarstellung von G liefert, so ist Λ_0 äquivalent mit einer Darstellung von der Gestalt

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & * \end{pmatrix}.$$

Nun ist nach Osima die von Λ_s induzierte Darstellung von G äquivalent mit dem Kroneckerschen Produkt von Λ und Λ_0, und folglich äquivalent mit der genannten Darstellung.[4]

HILFSSATZ 5. *Die von Λ_s induzierte Darstellung von G ist äquivalent mit einer Darstellung von der Form*

$$\begin{pmatrix} \Lambda_0 & 0 & \cdots\cdots & 0 \\ * & \Lambda_0 & \cdots\cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ * & * & \cdots\cdots & \Lambda_0 \end{pmatrix}.$$

BEWEIS. H^* sei ein G-Linksmodul, der die von Λ_s induzierte Darstellung von G liefert, und x_i, $i=1,\cdots,r$, Vertreter der Linksklassen von S in G. Der G-Modul H^* hat einen S-Untermodul H, so dass H die Darstellung Λ_s von S gibt, und dass H^* direkte Summe von x_iH, $i=1,\cdots,r$ wird, wo x_iH die Gesamtheit aller Elemente $x_i(h)$ mit $h \in H$ bedeutet. Nach Hilfssatz 3 gibt es eine Kette von S-Untermoduln $\{H_j\}$ des Moduls H, so dass alle Faktormoduln H_j/H_{j+1} Hauptdarstellung von S angeben. Für jedes Element h_j aus H_j, das nicht zu H_{j+1} gehört, gilt also $\sigma(h_j)\equiv h_j \bmod. H_{j+1}$ für alle $\sigma \in S$. Setzt man $H_j^*= x_1H_j+\cdots+x_rH_j$, so wird H_j^* ein G-Untermodul von H^*. Die Elemente $x_i(h_j)$, $i=1,\cdots,r$ bilden eine Basis des Faktormoduls H_j^*/H_{j+1}^* und liefern die Darstellung Λ_0 von G.

SATZ 1. *Für jede l-Aufspaltung $\bar{G}=(H,G)$ existiert eine solche l-Aufspaltuug $G_1=(H_1,G)$, welche von G aus durch Wiederholung der regulären l-Aufspaltungen zu Stande kommt, so dass für eine G-zulässige Untergruppe H_2 von H_1 die Faktorgruppe G_1/H_2 und die Gruppe $\bar{G}$ dieselbe l-Aufspaltung von G sind.*

BEWEIS. Ist die Aufspaltung $\bar{G}$ mit der Darstellung Λ behaftet, so erkennen wir nach Hilfssatz 4, dass die Gruppe $\bar{G}$ und eine l-Aufspaltung G_1 mit der von Λ_s induzierten Darstellung in demselben Zusammenhang wie im Hilfssatz 2 stehen. Die G_1 kann aber nach Hilfssätzen 1 und 5 durch Wiederholung der regulären l-Aufspaltungen erhalten werden, w. z. b. w.

Eine endliche Gruppe G heisse *regulär auflösbar von λ-ter Stufe*, wenn es eine Kette der Normalteiler $\{G_i\}$ von G mit folgenden Eigenschaften gibt:

(1) $G_i \supset G_{i+1}$, $G_0=G$, $G_\lambda=\{e\}$.

(2) G_0/G_1 ist zyklisch von einer Primzahlordnung.

(3) G/G_{i+1} ist eine reguläre l_i-Aufspaltung von G/G_i für eine Primzahl l_i, welche in die Ordnung von G aufgeht.

Hierbei wollen wir die Kette $\{G_i\}$ eine ***charakteristisch Reihe*** von G nennen; jede Faktorgruppe G/G_i ist dann auch offenbar regulär auflösbar. Jede Gruppe von Primzahlpotenzordnung l^λ ist regulär auflösbar von λ-ter Stufe. Dass die Stufe λ gegenüber der Wahl der charakteristischen Reihe invariant ist, erkennt man nach dem folgenden.

SATZ 2. *$G^{(1)}$ und $G^{(2)}$ seien zwei regulär auflösbare Gruppen mit derselben Ordnung. $G_i^{(1)}$, $i=0,\cdots,\lambda$ und $G_i^{(2)}$, $i=0,\cdots,\mu$ seien bzw. ihre charakteristischen Reihen. Dann ist $\lambda=\mu$ und $G_i^{(1)}/G_{i+1}^{(1)}$ isomorph zu $G_i^{(2)}/G_{i+1}^{(2)}$ für jedes i.*

BEWEIS. Ist $G^{(1)}$ von Primzahlpotenzordnung, so ist die Behauptung klar. Ist es nicht der Fall, so wähle man diejenige Primzahl l, die mit höchstem Exponent α in die Ordnung von $G^{(1)}$ aufgeht. Dann wird $G^{(1)}$ eine reguläre l-Aufspaltung von $G^{(1)}/G_{\lambda-1}^{(1)}$. Denn sonst wäre die Ordnung von $G_{\lambda-1}^{(1)}$ durch l^α teilbar und für die Ordnung l_0^β von $G_{\lambda-1}^{(1)}$ würde dann β durch l^α teilbar sein, wo l_0 eine von l verschiedene Primzahl ist. Da $\alpha\geqq\beta$ nach Wahl von l ist, so ergibt sich ein Widerspruch. Da die Ordnung von $G^{(2)}$ mit der von $G^{(1)}$ übereinstimmt, so ist $G^{(2)}$ auch eine reguläre l-Aufspaltung von $G^{(2)}/G_{\mu-1}^{(2)}$. Es folgt nun, dass beide Faktorgruppen $G^{(1)}/G_{\lambda-1}^{(1)}$ und $G^{(2)}/G_{\mu-1}^{(2)}$ regulär auflösbar mit derselben Ordnung sind, und dass $G_{\lambda-1}^{(1)}/G_\lambda^{(1)}$ und $G_{\mu-1}^{(2)}/G_\mu^{(2)}$ isomorph sind. Man beweist somit den Satz durch Induktion nach der Ordnung der Gruppen. Wir beweisen ferner den folgenden

SATZ 3. *Eine auflösbare Gruppe G ist ein homomorphes Bild einer regulär auflösbaren Gruppe.*

Beweis durch Induktion nach der Ordnung von G. H sei ein Normalteiler von G mit kleinster Ordnung. Dann ist H abelsch vom Typus $(l,\cdots,l)$ für eine Primzahl l. Nach Induktionsannahme ist die Faktorgruppe G/H ein homomorphes Bild einer regulär auflösbaren Gruppe G^*. N sei der Normalteiler von G^*, der bei diesem Homomorphismus auf dem Eins von G/H abgebildet wird. Die Gruppe G sei eine l-Aufspaltung $(H, G/H)$ mit Darstellung Λ und mit dem Faktorensystem $A(s,t)$.[5] Wird bei dem Homomorphismus $G^*\to G/H$ das Element $S^*\in G^*$ auf $s\in G/H$ abgebildet, so setzt man $\Lambda^*(s^*)=\Lambda(s)$ und erhält eine Darstellung Λ^* von G^*. Setzt man ferner $A^*(s^*,t^*)=A(s,t)$, so haben wir eine l-Aufspaltung $\overline{G}^*=(H^*,G^*)$ mit Darstellung Λ^* und mit dem Faktorensystem $A^*(s^*,t^*)$. Nun behaupten wir, dass $\overline{G}^*$ homomorph zu G ist. Die Klasse $g_\sigma H^*$ entspreche $\sigma \in N$ beim Homomorphismus $\overline{G}^* \to G^*$. Da $A^*(\sigma, \tau)=0$ für $\sigma, \tau \in N$ ist, so kommt $g_\sigma g_\iota = g_{\sigma\iota}$. $A^*(\sigma)$ ist Einheitsmatrix für $\sigma \in N$ und folglich $g_\sigma h g_\sigma^{-1} = h$ für $h \in H^*$. Da weiter $A(\sigma, s^*)=A(s^*, \sigma)=0$ für $\sigma \in N$ und $s^* \in G^*$ ist, so haben wir $g_{s^*} g_\sigma g_{s^*}^{-1} = g_{s^* \sigma s^{*-1}}$. Also bilden alle Elemente g_σ mit $\sigma \in N$ einen Normalteiler Z von $\overline{G}^*$, der zu N isomorph ist. Da die Faktorgruppe $\overline{G}^*/Z$ eine l-Aufspaltung $(H^*, G^*/N)$ mit Darstellung A und Faktorensystem $A^*(s, t)$ ist, so wird $\overline{G}^*/Z$ eine l-Aufspaltung von G/H mit derselben Darstellung und mit demselben Faktorensystem, woraus folgt, dass $\overline{G}^*/Z$ zu G isomorph ist. Da $\overline{G}^*$ zu G homomorph ist, so bleibt es übrig zu zeigen, dass $\overline{G}^*$ ein homomorphes Bild einer regulär auflösbaren Gruppe ist. Nach Satz 1 ist die l-Aufspaltung $\overline{G}^*$ von G^* ein homomorphes Bild einer Gruppe $G^{(1)}$, die von G^* aus durch Wiederholung der regulären l-Aufspaltungen erhalten wird, und $G^{(1)}$ ist offenbar regulär auflösbar, w. z. b. w.

Zum Schluss sei bemerkt, dass G homomorphes Bild einer regulär auflösbaren Gruppe ist, deren Ordnung nur aus den in die Ordnung von G aufgehenden Primzahlen besteht.

Literatur und Noten.

[1] E. Inaba, On the imbedding problem of normal algebraic number fields, Nagoya Math. J., 4 (1952), pp. 55-61.

[2] Die Terminologie „Aufspaltung" findet sich in A. Scholz, Konstruktion algebraischer Zahlkörper beliebiger Gruppe von Primzahlpotenzordnung I, Math. Z., 42 (1937).

[3] Die Relation (1) des Faktorensystems ist verschieden von der in Inaba [1], da dort $g_s g_t = A(s, t) g_{st}$ gesetzt wurde.

[4] M. Osima, Note on the Kronecker product of representations of a group, Proc. Imp. Acad. Tokyo, 17 (1941), 411-413.

[5] Man kann vornherein annehman, dass $A(1, s)=A(s, 1)=0$.