J. Math. Kyoto Univ. (JMKYAZ)
13-1 (1973) 213-216

Sur le critere jacobien de Nagata

Par

Hamat SEYDI

(Communicatel by Professor Nagata, September 4, 1972)

Dans son article: "A jacobian criterion of simple points, Illinois J. Math. 1 (1957) p. 427-432" Nagata a établi pour les localisés d'anneaux locaux noetheriens complets contenant un corps, un critère jacobien de régularité analogue au critère jacobien de régularité pour les algèbres locales essentiellement de type fini sur un corps de Zariski. En fait l'idée d'établir un critère jacobien de régularité pour les localisés d'anneaux locaux noethériens complets contenant un corps du type de celui de Zariski est de Samuel qui proposa une démonstration, qui malheureusement était fausse et c'est Nagata qui lui signala l'erreur dans sa démonstration.

Depuis la parution de l'article de Nagata, on a cherché à démontrer des critères analogues pour certains types d'anneaux comme par exemple les localisés d'anneaux quotients d'anneaux de séries convergentes à n variables sur un corps value (Nagata-Grothendieck-Dieudonne). On se rend d'ailleurs compte, en étudiant les anneaux excellents, que pour établir que les anneaux quotients de certains anneaux réguliers sont excellents, il suffit d'établir des critères jacobiens du type de celui de Zariski; C'est le cas par exemple des complétés pour une topologie linéaire des algèbres de type fini sur un corps ou des anneaux de séries restreintes sur un anneau local noéthérien complet contenant un corps.

Dans cet article, on se propose d'énoncer des critères jacobiens de régularité pour les localisés d'anneaux quotients de certains anneaux locaux réguliers excellents contenant un corps qui généralisent le critère jacobien de Nagata.

Nous commencerons par le suivant:

Theoreme 1. *Soient k un corps de caractéristique 0, A une k algèbre locale régulière, $\mathfrak{M}$ l'idéal maximal de A et $k=A/\mathfrak{M}$ le corps résiduel de A.*

$$\textit{Soient } \mathfrak{A}=\sum_{i=1}^{m} f_iA \textit{ un idéal de } A, \mathfrak{p}\in Ass_A(A/\mathfrak{A}),$$

$\mathfrak{Q}$ un idéal premier de A contenant $\mathfrak{p}$ et $R=A\mathfrak{Q}$. On suppose satisfaites les deux conditions suivantes:

(i) *L'homomorphisme canonique $k\rightarrow K$ fait de K une extension algébrique de k.*

(ii) $\mathrm{rang}_L(\mathrm{Der}(A, A)\otimes_A L)=\dim(A)$, *ou L désigne le corps des fractions de A.*

Alors pour que $R/\mathfrak{A}R$ soit un anneau local régulier, il faut et suffit qu'il existe $s(=ht(\mathfrak{p}))$ k-dérivations $D_1, \cdots, D_s$ de A dans A telles que $\mathrm{rang}((D_jf_i) \bmod \mathfrak{Q})=s=ht(\mathfrak{p})$

La démonstration de ce théorème est, à quelques difficultés techniques près, la même que celle du critère jacobien de Nagata en caractéristique 0 (cf [5] 46.3 p 196). D'ailleurs le théorème 1 et le critère jacobien de Nagata en caractéristique 0 sont équivalents.

Remarque (1.1). Les anneaux locaux réguliers A contenant un corps k de caractéristique 0 tels que les conditions (i) et (ii) de soient satisfaites sont excellents. Matsumura a établi ce fait lorsque $k\simeq K$, mais en fait on se ramène à ce cas par henselisation. De ce fait il est facile de voir que le résultat précédent de Matsumura est aussi équivalent au théorème 1.

Comme application du théorème 1, on peut prouver les résultats suivants:

Theoreme (1.2). *Soient k un corps de caractéristique* 0 *et A une k algèbre locale régulière. On suppose que $\Omega^1_{A/K}$ est un A-module* *de type fini. Alors A est un anneau excellent.*

Theoreme (1.3). *Tout anneau de séries restreinte à un nombre fini de variables sur un anneau local noethérien complet (muni de la topologie définie par son idéal maximal) contenant un corps de caractéristique* 0 *est un anneau excellent.*

Le théorème suivant de Nagata est un corollaire du théorème 1:

Theoreme (1.4). *Soient K un conps value de caractéristique* 0 *et $A=K\{\{T_1,\cdots T_n\}\}$ l'anneau des séries convergentes à n variables sur K.*

Soient $\mathfrak{A}=\sum_{i=1}^{m} f_i A$ un idéal de A, $\mathfrak{p}\in Ass_A(A/\mathfrak{A})$, $\mathfrak{Q}$ un idéal premier de A contenant $\mathfrak{p}$ et $R=A_{\mathfrak{Q}}$.

Alors pour que $R/\mathfrak{A}R$ soit un anneau local régulier, il faut et il suffit que rang $((\partial f_i/\partial T_j)$ mod $\mathfrak{Q})=ht(\mathfrak{p})$.

On peut d'ailleurs démontrer beaucoup d'autres critères jacobiens à partir du théorème 1.

En caractéristique $p\neq 0$, on a le

Theoreme 2. *Soient k un corps de caractéristique $p\neq 0$, A une k algèbre locale régulière, $\mathfrak{M}$ l'idéal maximal de A et $k=A/\mathfrak{M}$ le corps résiduel de A. Soient $\mathfrak{A}=\sum_{i=1}^{m} f_i A$ un idéal de A, $p\in Ass_A(A/\mathfrak{A})$, $\mathfrak{Q}$ un idéal premier de A contenant $\mathfrak{p}$ et $R=A_{\mathfrak{Q}}$. On suppose que A est excellent et $[K: K^p]<+\infty$ ou ce qui revient au même l'homomorphisme canonique $A^p\to A$ est fini (cf [7] 2.1 et 3.3.)*

Alors pour que $R/\mathfrak{A}R$ soit un anneau local régulier, il faut et il suffit existe $s(=ht(\mathfrak{p}))$ dérivations $D_1,\cdots,D_s$ de A dans A telles que rang$((D_j f_i)$ mod $(\mathfrak{Q})=ht$ $(\mathfrak{p})$.

La démonstration de ce théorème s'appuie sur celle du critère jacobien de Nagata, elle est beaucoup plus simple que celle du théorème 1. Comme application on a le résultat suivant dû à Nagata Grothendieck et Dieudonne.

Thereme (2. 1). *Soient K un corps valué quasi complet (cf [3] §6 p. 188) de caractéristique $p\neq 0$ tel que $[K : K^p] < +\infty$ et $A = K\{\{T_1 \cdots T_n\}\}$ l'anneau des séries convergents à n variables sur K.*

Soient $\mathfrak{A} = \sum f_i$ A un idéal de A, $\mathfrak{p} \in Ass_A(A/\mathfrak{A})$, $\mathfrak{Q}$ un idéal premier de A contenant $\mathfrak{p}$ et $R = A_{\mathfrak{Q}}$.

Alors pour que $R/\mathfrak{A}R$ soit un anneau local régulier, il faut et il suffit qu'il existe $s (= ht(\mathfrak{p}))$ dérivations $D_1, \cdots, D_s$ de A dans A telles que rang $((D_j f_i) \bmod \mathfrak{Q}) = ht(\mathfrak{p})$.

Nagata ([5] 46. 3 p. 196) affirme que le théorème (2. 1) est vrai sans l'hypothèse sur K. Malheureusement sa démonstration s'appuie sur la proposition 46. 2 de [5] p. 195 qui est vraisemblement fausse si $A = K\{\{T_1, \cdots, T_n\}\}$ puispue pour un sous corps K' *de* K contenant K^p tel que $[K : K'] < +\infty$ on n'a pas nécessairement $A = K'\{\{T_1, \cdots, T_n\}\}[K]$ même si K est complet, comme on le voit en prenant pour K le corps des fractions de l'anneau valuation discrète complet V^* de ([5] E 3. 3 p. 207). Cependant l'énoncé de ([5] 46. 3 p. 196) est correct lorsqu'il existe un sous anneau de séries convergentes sur K de $A/\mathfrak{Q}$ soit A' tel que $A' \rightarrow A/\mathfrak{Q}$ soit fini et que le corps des fraction de $A/\mathfrak{Q}$ soit une extension sèparable de celui de A'.

Département de Mathématiques
Faculté des Sciences
Université de Dakar

Bibliographie

[1] A. Grothendieck et J. Dieudonne: Eléments de Géomètrie algèbrique, chap, O. IV Paris, P. U. F. n° 20 (1964).
[2] A Grothendieck et J. Dieudonne: Eléments de Géomètrie Algèbrique, chap. IV, Paris, P. U. F. n° 24 (1966).
[3] L Gerritzen: Erweiterungsendliche Ringe in der nichtarchimedischen Funktionentheorie, Inv. Math. 2 p. 178–190 (1967)
[4] H. Matsumura: Commutative Algebra, W. A. BENJAMIN, New-York.
[5] M. Nagata: Local Rings, Interscience Tracts, n° 13, New-York (1962).
[6] M. Nagata: A Jacobian Criterion of Simple Points, Illinois J. Math. 1 (1957) p. 427–432.
[7] H. Seydi: Sur une note d'Ernst Kunz. C. R. Acad. Sc. Paris **t 247** (1972) p. 714–716.
[8] H. Serdi: Sur la théorie des anneaux de Weierstrass 11 (à paraitre).