SUR QUELQUES PROPRIÉTÉS ARITHMÉTIQUES DE CERTAINES FONCTIONS TRANSCENDANTES.

PAR

E. STRIDSBERG

à STOCKHOLM.

CHAPITRE I.

Introduction.

L'étude suivante sur les propriétés arithmétiques de certaines fonctions transcendantes a pour origine et pour base essentielle d'une part les célèbres recherches concernant la transcendance des nombres e et π qui ont été faites par HERMITE, LINDEMANN, WEIERSTRASS et autres ainsi que les méthodes suivies par ces savants, d'autre part les recherches très intéressantes sur les propriétés arithmétiques des intégrales de certaines équations différentielles linéaires qu'on doit à MM. HURWITZ et BENDIXSON et où l'on retrouve sous une forme nouvelle certaines conséquences jusqu'ici peu observées de la preuve de l'irrationalité des nombres e et π donnée par LAMBERT et LEGENDRE.

Dans un mémoire célèbre, HERMITE a démontré la proposition suivante:[1]

Désignons par $E(x)$ la fonction exponentielle. Soient $x_0 x_1 \ldots x_n$ des nombres rationnels inégaux d'ailleurs arbitraires, et soient $C_0 C_1 \ldots C_n$ des nombres rationnels quelconques, avec $C_0 \neq 0$. Il ne pourra jamais exister une relation de la forme:

$$(1) \qquad \sum_0^n {}_k C_k E(x_k) = 0.$$

[1] HERMITE: Sur la fonction exponentielle. Compt. rend. t. 77. 1873.

Cette proposition est, comme je montrerai dans ce travail, applicable aussi à certaines fonctions d'un type plus général que la fonction exponentielle.

Or, pour cette dernière fonction elle offre, comme on le sait, un intérêt tout à fait particulier.

En effet, comme, d'après le théorème d'addition pour la fonction exponentielle, on aura

$$E(x_k) = e^{x_k},$$

il s'ensuit que e ne peut être la racine d'une équation algébrique à coefficients rationnels, c'est-à-dire que e doit être, selon la terminologie de M. KRONECKER, un nombre transcendant.

En partant des recherches précitées, M. LINDEMANN a le premier établi que π est aussi un nombre transcendant.

Je me permettrai dans ce qui suit de désigner par *le théorème de Lindemann* la proposition suivante:

Soient $\xi_1 \ldots \xi_m$ les racines d'une équation algébrique. Si $x_0 x_1 \ldots x_n$ désignent des nombres rationnels ou des expressions linéaires dans $\xi_1 \ldots \xi_m$ à coefficients rationnels, avec $x_i \neq x_k$ pour $i \neq k$, si $C_0 C_1 \ldots C_n$ sont des nombres rationnels, n'étant pas tous égaux à zéro, et si l'expression

$$\sum_0^n{}_k C_k E(x_k)$$

est symétrique dans $\xi_1 \ldots \xi_m$, il ne peut exister une relation de la forme

$$\sum_0^n{}_k C_k E(x_k) = 0. \tag{1}$$

WEIERSTRASS a donné une transformation extrêmement intéressante des démonstrations fournies par HERMITE et LINDEMANN et développé les recherches de ce dernier.[1]

En s'appuyant sur le théorème d'addition, WEIERSTRASS finit par démontrer la proposition générale suivante, énoncée sans démonstration par M. LINDEMANN:

Théorème. *Si l'on a une relation de la forme*

$$\sum_0^n{}_k C_k E(x_k) = 0 \qquad (x_0 \neq x_i, \text{ pour } i \neq 0, \text{ et } C_0 \neq 0), \tag{1}$$

les nombres $C_0 C_1 \ldots C_n$, $x_0 x_1 \ldots x_n$ ne peuvent être tous algébriques.

[1] WEIERSTRASS: Zu Lindemann's Abhandlung Ueber die Ludolph'sche Zahl. Sitz. ber. der Ak. d. Wissensch. zu Berlin, 1885, p. 1067—1085. (Voir aussi: Mathematische Werke von K. Weierstrass, Band 2, p. 341—362).

Du moment que, par exemple, $e^{\pi i}$ est un nombre algébrique, π ne peut être un nombre algébrique.

Parmi les autres transformations de cette preuve faites après WEIERSTRASS, je ne rappellerai que celle de HILBERT-HURWITZ-GORDAN[1] qui, surtout dans la forme que GORDAN y a donnée, a été d'une importance capitale pour mes études. Ces études nécessitant chez le lecteur la connaissance de la preuve de GORDAN, je crois devoir en donner ici un exposé sommaire.

GORDAN introduit un caractère h avec la signification symbolique suivante:

h^r désignera toujours $\underline{|r}$, r étant un entier quelconque ≥ 0;

$h^\mu . h^\nu$ ne signifiera pas $\underline{|\mu} . \underline{|\nu}$, mais $h^{\mu+\nu}$, c.-à.-d. $\underline{|\mu + \nu}$, et, par suite, $\frac{h^\mu}{h^\nu}$ ne signifiera jamais $h^{\mu-\nu}$ mais le quotient de $\underline{|\mu}$ par $\underline{|\nu}$;

$(x + h)^r$ sera défini par la formule du binôme, à savoir

$$\frac{(x+h)^r}{\underline{|r}} = \sum_0^r{}^\mu \frac{x^\mu}{\underline{|\mu}} \frac{h^{r-\mu}}{\underline{|r-\mu}} = \sum_0^r{}^\mu \frac{x^\mu}{\underline{|\mu}} .$$

Par conséquent, $f(x)$ désignant une fonction rationnelle entière quelconque, soit de dégré m, $f(x + h)$ sera défini par la série de TAYLOR, savoir

$$f(x+h) = \sum_0^m{}^\mu \frac{h^\mu}{\underline{|\mu}} f^\mu(x) = \sum_1^m{}^\mu f^\mu(x) .$$

Cela posé, GORDAN a, de la manière suivante, démontré directement, en partant de la série exponentielle, le théorème d'HERMITE regardant la transcendance du nombre e.

Si l'on arrête ladite série à un terme arbitraire, soit au terme $(r + 1)^{\text{me}}$, on obtiendra

$$E(x) = \sum_0^r{}^\mu \frac{x^\mu}{\underline{|\mu}} + \frac{x^r}{\underline{|r}} \chi_r(x) = \frac{(x+h)^r}{\underline{|r}} + \frac{x^r}{\underline{|r}} \chi_r(x) ,$$

où l'on aura $|\chi_r(x)| < E(|x|)$ et par suite

$$(2') \qquad h^r E(x) = (x+h)^r + \lambda_r(x) x^r E(|x|) \qquad |\lambda_r(x)| < 1 .$$

Soit

$$f(x) = \frac{(x - x_0)^{p-1}}{\underline{|p-1}} \prod_0^n{}^i (x - x_i)^p = \sum_0^m{}^\nu a_\nu \frac{x^\nu}{\underline{|\nu}} ,$$

[1] HILBERT: Ueber die Transcendenz der Zahlen e und π. — HURWITZ: Beweis der Transcendenz der Zahl e. — GORDAN: Transcendenz von e und π. — Toutes ces trois notes se retrouvent dans les Math. Annalen, tome 43, 1893.

et mettons

$$\varphi(x) = \sum_0^m {}^\nu a_\nu \lambda_\nu(x) \frac{x^\nu}{\underline{|\nu}},$$

nous aurons

$$f(h) E(x) = \frac{(x - x_0 + h)^{p-1}}{\underline{|p-1}} \prod_1^n {}^i (x - x_i + h)^p + \varphi(x) E(|x|),$$

d'où l'on tire

$$(2) \qquad f(h) \sum_0^n {}^k C_k E(x_k) = A + B + C,$$

où j'ai posé, pour abréger,

$$A = C_0 \frac{h^{p-1}}{\underline{|p-1}} \prod_1^n {}^i (x_0 - x_i + h)^p$$

$$B = \sum_1^n {}^k C_k \frac{(x_k - x_0 + h)^{p-1} h^p}{\underline{|p-1}} \prod_1^n {}^{i\,\prime} (x_k - x_i + h)^p$$

$$C = \sum_0^n {}^k C_k \varphi(x_k) E(|x_k|).$$

On aura évidemment

$$|\varphi(x)| < \sum_0^m {}^\nu \left| a_\nu \frac{x^\nu}{\underline{|\nu}} \right|.$$

Le dernier terme (C) du membre droit de l'équation (2) est donc, pour des valeurs de p assez grandes, d'une valeur numérique inférieure à 1. Soient maintenant $x_0 x_1 \ldots x_n$ $C_0 C_1 \ldots C_n$ des entiers quelconques; les deux autres termes (A et B) seront de même des entiers, dont B sera divisible par p.

En admettant que le membre gauche soit égal à zéro, C doit de même se réduire à un nombre entier, et l'on aura, pour des valeurs de p assez grandes, $C = 0$, d'où

$$A + B = 0,$$

et, par suite, A sera de même divisible par p.

Or, l'on aura

$$A \equiv C_0 \prod_1^n {}^i (x_0 - x_i)^p \qquad \text{(mod. } p).$$

Supposons le produit

$$K = \left| C_0 \prod_1^n {}_i (x_0 - x_i) \right| \neq 0.$$

Si donc p est un nombre premier assez grand et $> K$, A ne pourra pas être divisible par p, et, par suite, le membre gauche de l'équation (2) ne peut s'annuler. *C. Q. F. D.*

Par la voie indiquée par WEIERSTRASS, cette preuve se laisse généraliser jusqu'à embrasser la proposition de LINDEMANN. Les idées directrices d'une pareille preuve étendue se retrouvent — sous une forme adaptée aux besoins de la démonstration — dans les recherches du chapitre II § 3 de ce mémoire.

LAMBERT est, comme on le sait, le premier qui ait d'une manière rigoureuse établi *l'irrationalité* des nombres e et π, et sa démonstration a été plus tard développée par LEGENDRE.[1]

LEGENDRE étudie la fonction suivante

$$\varphi(z) = \sum_0^\infty {}_\nu \frac{a^\nu}{\lfloor \nu f_\nu(z)},$$

où l'on aura

$$f_\nu(z) = \prod_0^{\nu-1} {}_\lambda (z + \lambda) \qquad (f_0(z) = 1).$$

On obtient par des calculs élémentaires cette belle formule de développement en fraction continue:

$$\frac{a}{z} \frac{\varphi(z+1)}{\varphi(z)} = \begin{bmatrix} a \\ k+z \end{bmatrix}. \tag{3'}$$[2]

Or, d'après un théorème de LEGENDRE devenu classique dans la théorie des fractions continues, il ne peut arriver, quelles que soient les valeurs données ra-

---

[1] LAMBERT: Vorläufige Kentnisse für die, so die Quadratur und Rectification des Circuls suchen. Beyträge z. Gebrauche der Mathematik u. deren Anwendung. II, p. 140—169. Berlin 1770. (Le mémoire a été écrit en 1766.) — LEGENDRE: Eléments de géométrie. Note 4. 1re édition, Paris 1794—35me éd., ib. 1900. — Les deux mémoires ont été littéralement reproduits dans l'oeuvre de M. F. RUDIO: Archimedes, Huygens, Lambert, Legendre. Vier Abhandlungen über die Kreismessung. Leipzig, Teubner. 1892.

[2] J'emploie ici et dans ce qui suit la notation connue $\begin{bmatrix} \alpha_k \\ \beta_k \end{bmatrix}$ pour représenter une fraction continue de la forme:

$$\cfrac{\alpha_0}{\beta_0 + \cfrac{\alpha_1}{\beta_1 + \ddots}}$$

tionnelles de a et de z, que la fraction continue ci-dessus obtenue se réduise à un nombre rationnel.[1]

Cette proposition remarquable établie par LEGENDRE peut évidemment être exprimée encore sous la forme suivante:

Désignons par c une constante arbitraire, et introduisons

$$b = cz, \quad x = ca.$$

Si l'on considère $\varphi(z)$ comme fonction de x — avec les paramètres b et c — soit

$$\varphi(z) = V(x / c, b),$$

on aura

$$\varphi(z + 1) = b V'(x / c, b),$$

d'où

(3) $$cx \frac{V'(x)}{V(x)} = c\left[\frac{a}{k + z}\right] = \left[\frac{cx}{kc + b}\right],$$

et l'on pourra formuler de la manière suivante *le théorème de Legendre:*

b et c étant des nombres rationnels quelconques, désignons par k_b^ν le produit

$$k_b^\nu = \prod_0^{\nu-1}{}_\lambda (b + c\lambda) \qquad (k_b^0 = 1)$$

et posons

$$V(x) = \sum_0^\infty{}_\nu \frac{x^\nu}{k_b^\nu \lfloor \nu};$$

la dérivée logarithmique de $V(x)$ ne peut jamais avoir une valeur rationnelle pour des valeurs rationnelles de l'argument différentes de zéro.

En remplaçant b par 2 et c par 4, on aura

$$V(x^2) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}, \quad V(-x^2) = \cos x,$$

d'où l'on tire, comme cas spécial, *le théorème de Lambert:*

e^x et x ainsi que $tg\, x$ et x ne peuvent être simultanément rationnels, sauf le cas où $x = 0$. Par suite, $tg \frac{\pi}{4}$ étant rationnel, π doit être irrationnel.

Dans le cas général, $V(x)$ représentera évidemment une fonction entière, intégrale particulière d'une équation différentielle de BESSEL, à savoir de l'équation

[1] Une autre propriété intéressante de cette fraction continue me paraît digne d'une mention en passant: c'est qu'elle représentera une fonction de z qui ne satisfera à aucune équation différentielle algébrique.

(4) $$cxV_2 + bV_1 - V = 0. \qquad \left(V_\mu = \frac{d^\mu V}{dx^\mu}\right).$$

Sous cette dernière forme le théorème de LEGENDRE a été trouvé pour la première fois par M. HURWITZ et — indépendamment — aussi par M. BENDIXSON.[1]

Les mémoires de M. HURWITZ consacrés à ce sujet ont été publiés dans les Math. Annalen sous le titre »Ueber arithmetische Eigenschaften gewisser transcendenter Functionen I (Band 22, 1882) und II (Band 32, 1888).»

Le dernier de ces mémoires a été provoqué par un article de M. RATNER,[2] où l'auteur cherche à employer les méthodes de M. HURWITZ pour étudier même des équations différentielles linéaires plus générales que celle que nous avons indiquée ci-dessus par (4).

A ce propos, M. HURWITZ fournit une nouvelle preuve du théorème de LEGENDRE, preuve qui, comme il le fait comprendre lui-même, n'est qu'une transcription de la preuve de LEGENDRE, mais qui offre l'avantage d'être applicable dans une certaine mésure à des fonctions d'un type plus général.

Soit r une constante arbitraire, nous aurons

$$V(x/c,\ b) = V(rx/rc,\ rb),$$

et, par suite, nous pouvons nous borner au cas où x, b et c désignent des nombres entiers.

Désignons par $\frac{\psi_\mu}{\varphi_\mu}$ la réduite $\mu^{\text{ième}}$ de la fraction continue (3), nous aurons évidemment

$$(-1)^\mu c^\mu x^\mu V_\mu = V\psi_\mu - cxV_1\varphi_\mu \qquad (\mu = 0, 1, 2 \ldots \text{ad inf.}).$$

ψ_μ et φ_μ doivent être des polynômes rationnels de x, b et c à coefficients entiers.

Cela posé, si $V_1 : V$ se réduit à un nombre rationnel, soit

$$V = k_0\varrho \text{ et } V_1 = k_1\varrho,$$

où k_0 et k_1 désignent des nombres entiers ou nuls, on obtiendra

(5) $$c^\mu x^\mu V_\mu = k_\mu\varrho, \text{ avec } k_\mu \text{ entier.}$$

A partir d'une certaine valeur de μ, soit pour $\mu \geq \lambda$, le membre gauche de (5) doit être inférieur en valeur numérique à une quantité donnée quelconque ϱ,

[1] BENDIXSON: Sur les équations différentielles linéaires à solutions périodiques. Kungl. Vetensk. Akad. Öfversikt. Stockholm 1896. — On trouvera dans ce mémoire le théorème de LEGENDRE appliqué, d'une manière fort intéressante, à l'étude des solutions périodiques de certaines équations différentielles linéaires.

[2] RATNER: Ueber eine Eigenschaft gewisser linearer irreductibler Differentialgleichungen. Math. Ann. Band 32. 1888.

c'est-à-dire, en d'autres termes, que le nombre entier $|k_\mu|$ doit être < 1, et, par conséquent, on aura

$$k_\mu = 0 \text{ et de même } V_\mu = 0, \text{ pour } \mu \geq \lambda.$$

On aura donc pour V une fonction rationnelle de x, ce qui est impossible.

La proposition énoncée se trouve donc démontrée.

M. HURWITZ cherche ensuite — et réussit jusqu'à un certain point — à étendre cette démonstration à des fonctions d'un type plus général, entre autres à certaines séries hypergéométriques généralisées.[1]

C'est surtout les idées exprimées dans ce dernier mémoire de M. HURWITZ qui m'ont fait entreprendre les recherches publiées dans les chapitres suivants de ce travail.

Dans le chapitre II je continuerai les recherches commencées par LEGENDRE et HURWITZ sur certaines fonctions de BESSEL; le chapitre III sera consacré à des fonctions un peu plus générales.

CHAPITRE II.

Sur quelques propriétés arithmétiques de certaines fonctions de Bessel.

§ 1. Nous étudierons d'abord l'équation différentielle qui fait l'objet des recherches de M. HURWITZ, à savoir

$$cx\frac{d^2y}{dx^2} + b\frac{dy}{dx} - y = 0. \tag{1}$$

Nous ferons pour le moment à l'égard des coefficients de cette équation seulement cette supposition que $c \neq 0$. (Si $c = 0$, l'équation (1) se transforme en effet, comme on le voit, dans l'équation différentielle de la fonction exponentielle).

Désignons par $k_b^\nu(c)$ ou, plus brièvement encore, par k_b^ν le produit

$$k_b^\nu = b(b + c)\ldots(b + \overline{\nu - 1}\, c),$$

l'indice ν étant ≥ 1, et soit pour $\nu = 0$: $k_b^0 = 1$.

[1] HURWITZ loc. cit. — Voir aussi p. 272 et suivantes de ce travail.

Les intégrales particulières de l'équation (1) sont

$$(2)\qquad \begin{cases} V(x/c,b) = \sum_0^\infty{}_\nu \dfrac{x^\nu}{k_b^\nu \lfloor \nu}, \text{ et} \\ \overline{V}(x/c,b) = x^{1-\frac{b}{c}} V(x/c, -b+2c). \end{cases}$$

On aura évidemment tous les coefficients $k_b^\nu \neq 0$, sauf le cas où b est un multiple de $-c$, soit pour $b = -\lambda c$ (λ désignant un nombre entier ≥ 0).

Dans ce cas, on trouve en effet

$$\left.\begin{array}{r} \text{pour } \nu \leq \lambda\colon\ k_b^\nu = (-c)^\nu \dfrac{\lfloor \lambda}{\lfloor \lambda - \nu} \\ \text{et pour } \nu > \lambda\colon\ k_b^\nu = 0. \end{array}\right\}$$

Par conséquent, $V(x/c,b)$ a évidemment toujours un sens déterminé pour $b \neq -\lambda c$, et représente une fonction entière. Si, d'autre part, $b = -\lambda c$, l'autre intégrale $\overline{V}(x/c,b)$ représentera à son tour une fonction entière.

La dérivée $n^{\text{ième}}$ de V sera évidemment

$$V_n(x/c,b) = \frac{1}{k_b^n} V(x/c, b+nc).$$

Nous pouvons donc restreindre l'étude arithmétique des intégrales de l'équation différentielle (1) et de toutes leurs dérivées à l'examen des fonctions $V(x/c,b)$ $\quad (b \neq \lambda c)$.

Avant d'aborder cette étude, je crois utile d'établir concernant les coefficients k_b^ν quelques lemmes élémentaires, dont je ferai, dans ce qui suit, un usage fréquent.

Je donnerai d'abord au caractère k_b une signification symbolique analogue à celle qu'a donnée M. Gordan au caractère h (voir ci-dessus p. 235), de sorte que

$k_b^\mu . k_b^\nu$ désignera toujours $k_b^{\mu+\nu}$, c.-à.-d. le produit

$$b(b+c)\ldots.(b+\overline{\mu+\nu-1\,c}),$$

et non pas le produit de k_b^μ et de k_b^ν,

$(x+k_b)^r$ sera défini par la formule du binôme, à savoir

$$\frac{(x+k_b)^r}{\lfloor r} = \sum_0^r{}_\mu \frac{k_b^\nu}{\lfloor \nu} \frac{x^{r-\nu}}{\lfloor r-\nu}, \text{ etc.}$$

Cela posé, j'établirai les propositions suivantes:

Lemme I: a, b et c désignant des quantités arbitraires et r étant un entier positif quelconque, on aura toujours

$$(k_a + k_b)^r = k^r_{a+b}$$

(k^r_a *désignant* $k^r_a(c)$, $k^r_b = k^r_b(c)$, $k^r_{a+b} = k^r_{a+b}(c)$.)

Pour $r = 0$ et pour $r = 1$, la proposition est évidente.

Supposons dès lors, que r soit un entier quelconque > 1.

On aura

$$(k_b + k_a)^r = \underline{|r-1}\sum_0^{r-1}{}^{\nu}\left(\frac{k_b^{\nu+1}}{\underline{|\nu}}\frac{k_a^{r-1-\nu}}{\underline{|r-1-\nu}} + \frac{k_b^{\nu}}{\underline{|\nu}}\frac{k_a^{r-\nu}}{\underline{|r-1-\nu}}\right) =$$

$$= \underline{|r-1}\sum_0^{r-1}{}^{\nu}(a + b + c\overline{r-1})\frac{k_b^{\nu}}{\underline{|\nu}}\frac{k_a^{r-1-\nu}}{\underline{|r-1-\nu}} =$$

$$= (a + b + c\overline{r-1})(k_b + k_a)^{r-1},$$

d'où

$$\frac{(k_b + k_a)^r}{k^r_{b+a}} = \frac{(k_b + k_a)^{r-1}}{k^{r-1}_{b+a}} = \cdots = \frac{k_b + k_a}{k_{b+a}} = 1. \qquad C.\ Q.\ F.\ D.$$

Ce lemme élémentaire, qui a été trouvé probablement pour la première fois par VANDERMONDE, subsistera même en cas d'évanouissement de l'un ou de l'autre des termes de la série donnée pour $(k_b + k_a)^r$ ou de tous ces termes.

On en déduit comme corollaire cette autre proposition:

Lemme II: Soit

$$f(x) = \sum_0^m{}^{\nu} a_\nu x^\nu$$

une fonction rationnelle entière quelconque, et mettons

$$f(k_b) = \sum_0^m{}^{\nu} a_\nu k_b^\nu,$$

nous aurons

$$f(k_{a+b}) = \sum_0^m{}^{\nu}\frac{k_a^\nu}{\underline{|\nu}}f^\nu(k_b) = h(k_b),$$

où l'on aura mis

$$h(x) = \sum_0^m{}^{\nu}\frac{k_a^\nu}{\underline{|\nu}}f^\nu(x).$$

On trouvera de même pour les dérivées d'un ordre quelconque

$$f^r(k_{a+b}) = \sum_0^m{}^{\nu} \frac{k_a^\nu}{\underline{|\nu}} f^{\nu+r}(k_b) = h^r(k_b).$$

Lemme III. Si l'on donne à b et à c des valeurs entières, r et ν désignant des entiers positifs quelconques, soit, pour préciser, $0 \leq \nu \leq r$, on aura

$$\frac{c^\nu k_b^r}{\underline{|\nu} k_b^{r-\nu}} = \textit{nombre entier}.$$

En effet, comme

$$k_b^r(-c) = (-1)^r k_{-b}^r(c),$$

il n'y a lieu de s'occuper que des valeurs positives de c.

La formule

$$c^{\nu-1}\frac{k_b^\nu}{\underline{|\nu}} = \text{nombre entier}$$

est évidente pour $\nu = 1$ et pour $\nu = 2$, et pourra encore être démontrée pour $\nu \geq 3$ par déduction de $r-1$ à r.

Supposons, en effet, que ladite formule soit vraie pour $1 \leq \nu \leq r-1$, et désignons par α un entier quelconque ≥ 0.

On aura

$$c^{r-2}(k^r_{b\overline{\alpha+1}} - k^r_{b\alpha}) = c^{r-2}k_b^r + \underline{|r}\sum_1^{r-1}{}^{\nu} c^{\nu-1}\frac{k^\nu_{b\alpha}}{\underline{|\nu}}\cdot c^{r-1-\nu}\frac{k_b^{r-\nu}}{\underline{|r-\nu}},$$

d'où

$$c^{r-2}(k^r_{b\overline{\alpha+1}} - k^r_{b\alpha}) \equiv c^{r-2}k_b^r \qquad (\text{mod. } \underline{|r})$$

et, par suite,

$$c^{r-2}k^r_{bc} = c^{r-2}\sum_0^{c-1}{}^{\alpha}(k^r_{b\overline{\alpha+1}} - k^r_{b\alpha}) \equiv c^{r-1}k_b^r \qquad (\text{mod. } \underline{|r}).$$

Or, étant

$$c^{r-2}k^r_{bc} = c^{2r-2}k_b^r(1) \equiv 0 \qquad (\text{mod. } \underline{|r}),$$

on aura de même

$$c^{r-1}k_b^r \equiv 0 \quad (\text{mod. } \underline{|r}), \text{ pour } r \geq 1.$$

Cela établi, on aura encore

$$\frac{c^{\nu-1}k_b^r}{\underline{|\nu}k_b^{r-\nu}} = \frac{c^{\nu-1}}{\underline{|\nu}}k^\nu_{b+c\overline{r-\nu}} = \text{nombre entier, pour } 1 \leq \nu \leq r.$$

A fortiori, on trouvera

$$\frac{c^\nu k_b^r}{\underline{|\nu} k_b^{r-\nu}} = \text{nombre entier},$$

et cette formule restera vraie encore pour $\nu = 0$. *C. Q. F. D.*

La formule

$$\frac{c^{r-1} k_b^r}{\underline{|r}} = \text{nombre entier, pour } r \geq 1,$$

se déduit aisément comme un cas spécial du célèbre théorème d'EISENSTEIN concernant les coefficients du développement en série de TAYLOR d'une fonction algébrique.

On trouve en effet

$$(1 - c^2 x)^{-b/c} = \sum_0^\infty {}_\nu \frac{c^\nu k_b^\nu}{\underline{|\nu}} x^\nu.$$ [1]

J'ai préféré toutefois conserver la démonstration très-élémentaire donnée ci-dessus sans supposer connues les recherches d'EISENSTEIN.

On aura, comme conséquence immédiate du lemme III, la proposition suivante:

Lemme IV. Soient $\alpha^0 \alpha^1 \ldots \alpha^\mu, \beta^0 \beta^1 \ldots \beta^\mu$ ainsi que a, b et c des nombres entiers quelconques. J'introduis, pour abréger, la notation suivante:

$$\varphi = \frac{k_a^{r+\mu} k_b^{s+\mu}}{k_a^r k_b^s} \left(\frac{\alpha}{k_a} + \frac{\beta}{k_b}\right)^\mu = \underline{|\mu} k_a^{r+\mu} k_b^{s+\mu} \sum_0^\mu {}_\nu \frac{\alpha^\nu}{k_a^{r+\nu} \underline{|\nu}} \cdot \frac{\beta^{\mu-\nu}}{k_b^{s+\mu-\nu} \underline{|\mu - \nu}},$$

μ, r et s désignant des entiers positifs; on a toujours

$$\frac{c^\mu}{\underline{|\mu}} \varphi = \textit{nombre entier.}$$

En effet, chaque terme de la série

$$\sum_0^\mu {}_\nu \alpha^\nu \beta^{\mu-\nu} \cdot \frac{c^{\mu-\nu} k_a^{r+\mu}}{\underline{|\mu - \nu} k_a^{r+\nu}} \cdot \frac{c^\nu k_b^{s+\mu}}{\underline{|\nu} k_b^{s+\mu-\nu}}$$

est, comme on le voit, un produit de nombres entiers, et, par suite, la somme elle-même devra se réduire à un nombre entier. *C. Q. F. D.*

J'ai préféré grouper ici ces lemmes préliminaires afin d'éviter, dans ce qui suit, des digressions encombrantes.

[1] Conf. HERMITE: Cours professé pendant le 2e semestre 1881—82. Paris. Hermann. 1883. p. 138.

§ 2. Je vais chercher maintenant à étudier de près la fonction $V(x/c, b)$ pour des valeurs *rationnelles* des paramètres b et c et pour des valeurs algébriques — notamment *rationnelles* — de l'argument.

On peut d'abord démontrer que non seulement le théorème de Lambert, mais encore la proposition plus générale d'Hermite (et même celle de M. Lindemann) concernant la fonction exponentielle — sous la forme que j'ai donnée dans le chapitre précédent à ces propositions — correspondent à des propositions analogues pour la fonction V et pour ses dérivées d'ordre quelconque.

Nous supposons, d'après ce qui précède, que b et c soient des nombres rationnels quelconques ($c \neq 0$), et que l'argument x soit un nombre algébrique quelconque.

Désignons par $F(x/c, b)$ l'intégrale générale de l'équation différentielle (1), et soit r une constante arbitraire, nous aurons, comme le fait observer M. HURWITZ,

$$F(rx/rb, rc) = F(x/c, b).$$

On peut donc, sans diminuer la généralité des recherches, supposer que c et b soient des nombres *entiers*, avec $c > 0$, et que x soit un nombre *entier* algébrique, c.-à.-d. racine d'une équation de la forme

$$x^{n+1} + \sum_0^n{}^{\nu} a_\nu x^\nu = 0,$$

les $a_0 a_1 \ldots a_n$ étant tous des nombres entiers ou nuls.

Tout particulièrement, il est donc inutile d'examiner F pour d'autres valeurs *rationnelles* de l'argument que des nombres *entiers*.

Pour l'étude arithmétique plus approfondie de la série $V(x/c, b)$, j'ai procédé de la manière suivante:

Soit ν un entier positif quelconque, et désignons par $E\left(\frac{\nu}{2}\right)$ le plus grand entier $\leq \frac{\nu}{2}$.

J'introduis les définitions et les notations suivantes:

Soit

$$u^0(x/c, b) = 1,$$

et, pour l'indice $\nu \geq 1$,

$$\frac{u^\nu(x/c, b)}{\lfloor\underline{\nu}} = \sum_0^{E\left(\frac{\nu}{2}\right)}{}^{\lambda} \frac{k_b^{\nu-\lambda}}{k_b^\lambda} \frac{\lfloor\underline{\nu-\lambda}}{\lfloor\underline{\nu-2\lambda}\,\lfloor\underline{\lambda}} c^\lambda x^\lambda. \tag{3}$$

Je fais observer que, b et c étant supposés des nombres entiers, toutes les fonctions

$$\frac{u^\nu(x)}{\underline{|\nu}}$$

représenteront des fonctions rationnelles entières à coefficients entiers.

On trouve entre ces fonctions u^ν les relations suivantes:

Comme

$$(b + c\,\overline{\nu - \lambda - 1})(\nu - \lambda) = (b + c\,\overline{\nu - 1})(\nu - 2\lambda) + \lambda(b + c\,\overline{\lambda - 1}),$$

on aura

$$\begin{aligned}\frac{u^\nu(x/c,b)}{\underline{|\nu}} &= (b + \overline{\nu - 1}\,c) \sum_{0}^{E\left(\frac{\nu-1}{2}\right)}{}_{\lambda} \frac{k_b^{\nu-1-\lambda}}{k_b^{\lambda}} \frac{\underline{|\nu - 1 - \lambda}}{\underline{|\nu - 1 - 2\lambda}} \cdot \frac{c^\lambda x^\lambda}{\underline{|\lambda}} + \\ &+ cx \sum_{1}^{E\left(\frac{\nu}{2}\right)}{}_{\lambda} \frac{k_b^{\nu-1-\lambda}}{k_b^{\lambda-1}} \cdot \frac{\underline{|\nu - 1 - \lambda}}{\underline{|\nu - 2\lambda}} \cdot \frac{(cx)^{\lambda-1}}{\underline{|\lambda - 1}} = \\ &= (b + \overline{\nu - 1}\,c) \frac{u^{\nu-1}(x/c,b)}{\underline{|\nu - 1}} + cx \sum_{0}^{E\left(\frac{\nu-2}{2}\right)}{}_{\lambda} \frac{k_b^{\nu-2-\lambda}}{k_b^{\lambda}} \frac{\underline{|\nu - 2 - \lambda}}{\underline{|\nu - 2 - 2\lambda}} \frac{(cx)^\lambda}{\underline{|\lambda}},\end{aligned}$$

d'où l'on tire

$$\frac{u^\nu(x/c,b)}{\underline{|\nu}} = (b + \overline{\nu - 1}\,c) \frac{u^{\nu-1}(x/c,b)}{\underline{|\nu - 1}} + cx \frac{u^{\nu-2}(x/c,b)}{\underline{|\nu - 2}}. \tag{4}$$

Introduisons maintenant un caractère u avec la signification symbolique suivante:[1]

---

[1] Les systèmes symboliques qu'on rencontre dans ce travail ne sont ni ici ni ailleurs indispensables à la démonstration. Au contraire, ce serait une chose simple, bien qu'amenant sans doute par ci par là certains embarras de nature formelle, que de transcrire la preuve sans se servir de ces symboles.

Si je les ai conservés, c'est qu'ils me paraissent faire ressortir d'une façon plus claire les propriétés arithmétiques des fonctions et aussi qu'ils m'ont fourni le moyen technique à l'aide duquel j'ai réussi à démontrer mes propositions.

Il m'a paru utile de faire cette observation, car M. Vahlen a trouvé nécessaire d'introduire dans les Math. Annalen une nouvelle preuve élémentaire arithmético-algébrique de la transcendance de e, preuve qui, à l'instar de celles de Hurwitz et de Gordan, se base sur la preuve de Hilbert, mais qui posséderait, par rapport à celle de Gordan, l'avantage de »ne pas se servir de désignations symboliques.»

Il ne serait guère difficile non plus de montrer que ce n'est nullement à une faiblesse essentielle de la preuve de Gordan que M. Vahlen s'est attaqué dans le passage precité.

Laissant de côté l'exécution formelle — chose relativement peu importante — le mérite principal de la preuve de Gordan me semble être de ramener d'une manière plus simple et plus

Nous désignerons par

$$\frac{[x + u(x/c, b)]^r}{\lfloor\underline{r}} \text{ ou, plus brièvement, par } \frac{(x+u)^r}{\lfloor\underline{r}}$$

là somme

$$\sum_0^r{}_\lambda \frac{x^\lambda}{\lfloor\underline{\lambda}} \frac{u^{r-\lambda}(x/c, b)}{\lfloor\underline{r-\lambda}},$$

r étant un entier positif quelconque.

Donc, si $f(x)$ est une fonction entière rationnelle quelconque, soit de degré n,

$$f(x+u) \text{ désignera } \sum_0^n{}_\nu \frac{u^\nu(x)}{\lfloor\underline{\nu}} f^\nu(x).$$

On trouve d'après l'équation (4)

$$\frac{(x+u)^r}{\lfloor\underline{r}} - \frac{x^r}{\lfloor\underline{r}} = \sum_0^{r-1}{}_\lambda (b + c\overline{r - 1 - \lambda}) \frac{x^\lambda}{\lfloor\underline{\lambda}} \frac{u^{r-1-\lambda}}{\lfloor\underline{r-1-\lambda}} + \sum_0^{r-2}{}_\lambda c(\lambda+1) \frac{x^{\lambda+1}}{\lfloor\underline{\lambda+1}} \frac{u^{r-1-(\lambda+1)}}{\lfloor\underline{r-1-(\lambda+1)}},$$

d'où

---

palpable que les preuves précédentes les recherches sur les propriétés arithmétiques de la fonction e^x à l'étude des coefficients de la série exponentielle.

C'est à cause de cette qualité de la preuve en question qu'il m'a semblé naturel de la prendre pour base d'un essai de dériver des coefficients des séries de Taylor représentant les fonctions qui font l'objet de mes recherches, et qui ont avec la fonction exponentielle une certaine affinité, des propriétés arithmétiques apparentées à celles qu'on a constatées chez la dite fonction.

La preuve de Gordan, telle qu'elle a été exposée p. 235 et s., ramène l'étude de la fonction exponentielle d'une part à la propriété de $\lfloor\underline{r}$ qui à l'endroit cité a donné lieu à l'équation

$$(2') \qquad h^r E(x) = (x+h)^r + \lambda_r x^r E(|x|),$$

d'autre part au théorème d'addition.

Il faut pourtant observer que déja l'équation (2') à elle seule aurait suffi pour une étude non seulement de relations linéaires mais aussi de relations rationnelles de degré supérieur de la fonction exponentielle.

En effet, on trouve d'apres l'équation (2')

$$(h - x_1)^r E(x_1) = h^r + \lambda'_r x_1^r E(|x_1|),$$

d'où l'on aura

$$(h - x_1)^r E(x_1) . E(x) = (x+h)^r + \lambda_r x^r E(|x|) + \lambda'_r x_1^r E(|x_1|) E(x),$$

et, par suite,

$$(2'') \qquad h^r E(x_1) E(x) = (x + x_1 + h)^r + \mu_r (|x| + |x_1|)^r E(|x_1|) . E(|x|),$$

où l'on aura $|\mu_r| < 1$.

On est amené par là à chercher une généralisation des deux équations (2') et (2'').

$$\frac{(x+u)^r}{k_b^r\underline{|r}} - \frac{x^r}{k_b^r\underline{|r}} = \frac{b+c\overline{r-1}}{k_b^r}\sum_{0}^{r-1}{}_{\lambda}\frac{x^\lambda}{\underline{|\lambda}}\,\frac{u^{r-1-\lambda}}{\underline{|r-1-\lambda}} = \frac{(x+u)^{r-1}}{k_b^{r-1}\underline{|r-1}},$$

et, par suite,

$$(5)\qquad \frac{(x+u)^r}{k_b^r\underline{|r}} = \sum_{0}^{r}{}_{\nu}\frac{x^\nu}{k_b^\nu\underline{|\nu}}.$$

Si l'on arrête la série $V(x/c,b)$ à un terme arbitraire, soit au terme $(r+1)^{\text{me}}$, on obtiendra

$$(6')\qquad V(x/c,b) = \sum_{0}^{r}{}_{\nu}\frac{x^\nu}{k_b^\nu\underline{|\nu}} + \frac{x^r}{k_b^r\underline{|r}}\chi_r(x) =$$

$$= \frac{(x+u)^r}{k_b^r\underline{|r}} + \frac{x^r}{k_b^r\underline{|r}}\chi_r(x),$$

où l'on doit avoir

$$\chi_r(x) = \frac{x}{(b+cr)(r+1)} + \frac{x^2}{(b+cr)(b+c\overline{r+1})(r+1)(r+2)} + \cdots$$

Or, soit $\varkappa$ le premier nombre entier positif pour lequel

$$b + c\varkappa > 0,$$

et introduisons

$$U(x) = |k_b^\varkappa|\sum_{0}^{\infty}{}_{\nu}\frac{x^\nu}{|k_b^\nu|\underline{|\nu}},$$

on aura dans tous les cas

$$|\chi_r(x)| \leq U(|x|).$$

Si, de plus, nous introduisons le caractère $h(c,b)$ avec une signification symbolique qui se rattache à celle de GORDAN (voir p. 235), de sorte que h^r désigne $u^r(0/c,b)$, d'où

$$h^r = k_b^r\underline{|r},$$

l'équation (6') peut s'écrire, comme on le voit aisément,

$$(6)\qquad h^r V(x) = (x+u)^r + \lambda_r x^r U(|x|),$$

où l'on aura

$$|\lambda_r(x)| \leq 1.$$

Or, soit $f(x)$ un polynôme rationnel quelconque, mettons

$$f(x) = \sum_{0}^{n}{}_{\nu}\, a_\nu\frac{x^\nu}{\underline{|\nu}},$$

et soit

$$\varphi(x) = \sum_{0}^{n}{}^{\nu}\, a_\nu \lambda_\nu \frac{x^\nu}{\underline{|\nu}}\,.$$

Il s'ensuit que

$$(7) \qquad f(h)\, V(x) = f(x + u) + \varphi(x)\, U(|x|),$$

où l'on aura évidemment

$$|\varphi(x)| \leq \sum_{0}^{n} \left| a_\nu \frac{x^\nu}{\underline{|\nu}} \right| .$$

Soient maintenant $x_0 x_1 \ldots x_n$ $(n + 1)$ nombres rationnels quelconques inégaux, et soient de même $C_0 C_1 \ldots C_n$ des nombres rationnels quelconques $\neq 0$.

Cela posé, supposons qu'il existe une relation de la forme

$$(8) \qquad W = \sum_{0}^{n}{}^{k}\, C_k\, V(x_k \,/\, c,\, b) = 0.$$

On pourra, comme nous l'avons déjà remarqué, sans diminuer la généralité de nos recherches, supposer que $x_0 x_1 \ldots x_n$ ainsi que $C_0 C_1 \ldots C_n$ soient tous des nombres *entiers*.

Si maintenant $n = 0$ et $x_0 = 0$, nous aurons

$$W = C_0 \neq 0.$$

Dans tout autre cas, nous pourrons, tous les x_i étant inégaux, supposer, pour plus de simplicité, que les x_i soient ordonnés de telle manière que

$$x_0 \neq 0.$$

Désignons par λ et p deux entiers positifs quelconques, soit

$$p > \lambda.$$

Pour préciser, je suppose que p soit un entier impair, et que λ doive être choisi dans l'intervalle

$$(i) \qquad \frac{p - 1}{2} \leq \lambda \leq p - 1.$$

Je mets encore

$$f(x) = \frac{(x - x_0)^\lambda}{\underline{|\lambda}} \prod_{1}^{n}{}^{i}\, (x - x_i)^p,$$

d'où l'on tire

$$f(h)\, V(x) = \frac{(x - x_0 + u)^\lambda}{\underline{|\lambda}} \prod_1^n{}_i\, (x - x_i + u)^p + \varphi(x)\, U(|x|),$$

et j'aurai par conséquent

$$(10) \qquad 0 = f(h) \sum_0^n{}_k\, C_k\, V(x_k) = A + B + C,$$

où j'ai introduit, pour abréger,

$$A = C_0 \frac{u^\lambda(x_0)}{\underline{|\lambda}} \prod_1^n{}_i\, (x_0 - x_i + u(x_0))^p$$

$$B = \sum_1^n{}_k\, C_k \frac{[x_k - x_0 + u(x_k)]^\lambda}{\underline{|\lambda}} u^p \prod_1^n{}'_i\, (x_k - x_i + u)^p$$

$$C = \sum_0^n{}_k\, C_k \varphi(x_k)\, U(|x_k|).$$

Or, x étant un nombre entier, les fonctions

$$\frac{u^\nu(x)}{\underline{|\nu}}$$

seront, d'après ce qui précède, toujours des entiers, et il en résulte que A et B seront de même des nombres entiers.

Dans ce cas, C sera encore un nombre entier.

Or, l'on pourra toujours choisir p assez grand pour que

$$|C| \text{ soit inférieur à } 1,$$

quel que soit l'entier λ choisi dans l'intervalle (i).

Donc, nous aurons

$$C = 0,$$

d'où encore

$$A + B = 0.$$

Or, l'on trouve aisément

$$B \equiv 0 \pmod{p}$$

et, par conséquent, on aura de même

$$A \equiv 0 \pmod{p}.$$

Si p est un nombre premier, on aura évidemment

$$A \equiv C_0 \frac{u^\lambda(x_0)}{\lfloor\underline{\lambda}} \prod_1^n {}_i\, (x_0 - x_i)^p \quad (\mathrm{mod.}\ p).$$

Or, soit p un nombre premier assez grand et supérieur à la valeur numérique de

$$C_0 \prod_1^n {}_i\, (x_0 - x_i),$$

on aura

$$\frac{u^\lambda(x_0)}{\lfloor\underline{\lambda}} \equiv 0 \qquad (\mathrm{mod.}\ p). \tag{11}$$

Nous prenons le nombre premier

$$p > |bcx_0|.$$

Désignons par $\nu - 1$ et ν deux nombres consécutifs dans l'intervalle (i), et substituons successivement dans l'équation (11)

$$\lambda = \nu \text{ et } \lambda = \nu - 1,$$

nous aurons

$$\frac{u^\nu(x_0)}{\lfloor\underline{\nu}} \equiv 0 \text{ et } \frac{u^{\nu-1}(x_0)}{\lfloor\underline{\nu - 1}} \equiv 0 \qquad (\mathrm{mod.}\ p).$$

Par conséquent, d'après l'équation (4), nous obtiendrons

$$cx_0 \frac{u^{\nu-2}(x_0)}{\lfloor\underline{\nu - 2}} \equiv 0 \qquad (\mathrm{mod.}\ p),$$

et, comme $|cx_0| < p$, il faut encore que

$$\frac{u^{\nu-2}(x_0)}{\lfloor\underline{\nu - 2}} \equiv 0 \qquad (\mathrm{mod.}\ p).$$

De proche en proche, on trouvera de même que tous les

$$\frac{u^\lambda(x_0)}{\lfloor\underline{\lambda}} \equiv 0 \qquad (\mathrm{mod.}\ p)$$

pour

$$\lambda \leq \nu.$$

Donc l'on aura enfin

$$u^1(x_0) \equiv 0 \qquad (\mathrm{mod.}\ p),$$

c.-à.-d. que b devra être divisible par p, ce qui est impossible, puisque nous avons supposé

$$0 < |b| < p. \qquad C.\ Q.\ F.\ D.$$

Nous aurons donc la la proposition générale suivante:

Théorème. *Si l'on désigne par $x_0 x_1 \ldots x_n$ $(n + 1)$ nombres rationnels inégaux, d'ailleurs quelconques, si c et b désignent des nombres rationnels quelconques, et que $C_0 C_1 \ldots C_n$ soient de même des nombres rationnels quelconques, qui ne sont pas tous égaux à zéro, il ne pourra jamais exister une relation de la forme*

$$(8) \qquad \sum_0^n {}^k C_k V(x_k / c,\ b) = 0.$$

Corollaire. *Pour une valeur rationnelle de l'argument différente de zéro, d'ailleurs arbitraire, ni $V(x)$ ni aucune de ses dérivées peuvent prendre une valeur rationnelle ou devenir zéro.*

§ **3.** Il ne sera pas sans intérêt pour une continuation éventuelle des recherches sur les fonctions qui nous occupent de montrer que même *le théorème de Lindemann* est applicable à ces fonctions.

En effet, soient

$$H_\nu(\xi) = \sum_0^{n_\nu} {}^\lambda a_{\lambda.\nu} \xi^\lambda = 0 \qquad \text{pour } \nu = 1, 2, \ldots r$$

une suite d'équations algébriques irréductibles à coefficients entiers, dont les racines seront respectivement

$$\xi_{1.\nu} \ldots \xi_{n_\nu.\nu} \qquad (\nu = 1, 2, \ldots r).$$

Tous les $a_{\lambda.\nu}$ doivent être supposés des entiers ou nuls.

Soient de plus $x_0 x_1 \ldots x_n$ des nombres rationnels quelconques ou des expressions linéaires à coefficients entiers des quantités données ξ; je suppose tous les x inégaux entre eux.

Soient encore $C_0 C_1 \ldots C_n$ des nombres rationnels quelconques qui ne sont pas tous égaux à zéro, et supposons qu'on ait choisi $x_0 x_1 \ldots x_n$, $C_0 C_1 \ldots C_n$ de manière que l'expression

$$W = \sum_0^n {}^k C_k V(x_k / c,\ b)$$

soit une fonction symétrique de chacun des systèmes

$$\xi_{1.\nu} \ldots \xi_{n_\nu.\nu} \qquad (\nu = 1, 2, \ldots r).$$

Ceci posé, j'établirai la proposition suivante:

Théorème. *Il ne peut exister, dans les conditions données, aucune relation de la forme*

$$W = 0. \tag{8}$$

En effet, nous pourrons, comme il a été déjà observé, supposer, sans diminuer la généralité des recherches, que tous les ξ soient des nombres algébriques *entiers*, que $C_0 C_1 \ldots C_n$ soient des entiers $\neq 0$, qui ne sont pas tous négatifs, et que $x_0 x_1 \ldots x_n$ soient de même des entiers ou des expressions linéaires des ξ à coefficients entiers.

Ceci posé, les $x_0 x_1 \ldots x_n$ étant de même des nombres algébriques entiers, désignons respectivement par $\theta_i(x)$ la fonction rationnelle entière irréductible qui s'annule pour $x = x_i$ $(i = 0, 1 \ldots n)$.

Je suppose que $C_0 C_1 \ldots C_n$ soient rangés de manière que

$$C_\beta \leq C_a \text{ pour } \beta > \alpha.$$

Soit $C_{\mu+1}$ le premier des coefficients C qui soit inférieur à C_0, de sorte que

$$C_0 = C_1 = \cdots = C_\mu = C > 0 \qquad (\mu \geq 0)$$

$$C_{\mu+i} < C, \qquad \text{pour } i = 1, 2, \ldots$$

Comme W a été supposé symétrique dans chacun des systèmes ξ, il en sera évidemment de même pour chacune des sommes

$$\sum_0^n{}^k C_k x_k^\nu \qquad (\nu = 1, 2, \ldots \text{ad inf.})$$

et par conséquent toutes ces sommes se réduiront à des nombres entiers.

Posons maintenant

$$\theta(x) = \prod_0^n{}^i \theta_i(x).$$

Soit $\chi(x)$ le plus grand diviseur commun de $\theta(x)$ et de $\theta'(x)$, et désignons par $\psi(x)$ le quotient de $\theta(x)$ par $\chi(x)$.

Il faut donc, comme on le sait, que $\psi(x)$ soit de même une fonction rationnelle entière de x à coefficients entiers. Soit

$$\psi(x) = \prod_0^{n+p}{}_i (x - x_i),$$

où $x_0 x_1 \ldots x_n$ seront les x donnés et $x_{n+1} \ldots x_{n+p}$ représenteront des nombres algébriques entiers étrangers, tous distincts et différents des $x_0 x_1 \ldots x_n$.

Chacune des sommes

$$\sum_0^{n+p}{}_k C x_k^\nu \qquad (\nu = 1, 2 \ldots \text{ad inf.})$$

est par suite un nombre entier.

Cela posé, introduisons

$$C_{n+i} = 0 \text{ pour } i = 1, 2, \ldots p$$

et posons

$$C'_k = C - C_k > 0, \text{ pour } k = \mu + 1, \ldots n + p;$$

chacune des sommes

$$\sum_{\mu+1}^{n+p}{}_k C'_k x_k^\nu \qquad (\nu = 1, 2, \ldots \text{ad inf.})$$

se réduira à un nombre entier.

Par conséquent, le produit

$$\prod_{\mu+1}^{n+p}{}_k (x - x_k)^{C'_k}$$

représentera une fonction entière rationnelle de x à coefficients entiers.

Il en sera de même, comme on le sait, pour chacun des produits

$$\prod{}_k (x - x_k),$$

qui correspondent à tous les indices k, pour lesquels les C'_k prennent la même valeur.

Comme, par conséquent, le produit

$$\prod_{n+1}^{n+p}{}_k (x - x_k)$$

aussi bien que le produit

$$\prod_{\mu+1}^{n}{}_k (x - x_k)$$

seront des polynômes à coefficients entiers, il en sera enfin de même pour le produit

$$\prod_0^{\mu}{}^k (x - x_k).$$

Cela posé, en désignant par

$$\varphi(x) = \prod_0^{\bar{n}}{}^k (x - x_k)$$

un facteur irréductible de ce dernier produit et par $F(x)$ un polynôme rationnel à coefficients entiers, d'ailleurs arbitraire, on trouvera que non seulement la somme

$$\sum_0^{n}{}^k C_k F(x_k)$$

mais encore les sommes

$$\sum_0^{\bar{n}}{}^k C F(x_k) \quad \text{et} \quad \sum_{\bar{n}+1}^{n}{}^k C_k F(x_k)$$

se réduiront à des nombres entiers.

Or, formons les fonctions

$$\bar{f}_{\nu.\lambda}(x) = x^{\nu} \frac{\overline{\varphi(x)}^{\lambda}}{\lfloor\lambda} \prod_{\bar{n}+1}^{n}{}^i (x - x_i)^p \qquad (\nu = 0, 1, \ldots \bar{n}).$$

λ et p pourront être choisis de la même manière que dans le numéro précédent (p. 249).

Toutes les fonctions

$$\lfloor\lambda \bar{f}_{\nu.\lambda}(x)$$

seront, conformément à ce qui a été dit plus haut, des polynômes de x à coefficients entiers.

On aura (voir le numéro précédent)

$$0 = \bar{f}_{\nu.\lambda}(h) W = A + B + \Gamma,$$

où l'on a mis

$$A = C \sum_0^{\bar{n}}{}^k \bar{f}_{\nu.\lambda}(x_k + u)$$

$$B = \sum_{\bar{n}+1}^{n}{}^k C_k \bar{f}_{\nu.\lambda}(x_k + u)$$

$$\Gamma = \sum_0^{n} {}^k C_k \bar{\varphi}_{\nu.\lambda}(x_k) U(|x_k|).$$

A et B seront des nombres entiers, d'où il résulte que Γ sera de même entier.

p étant pris assez grand, on aura

$$|\Gamma| < 1, \text{ d'où } \Gamma = 0,$$

et, par conséquent, on aura encore

$$A + B = 0.$$

De plus, on a

$$B \equiv 0 \pmod{p},$$

ce qui entraîne

$$A \equiv 0 \pmod{p}.$$

Si donc p est un nombre premier assez grand et supérieur à C, on aura

$$\sum_0^{\bar{n}} {}^k \bar{f}_{\nu.\lambda}(x_k + u) \equiv 0 \pmod{p} \qquad (\nu = 0, 1, \ldots \bar{n})$$

(en supposant λ choisi dans l'intervalle (i) p. 17).

Or

$$\sum_0^{\bar{n}} {}^k \bar{f}_{\nu.\lambda}(x_k + u) = \sum_0^{\bar{n}} {}^k (x_k + u)^\nu \frac{\overline{\varphi(x_k + u)}^\lambda}{\lfloor \lambda} \prod_{\bar{n}+1}^{n} {}^i (x_k - x_i + u)^p.$$

p étant un nombre premier, on aura donc évidemment

$$(11) \qquad 0 \equiv \sum_0^{\bar{n}} {}^k \bar{f}_{\nu.\lambda}(x_k + u) \equiv \sum_0^{\bar{n}} {}^k (x_k + u)^\nu \frac{\overline{\varphi(x_k + u)}^\lambda}{\lfloor \lambda} \prod_{\bar{n}+1}^{n} {}^i (x_k - x_i)^p \pmod{p}$$

$$(\nu = 0, 1, \ldots \bar{n}).$$

Si l'on suppose $\bar{n} = 0$, la preuve ne sera dans la suite qu'une simple répétition de la preuve fournie dans le numéro précédent.

On pourra dès lors supposer que $\bar{n} \geq 1$, *et que tous les* $x_0 x_1 \ldots x_{\bar{n}}$ *soient différents de zéro.*

Avant de continuer, je crois bon d'introduire les définitions et notations suivantes ainsi que d'établir quelques lemmes préliminaires dont je me servirai dans ce qui suit.

Désignons par

$$\varphi(x) = x^{\bar{n}+1} + \sum_0^{\bar{n}} {}^{\nu}\, a_\nu x^\nu$$

un polynôme irréductible quelconque à coefficients entiers et dans lequel le coefficient de la plus haute puissance de x est l'unité; soit x_k une racine arbitraire de $\varphi(x) = 0$.

Définitions: Si $F(x)$ et $G(x)$ désignent des polynômes rationnels quelconques à coefficients entiers, et si l'on a

$$F(x) = G(x) + \varphi(x)\theta(x),$$

$\theta(x)$ désignant de même un polynôme rationnel à coefficients entiers, nous écrirons

$$F(x) \equiv G(x) \qquad (\text{mod. } \varphi).$$

Comme on le sait, il existera toujours parmi les fonctions $G(x)$ congrues à $F(x)$ un seul polynôme, soit

$$f(x) \equiv F(x) \qquad (\text{mod. } \varphi),$$

dont le degré n'est pas supérieur à $\bar{n}$.

Posons

$$f(x) = \sum_0^{\bar{n}} {}^{\nu}\, f_\nu x^\nu,$$

où $f_0 f_1 \ldots f_{\bar{n}}$ seront, d'après ce qui précède, des nombres entiers ou nuls absolument déterminés.

La fonction $f(x)$ sera dite le *résidu* de $F(x)$ (mod. φ).

Si tous les coefficients f_ν sont des nombres entiers divisibles par p ou nuls, nous dirons que

$$F(x) \equiv 0 \qquad (\text{mod. } p, \varphi)$$

$$F(x_k) \equiv 0 \qquad (\text{mod. } p) \quad (k = 0, 1, \ldots \bar{n}).$$

Dans ce cas, on aura évidemment

$$\sum_0^{\bar{n}} {}^{k}\, F(x_k) \text{ égal à un nombre entier} \equiv 0 \ (\text{mod. } p).$$

Désignons de même par $g(x)$ le résidu de $G(x)$ (mod. φ).

Soit

$$g(x) = \sum_0^{\bar{n}} {}^{\nu}\, g_\nu x^\nu.$$

Lemme I. Pour que

$$F(x) \equiv G(x) \qquad (mod.\ \varphi),$$

il faut et il suffit que $f(x)$ soit identiquement égal à $g(x)$.

Lemme II. Pour que

$$F(x) \equiv G(x) \qquad (mod.\ \varphi),$$

il faut et il suffit, que l'on ait

$$F(x_k) = G(x_k),$$

x_k désignant une racine donnée arbitraire de l'équation

$$\varphi(x) = 0.$$

Corollaire. Comme cas particulier de ces lemmes, je rappelle que, si l'on à trouvé

$$F(x_k) = \sum_0^{\bar{n}}{}^{\nu}\ \alpha_\nu x_k^\nu,$$

$\alpha_0 \alpha_1 \ldots \alpha_{\bar{n}}$ désignant des nombres entiers ou nuls, on aura nécessairement

$$f(x) = \sum_0^{\bar{n}}{}^{\nu}\ \alpha_\nu x^\nu.$$

Lemme III. On aura évidemment

$$F(x)\, G(x) \equiv f(x)\, g(x) \qquad (mod.\ \varphi).$$

Donc, pour que

$$F(x)\, G(x) \equiv 0 \qquad (mod.\ p,\ \varphi),$$

il faut et il suffit que

$$f(x)\, g(x) \equiv 0 \qquad (mod.\ p,\ \varphi).$$

Or, soient $\gamma_1 \gamma_2 \ldots \gamma_{\bar{n}}$ les racines de l'équation

$$g(x) = 0,$$

de sorte que

$$g(x) = g_{\bar{n}} \prod_1^{\bar{n}}{}^{i}\ (x - \gamma_i),$$

et supposons que

$$f(x)\, g(x) \equiv 0 \qquad (\text{mod.}\ p,\ \varphi).$$

Soit, pour fixer les idées,

$$f(x)\, g(x) = p\psi(x) + \varphi(x)\, \theta(x)$$

$$\psi(x) = \sum_0^{\bar{n}}{}^{\nu} \alpha_\nu x^\nu$$

$$\theta(x) = \sum_0^{\bar{n}-1}{}^{\nu} \beta_\nu x^\nu$$

(α_ν, β_ν désignant des nombres entiers ou nuls).

On aura, par suite,

$$p\,\psi(\gamma_i) + \varphi(\gamma_i)\sum_0^{\bar{n}-1}{}^{\nu} \beta_\nu \gamma_i^\nu = 0. \qquad (i = 1, 2, \ldots \bar{n})$$

Soit

$$\bar{D} = \prod_1^{\bar{n}}{}^{i} \varphi(\gamma_i)\, g'(\gamma_i),$$

et posons

$$\bar{D}_\lambda = \begin{vmatrix} 1\ \gamma_1 \ldots \gamma_1^{\lambda-1}\ \psi(\gamma_1)\ \gamma_1^{\lambda+1} \ldots \gamma_1^{\bar{n}-1} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ 1\ \gamma_{\bar{n}} \ldots \gamma_{\bar{n}}^{\lambda-1}\ \psi(\gamma_{\bar{n}})\ \gamma_{\bar{n}}^{\lambda+1} \ldots \gamma_{\bar{n}}^{\bar{n}-1} \end{vmatrix} g_{\bar{n}}^{\bar{n}} \Delta(\gamma_1 \ldots \gamma_{\bar{n}});$$

donc, nous aurons

$$(-1)^{\frac{\bar{n}(\bar{n}-1)}{2}} \bar{D}\beta_\lambda = -p\bar{D}_\lambda \qquad (\lambda = 0, 1, \ldots \bar{n}).$$

$\bar{D}$ et $\bar{D}_\lambda$ représentent ici des fonctions symétriques de $\gamma_1 \ldots \gamma_{\bar{n}}$ et doivent par conséquent se réduire à des nombres rationnels, dont les dénominateurs seront certaines dignités de $g_{\bar{n}}$.

On trouve donc la proposition suivante:

Lemme IV. Désignons par $F(x)$ et $G(x)$ deux polynômes rationnels quelconques à coefficients entiers, et supposons que l'on ait

$$F(x)\, G(x) \equiv 0 \qquad (mod.\ p, \varphi).$$

Soit

$$G(x) \equiv g(x) \qquad (mod.\ \varphi),$$

où l'on aura

$$g(x) = \sum_0^{\bar{n}}{}^{\nu} g_\nu x^\nu = g_{\bar{n}} \prod_1^{\bar{n}}{}^{i} (x - \gamma_i).$$

Soit $g_{\bar{n}}^{\varkappa}$ une puissance de $g_{\bar{n}}$ assez grande pour que le produit suivant, savoir

$$D = g_{\bar{n}}^{\varkappa} \prod_1^{\bar{n}}{}^{i} \varphi(\gamma_i)\, g'(\gamma_i), \tag{12}$$

soit un nombre entier.

Si, alors, p n'a pas de diviseur commun avec D et avec g_n, on aura

$$F(x) \equiv 0 \qquad (mod.\ p, \varphi).$$

Corollaire I. Si l'on a

$$x F(x) \equiv 0 \qquad (mod.\ p, \varphi),$$

et que p n'ait pas de diviseur commun avec a_0, on aura

$$F(x) \equiv 0 \qquad (mod.\ p, \varphi).$$

Corollaire II. Soit $g(x)$ et $h(x)$ deux polynômes rationnels quelconques à coefficients entiers, et soit $G(x)$ le plus petit dividende commun de $g(x)$ et de $h(x)$.

Supposons que, pour une valeur donnée arbitraire de ν, on ait

$$h(x)\frac{u^\nu(x)}{\lfloor \nu} \equiv 0 \qquad (mod.\ p, \varphi)$$

et

$$g(x)\frac{u^\nu(x)}{\lfloor \nu} \equiv 0 \qquad (mod.\ p, \varphi).$$

Cela posé, si p n'a pas de diviseur commun avec a_0, c et b, on aura necessairement

$$G(x) \equiv 0 \qquad (mod.\ p, \varphi).$$

En effet, on aura, par hypothèse,

$$\left.\begin{aligned} G(x)\frac{u^\nu}{\lfloor \nu} &\equiv 0 \qquad (\text{mod. } p, \varphi) \\ G(x)\frac{u^{\nu-1}}{\lfloor \nu-1} &\equiv 0 \qquad (\text{mod. } p, \varphi) \end{aligned}\right\},$$

et, comme, à cause de l'équation (4), on aura

$$G(x)\frac{u^\nu}{\lfloor \nu} = (b + c\,\overline{\nu-1})\,G(x)\frac{u^{\nu-1}}{\lfloor \nu-1} + c\,x\,G(x)\frac{u^{\nu-2}}{\lfloor \nu-2},$$

il en résulte que

$$cx\,G(x)\frac{u^{\nu-2}}{\lfloor \nu-2} \equiv 0 \qquad (\text{mod. } p, \varphi),$$

d'où, d'après le corollaire I,

$$G(x)\frac{u^{\nu-2}}{\lfloor \nu-2} \equiv 0 \qquad (\text{mod. } p, \varphi).$$

De la même manière on établira de proche en proche que tous les

$$G(x)\frac{u^\lambda}{\underline{|\lambda}} \equiv 0 \qquad (\text{mod. } p, \varphi), \qquad \text{pour } \lambda \leq \nu.$$

Or, posons $\lambda = 1$, on aura

$$G(x)\, u^1(x) \equiv 0 \qquad (\text{mod. } p, \varphi),$$

ou, en remplaçant $u^1(x)$ par b,

$$b\, G(x) \equiv 0 \qquad (\text{mod. } p, \varphi),$$

d'où, par hypothèse,

$$G(x) \equiv 0 \qquad (\text{mod. } p, \varphi).$$

C. Q. F. D.

Corollaire III. Cas spécial: p étant sans diviseur commun avec a_0, c et b, et ν désignant un entier positif quelconque, on ne peut avoir en même temps

$$\frac{u^\nu}{\underline{|\nu}} \equiv 0 \quad \textit{et} \quad \frac{u^{\nu-1}}{\underline{|\nu - 1}} \equiv 0 \qquad (\textit{mod. } p, \varphi).$$

Après cette digression, revenons sur la preuve de la proposition généralisée de M. Lindemann.

Si nous introduisons les notations suivantes:

(13) $$C(x) = \prod_{\bar{n}+1}^{n}{}_i\, (x - x_i),$$

(14) $$f_{\nu.\lambda}(x) = x^\nu \frac{\overline{\varphi(x)^\lambda}}{\underline{|\lambda}}, \text{ et}$$

(14') $$\psi_{k.\lambda}(x) = \prod_{0}^{\bar{n}}{}'_i (x - x_i)^\lambda \qquad (k = 0, 1 \ldots \bar{n};\ i \neq k),$$

d'où

(14'') $$f_{\nu.\lambda}(x) = x^\nu \frac{(x - x_k)^\lambda}{\underline{|\lambda}} \psi_{k.\lambda}(x) \qquad (k = 0, 1, \ldots \bar{n}),$$

nous obtiendrons

(15) $$f_{\nu.\lambda}(x_k + u) = (x_k + u)^\nu \left\{ \frac{u^\lambda(x_k)}{\underline{|\lambda}} \psi_{k.\lambda}(x_k) + \frac{u^{\lambda+1}}{\underline{|\lambda}} \psi'_{k.\lambda}(x_k) + \frac{u^{\lambda+2}}{\underline{|\lambda}} \frac{\psi''_{k.\lambda}(x_k)}{\underline{|2}} + \cdots \right\},$$

où l'on aura évidemment

$$\psi_{k.\lambda}(x_k) = \overline{\varphi'(x_k)}^\lambda. \tag{16}$$

Or, d'après (11), on aura

$$\sum_0^{\bar n} {}^k\, \overline{C(x_k)}^p f_{\nu.\lambda}(x_k + u) \equiv 0 \qquad (\text{mod. } p),$$

ou, en d'autres termes,

$$0 \equiv \sum_0^{\bar n} {}^k\, \overline{C(x_k)}^p (x_k + u)^\nu \left\{ \frac{u^\lambda}{\lfloor\underline{\lambda}} \overline{\varphi'(x_k)}^\lambda + \frac{u^{\lambda+1}}{\lfloor\underline{\lambda}} \psi'_{k.\lambda}(x_k) + \cdots \right\} \qquad (\text{mod. } p).$$

Soient maintenant $\lambda - 1$ et λ deux entiers consécutifs dans l'intervalle (i), et supposons qu'on ait tous les

$$\frac{u^{\lambda+i}}{\lfloor\underline{\lambda}} \equiv 0 \qquad (\text{mod. } p, \varphi), \qquad\qquad \text{pour } i = 1, 2, 3, \ldots \text{ ad inf.}$$

On aura dès lors

$$0 \equiv \sum_0^{\bar n} {}^k\, \overline{C(x_k)}^p \, \overline{\varphi'(x_k)}^\lambda (x_k + u)^\nu \frac{u^\lambda}{\lfloor\underline{\lambda}} \qquad (\text{mod. } p),$$

d'où

$$0 \equiv \sum_0^{\bar n} {}^k\, \overline{C(x_k)}^p \, \overline{\varphi'(x_k)}^\lambda x_k^\nu \frac{u^\lambda(x_k)}{\lfloor\underline{\lambda}} \qquad (\text{mod. } p),$$

ou, en d'autres termes,

$$\sum_0^{\bar n} {}^k\, \overline{C(x_k)}^p \, \overline{\varphi'(x_k)}^\lambda x_k^\nu \frac{u^\lambda(x_k)}{\lfloor\underline{\lambda}} = p\, A_\nu, \tag{17}$$

$$\text{pour } \nu = 0, 1, \ldots \bar n,$$

$A_0, A_1 \ldots A_{\bar n}$ étant des entiers.

Mettons, pour abréger,

$$\left\{ \begin{aligned} D &= \prod_0^{\bar n} {}^k\, C(x_k) \text{ et} \\ \Phi &= \prod_0^{\bar n} {}^k\, \varphi'(x_k), \end{aligned} \right. \tag{18}$$

on aura

$$D^{p}\,\Phi^{\lambda+1}\frac{u^{\lambda}(x_k)}{\underline{|\lambda}} = \pm\, p\,\Delta_k(x_k)\prod_{0}^{\bar n}{}'_i\,\overline{C(x_i)}^{p}\;\overline{\varphi'(x_i)}^{\lambda}, \tag{19}$$

en désignant par $\Delta_k(x_k)$ les déterminants

$$\Delta_k(x_k) = \begin{vmatrix} 1 & .. & 1 & A_0 & 1 & .. & 1 \\ x_0 & .. & x_{k-1} & A_1 & x_{k+1} & .. & x_{\bar n} \\ . & . & . & . & . & . & . \\ x_0^{\bar n} & .. & x_{k-1}^{\bar n} & A_{\bar n} & x_{k+1}^{\bar n} & .. & x_{\bar n}^{\bar n} \end{vmatrix} \Delta(x_0\, x_1 \ldots x_{\bar n}).$$

Le coefficient de p dans le membre droit de l'équation (19) sera évidemment une fonction entière rationnelle à coefficients entiers de $x_0\, x_1 \ldots x_{\bar n}$, symétrique par rapport à $x_0\, x_1 \ldots x_{k-1}\, x_{k+1} \ldots x_{\bar n}$; on pourra donc l'exprimer par une fonction entière rationnelle de x_k à coefficients entiers.

D et Φ se réduiront à des entiers $\neq 0$.

Donc, si l'on prend le nombre premier p plus grand que les valeurs numériques de D et de Φ, on aura

$$\frac{u^{\lambda}(x_k)}{\underline{|\lambda}} \equiv 0 \qquad (\text{mod. } p)$$

et, par suite,

$$\frac{u^{\lambda}(x)}{\underline{|\lambda}} \equiv 0 \qquad (\text{mod. } p, \varphi). \tag{20}$$

De la même manière on établira encore que

$$\frac{u^{\lambda-1}(x)}{\underline{|\lambda - 1}} \equiv 0 \qquad (\text{mod. } p, \varphi). \tag{21}$$

Si, d'autre part, on choisit le nombre premier p plus grand que la valeur numérique de a_0, de c et de b, ces deux relations simultanées (20) et (21) comporteront d'après le corollaire 3 (p. 261) une impossibilité.

Or, en effet, $p-2$ et $p-1$ sont deux entiers consécutifs dans l'intervalle (i), et l'on aura tous les

$$\frac{u^{p-1+i}}{\underline{|p-1}} \equiv 0 \qquad (\text{mod. } p, \varphi), \qquad \text{pour } i = 1, 2, \ldots \text{ ad inf.}$$

Nous avons donc établi l'impossibilite d'une relation

$$W = 0.$$

C. Q. F. D.

§ 4. Je tâcherai maintenant, à l'aide des fonctions u et des constantes h introduites dans ce qui précède, d'étudier de plus près les relations linéaires à coefficients rationnels qui peuvent exister entre des fonctions V différentes pour des arguments rationnels.

Soit

$V(x \mid c, b)$ une fonction V donnée arbitraire,

et soit

$V_\mu(x \mid c, b)$ sa dérivée $\mu^{\text{ième}}$.

On trouve (voir p. 19)

$$V(x \mid c, b + \mu c) = k_b^\mu V_\mu(x \mid c, b). \tag{1}$$

Nous introduisons la notation

$$h_\mu^r(c, b) = k_b^\mu h^r(c, b + \mu c),$$

d'où

$$\frac{h_\mu^r(c, b)}{\underline{|r}} = k_b^\mu k_{b+\mu c}^r = k_b^{r+\mu}, \tag{2}$$

et nous mettons encore

$$u_\mu^\nu(x \mid c, b) = u^\nu(x \mid c, b + \mu c). \tag{3}$$

On aura

$$h^r(c, b + \mu c)\, V(x \mid c, b + \mu c) = [x + u(x \mid c, b + \mu c)]^r + \lambda_r x^r U_\mu(\|x\|),$$

d'où

$$h_\mu^r(c, b)\, V_\mu(x \mid c, b) = [x + u_\mu(x \mid c, b)]^r + \lambda_r x^r U_\mu(\|x\|),$$

ou, plus brièvement,

$$h_\mu^r V_\mu = (x + u_\mu)^r + \lambda_r x^r U_\mu(\|x\|). \tag{4}$$

Soit m un entier quelconque positif, et désignons par

$$f(x) = \sum_m^r {}^\nu a_\nu \frac{x^\nu}{\underline{|\nu}} \tag{5}$$

une fonction rationnelle entière quelconque.

On aura, pour $\mu = 0, 1, 2, \ldots m$,

$$f^{\mu}(x) = \sum_{m}^{r} {}^{\nu} a_{\nu} \frac{x^{\nu-\mu}}{\underline{|\nu-\mu}},$$

d'où, d'après l'égalité (2),

$$(6) \qquad f^{\mu}(h_{\mu}) = \sum_{m}^{r} {}^{\nu} a_{\nu} k_b^{\nu} = f(h).$$

Or, l'on aura

$$f(h)\, V = f(x+u) + \varphi(x)\, U(|x|)$$

ainsi que

$$(7) \qquad f(h)\, V_{\mu} = f^{\mu}(h_{\mu})\, V_{\mu} = f^{\mu}(x+u_{\mu}) + \varphi_{\mu}(x)\, U_{\mu}(|x|),$$

$$\text{pour } \mu = 0, 1, 2, \ldots m.$$

Je me servirai des équations (7) pour étudier de plus près les relations linéaires qui pourront exister d'abord entre trois fonctions consécutives, V_n, V_{n+1} et V_{n+2}, ou, en faisant un simple échange des paramètres, entre une fonction V quelconque et ses deux premières dérivées, V_1 et V_2.

En effet, soient d'abord $x_0\, x_1 \ldots x_n$, $C_0\, C_1 \ldots C_n$, $C'_0\, C'_1 \ldots C'_n$, $C''_0\, C''_1 \ldots C''_n$ des nombres rationnels donnés arbitraires.

Posons, pour abréger,

$$W_k(x) = C_k\, V(x) + C'_k\, V_1(x) + C''_k\, V_2(x),$$

et supposons qu'il existe une relation de la forme

$$(8) \qquad W = \sum_{0}^{n} {}^{k} W_k(x_k) = 0.$$

On pourra, comme nous l'avons déjà plusieurs fois remarqué, supposer que tous les x et C soient des entiers et tous les x distincts.

Considérons d'abord le cas où

$$n = 0 \quad \text{et} \quad x_0 = 0,$$

on aura

$$W = C_0\, V(0) + C'_0\, V'(0) + C''_0\, V''(0) = C_0 + \frac{C'_0}{b} + \frac{C''_0}{b(b+c)},$$

et la condition nécessaire et suffisante pour que

$$W = 0,$$

deviendra, dans ce cas spécial, que

$$C_0 + \frac{C'_0}{b} + \frac{C''_0}{b\,(b+c)} = 0.$$

Dans tous les autres cas nous pourrons supposer comme auparavant que les x_i soient ordonnés de sorte que

$$x_0 \neq 0.$$

On aura

$$\frac{u_\alpha^{\nu-\alpha}}{\underline{|\nu-\alpha}} = (b + \overline{\nu - 1}\, c)\frac{u_\alpha^{\nu-\alpha-1}}{\underline{|\nu-\alpha-1}} + c\,x\,\frac{u_\alpha^{\nu-\alpha-2}}{\underline{|\nu-\alpha-2}}$$

$$(\alpha = 0,\ 1,\ 2;\quad \nu \geq \alpha + 2).$$

Posons donc, pour abréger,

$$(9)\quad \begin{cases} v_k^0(x) = C_k \\ v_k^1(x) = b\,C_k + C'_k \\ \dfrac{v_k^2(x)}{\underline{|2}} = C_k\{cx + b\,(b+c)\} + C'_k\,(b+c) + C''_k = (b+c)\,v_k^1(x) + C_k\,c\,x + C''_k, \\ \text{et, pour l'indice } \nu \geq 3, \\ \dfrac{v_k^\nu(x)}{\underline{|\nu}} = C_k\,\dfrac{u^\nu(x)}{\underline{|\nu}} + C'_k\,\dfrac{u_1^{\nu-1}(x)}{\underline{|\nu-1}} + C''_k\,\dfrac{u_2^{\nu-2}(x)}{\underline{|\nu-2}}, \end{cases}$$

nous aurons, pour l'indice $\nu \geq 3$,

$$(10)\qquad \frac{v_k^\nu}{\underline{|\nu}} = (b + \overline{\nu-1}\,c)\frac{v_k^{\nu-1}}{\underline{|\nu-1}} + c\,x\,\frac{v_k^{\nu-2}}{\underline{|\nu-2}}.$$

En désignant par

$$f(x) = \sum_2^r {}_\nu\, a_\nu \frac{x^\nu}{\underline{|\nu}}$$

une fonction entière rationnelle donnée arbitraire, on obtiendra

$$(11')\qquad 0 = f(h)\,W = \sum_0^n {}_k\left[C_k\,f(x_k + u) + C'_k\,f'(x_k + u_1) + C''_k\,f''(x_k + u_2)\right] + \chi.$$

Or, étant

$$f^\alpha(x + u_\alpha) = \sum_2^r {}_\nu\, a_\nu \sum_0^{\nu-\alpha} {}_\mu \frac{x^\mu}{\underline{|\mu}}\,\frac{u_\alpha^{\nu-\alpha-\mu}}{\underline{|\nu-\alpha-\mu}},$$

on aura

$$C_k\,f(x+u) + C'_k\,f'(x+u) + C''_k\,f''(x+u) = f(x + v_k)$$

et, par suite, d'après l'équation (11'),

$$0 = \sum_0^n {}^k f[x_k + v_k(x_k)] + \chi = A + \chi. \tag{11}$$

Soient maintenant λ et p deux entiers positifs quelconques choisis de la même manière que p. 249.

Posons

$$f(x) = \frac{x^2 (x - x_0)^\lambda}{\underline{|\lambda}} \prod_1^n {}^i (x - x_i)^p.$$

A représentera un nombre entier, tandis que l'on aura, pour p assez grand — quelle que soit la valeur de λ prise dans l'intervalle (i) —

$$|\chi| < 1,$$

ce qui entraîne

$$A = 0.$$

Or, l'on aura

$$A = [x_0 + v_0(x_0)]^2 \frac{v_0^\lambda(x_0)}{\underline{|\lambda}} \prod_1^n {}^i [x_0 - x_i + v_0(x_0)]^p +$$

$$+ \sum_1^n {}^k [x_k + v_k(x_k)]^2 \frac{[x_k - x_0 + v_k(x_k)]^\lambda}{\underline{|\lambda}} v_k^p(x_k) \prod_1^n {}^i [x_k - x_i + v_k(x_k)]^p.$$

Si donc p est un nombre premier assez grand, on aura

$$A \equiv [x_0 + v_0(x_0)]^2 \frac{v_0^\lambda(x_0)}{\underline{|\lambda}} \prod_1^n {}^i (x_0 - x_i)^p \qquad (\text{mod. } p).$$

Supposons, de plus, que

$$p > \left| \prod_1^n {}^i (x_0 - x_i) \right|,$$

on aura

$$[x_0 + v_0(x_0)]^2 \frac{v_0^\lambda(x_0)}{\underline{|\lambda}} \equiv 0 \qquad (\text{mod. } p). \tag{12}$$

Si l'on remplace d'abord λ par $p - 1$, on obtiendra

$$x_0^2 \frac{v_0^{p-1}(x_0)}{\underline{|p-1}} \equiv 0 \qquad (\text{mod. } p)$$

ou, si l'on a pris $p > |x_0|$,

$$\frac{v_0^{p-1}(x_0)}{\underline{|p-1}} \equiv 0 \qquad (\text{mod. } p).$$

Posons, en second lieu, $\lambda = p - 2$; on aura pour la même raison

$$\frac{v_0^{p-2}(x_0)}{\lfloor p-2} \equiv 0 \qquad (\text{mod. } p).$$

D'après l'égalité (10) on aura dès lors, si l'on a pris

$$p > |c x_0|,$$

pour tous les $\nu \leq p - 1$ (sauf éventuellement la valeur $\nu = 0$),

$$\frac{v_0^{\nu}(x_0)}{\lfloor \nu} \equiv 0 \qquad (\text{mod. } p).$$

On aura donc

$$v_0^1(x_0) = 0, \quad \text{c'est-à-dire} \qquad b C_0 + C'_0 = 0$$

$$v_0^2(x_0) = 0, \quad \text{et, par conséquent,} \ c x_0 C_0 + C''_0 = 0.$$

On pourra aisément vérifier que les dernières égalités représentent la condition non seulement nécessaire mais encore *suffisante*, pour que l'on ait

$$W_0(x_0) = 0.$$

En effet, si l'on admet

$$C'_0 = -b C_0 \quad \text{et} \quad C''_0 = -c x_0 C_0,$$

on aura

$$W_0(x_0) = C_0 V(x_0) + C'_0 V_1(x_0) + C''_0 V_2(x_0) = C_0 \{ V(x_0) - b V_1(x_0) - c x_0 V_2(x_0) \},$$

et $W_0(x_0)$ s'évanouira donc à cause de l'équation (1) p. 240.

Nous pouvons donc établir la proposition suivante:

Théorème. *$x_0 x_1 \ldots x_n$ désignant $(n+1)$ nombres rationnels inégaux, et $C_0 C_1 \ldots C_n$, $C'_0 \ldots C'_n$, $C''_0 \ldots C''_n$ étant des nombres rationnels quelconques, si l'on pose, pour abréger,*

$$W_k(x) = C_k V(x) + C'_k V_1(x) + C''_k V_2(x),$$

il ne peut exister une relation de la forme

$$W = \sum_0^n {}^k W_k(x_k) = 0, \tag{8}$$

sans que chacun des termes

$$W_k(x_k) = 0,$$

et, pour que cela ait lieu, il faut et il suffit que, x_k étant $\neq 0$, $W_k(x_k)$ se réduise à l'expression

$$(13) \qquad C_k[V(x_k) - b\, V_1(x_k) - c\, x_k\, V_2(x_k)],$$

qui est nulle par définition de la fonction V, ou que, x_k étant $= 0$, on ait

$$C_k + \frac{C'_k}{b} + \frac{C''_k}{b(b+c)} = 0.$$

J'observe que, b et c étant $\neq 0$, et $V(x)$, $V_1(x)$, $V_2(x)$ ne pouvant prendre aucune valeur rationnelle ou nulle pour des valeurs rationnelles quelconques de x différentes de zéro, aucun des termes de l'expression (13) ne peut s'évanouir ou prendre une valeur rationnelle.

Nous retrouvons donc sous une forme généralisée *le théorème précité de M. Hurwitz,*[1] à savoir

«Pour des valeurs rationnelles données de l'argument différentes de zéro, d'ailleurs arbitraires, il ne peut jamais se faire que

$$V,\ V',\ V'',\ \frac{V'}{V} \text{ ou } \frac{V''}{V}$$

soit égal à zéro ou ait une valeur rationnelle; et, d'une façon générale, il ne peut exister aucune relation de la forme

$$p\,V + q\,V' = r, \text{ ou}$$
$$p\,V + q\,V'' = r,$$

p, q, r désignant des nombres rationnels, qui ne sont pas tous égaux à zéro.»

Des recherches de M. Hurwitz résulte, comme nous l'avons mentionné dans le § respectif, que, si la dérivée logarithmique de V a été développée en fraction continue, soit

$$(14) \qquad c\,x\frac{V'}{V} = \left[\frac{c\,x}{k\,c + b}\right],$$

et si l'on désigne par

$$\frac{\psi_\mu}{\varphi_\mu}$$

la réduite $\mu^{\text{ième}}$ de cette fraction continue, on aura

$$(15) \qquad (-1)^\mu c^\mu x^\mu V_\mu = \psi_\mu V - \varphi_\mu c x V_1,$$

où ψ_μ et φ_μ doivent être des polynômes rationnels de x, b et c à coefficients entiers.

---

[1] Hurwitz, loc. cit.

Soient maintenant $x_0\, x_1 \ldots x_n$ $(n+1)$ nombres rationnels inégaux; désignons par m un entier positif quelconque, et soient

$$C_k^\mu \begin{pmatrix} k = 0, 1, \ldots n \\ \mu = 0, 1, \ldots m \end{pmatrix}$$

des nombres rationnels quelconques.

Posons, en outre,

$$W_k = \sum_0^m{}^\mu C_k^\mu V_\mu(x_k)$$

et

$$W = \sum_0^n{}^k W_k.$$

Nous aurons évidemment

$$W_k = \sum_0^m{}^\mu \frac{C_k^\mu \psi_\mu(x_k)}{(-c)^\mu x_k^\mu} V(x_k) - \sum_0^m{}^\mu \frac{C_k^\mu \varphi_\mu(x_k)}{(-c)^\mu x_k^\mu} c x_k V_1(x_k).$$

Posons, pour abréger,

$$W_k = \Psi_k(x_k)\, V(x_k) - \Phi_k(x_k)\, V_1(x_k).$$

On aura donc la proposition générale suivante:

Théorème. *Si nous supposons tous les $x_0\, x_1 \ldots x_n$ différents de zéro, W ne peut prendre aucune valeur rationnelle différente de zéro. Pour que*

$$W = 0,$$

il faut que chacun des termes

$$W_k = 0,$$

et, pour que cela ait lieu, on doit avoir

$$\Psi_k(x_k) = 0 \quad \text{et} \quad \Phi_k(x_k) = 0.$$

La condition nécessaire et suffisante pour que

$$W = 0,$$

doit donc être exprimée par un système de *critériums algébro-arithmétiques.*

J'observerai enfin qu'aussi le théorème de LINDEMANN peut sans grande difficulté être généralisé d'une façon analogue.

CHAPITRE III.

Sur quelques cas de séries hypergéométriques généralisées.

§ 1. La méthode employée dans le chapitre précédent peut être utilisée dans une certaine mésure pour une étude arithmétique aussi des intégrales de certaines équations différentielles d'un type plus général que celles que nous avons étudiées jusqu'ici.

Examinons par exemple d'un peu plus près les intégrales de l'équation différentielle suivante:

$$(1') \qquad \sum_0^m {}^\mu\, b_\mu x^\mu V_{\mu+1} = a_0 V,$$

équation dont celle qui a fait l'objet des recherches de M. Hurwitz est un cas spécial correspondant à $m = 2$.

Cette équation (1') est à son tour un cas spécial de l'équation différentielle plus générale des séries hypergéométriques généralisées.

Appliquons les notations introduites dans ce qui précède. Soit $k_\lambda^\nu(-1)$ ou plus simplement

$$(2) \qquad \begin{cases} k_\lambda^\nu = \dfrac{\underline{|\lambda}}{\underline{|\lambda - \nu}}, \text{ pour } \nu \leq \lambda \\ \text{et} = 0, \text{ pour } \nu > \lambda. \end{cases}$$

$a_0, a_1 \ldots a_m$, $b_0 b_1 \ldots b_m$ désignant des nombres rationnels donnés arbitraires, soient de plus

$$f_\lambda = \sum_0^m {}^\nu\, a_\nu k_\lambda^\nu \quad \text{et} \quad g_\lambda = \sum_0^m b_\nu k_\lambda^\nu$$

$$(\lambda = 0, 1, 2, \ldots \text{ad inf.}).$$

f_λ et g_λ pourront s'écrire sous la forme

$$(3') \qquad \begin{cases} f_\lambda = f(k_\lambda) \text{ et } g_\lambda = g(k_\lambda), \text{ où} \\ f(x) = \sum_0^m {}^\nu\, a_\nu x^\nu \text{ et } g(x) = \sum_0^m b_\nu x^\nu. \end{cases}$$

Soit, en outre,

$$F_0 = 1 = G_0,$$

et, pour $\lambda \geq 1$,

$$(4) \qquad \begin{cases} F(\lambda) = \prod_0^{\lambda-1} {}^i f_i \\ G(\lambda) = \prod_0^{\lambda-1} {}^i g_i \end{cases}$$

et posons enfin, pour abréger,

$$(5) \qquad \Pi_\lambda = \frac{G(\lambda)}{F(\lambda)}.$$

Nous aurons donc

$$(6) \qquad f_\lambda \Pi_{\lambda+1} = g_\lambda \Pi_\lambda.$$

Ceci posé, considérons la fonction

$$(7) \qquad V = \sum_0^\infty {}^\lambda \frac{x^\lambda}{\Pi_\lambda \lfloor\!\underline{\lambda}}.$$

Cette fonction, qui est le type des séries hypergéométriques généralisées, satisfait évidemment à l'équation différentielle

$$(1) \qquad b_m x^m V_{m+1} = \sum_1^m {}^\mu (a_\mu x - b_{\mu-1}) x^{\mu-1} V_\mu + a_0 V.$$

Si $a_m \neq 0$, mais $b_m = 0 = b_{m-1}$, la série (7) est, comme on le voit, toujours divergente et n'aura par conséquent pas de sens déterminé.

Si $a_m \neq 0$ et $b_m = 0$, mais $b_{m-1} \neq 0$, la fonction $V(x)$ aura en dehors de $x = \infty$ encore un point singulier essentiel situé à une distance finie de l'origine.

Si, finalement, $b_m \neq 0$, il est évident que la série (7) convergera dans tout le plan.

Nous bornerons — du moins pour le présent — nos recherches à ce dernier cas.

Dans le mémoire précité de M. HURWITZ, publié dans le tome 32 des Math. Annalen, l'auteur traite aussi les séries hypergéométriques généralisées.

M. HURWITZ part, en étudiant l'équation (1), de l'hypothèse essentielle que $b_m \neq 0$ et que $a_m = 0$. La série (7) sera alors non seulement convergente dans tout le plan, mais elle convergera si fortement, que $b_m^\mu x^{m\mu} V_\mu$ diminueront constamment et indéfiniment, lorsque l'indice μ va en croissant.

On peut par conséquent reprendre le raisonnement de la p. 239 et montrer que, dans les circonstances indiquées, il est impossible que toutes les relations

$$V : V_1 : V_2 : \ldots : V_m$$

soient rationnelles pour des valeurs rationnelles de l'argument.[1]

Dans ces recherches, nous pourrons cependant laisser de côté la restriction $a_m = 0$, qui est pour nous sans importance.

Désignons donc par $a_{m'}$ le nombre a_μ de l'indice le plus haut, qui est $\neq 0$. Supposons $b_m \neq 0$ et $m' \leq m$, de sorte que f_λ soit au plus du même degré dans λ que g_λ.

En désignant par r et s des constantes données arbitraires, nous aurons

$$V(rx \,|\, sa_0 \ldots sa_m,\ rsb_0 \ldots rsb_m) = V(x \,|\, a_0 \ldots a_m,\ b_0 \ldots b_m),$$

ce que nous abrégeons de la manière suivante:

$$V(rx \,|\, sa,\ rsb) = V(x \,|\, a,\ b).$$

Donc, il suffit encore pour ces fonctions plus générales de supposer, comme nous l'avons fait dans les cas précédents, que les paramètres $a_0 a_1 \ldots a_m$, $b_0 b_1 \ldots b_m$ soient des nombres *entiers*, avec $b_m > 0$ et $a_{m'} > 0$, et que l'argument x ne prenne pas d'autres valeurs algébriques que des valeurs algébriques *entières*.

---

[1] Hurwitz: loc. cit.

En corrigeant les épreuves de cette étude, mon attention a été attirée par un article publié ces jours-ci par M. O. Perron: Ueber lineare Differenzen- und Differentialgleichungen (Math. Annalen, Band 66, Heft. 4, 1909), où l'auteur consacre un chapitre aux recherches précitées de M. Hurwitz.

M. Perron, qui a développé l'algorithme bien connu, introduit dans un mémoire posthume de Jacobi et généralisant les fractions continues, a eu l'idée très naturelle de se servir de ces algorithmes afin de trouver, pour certaines fonctions générales, la correspondance exacte de la propriété que Legendre et Hurwitz ont prouvée pour les fonctions de Bessel à l'aide de l'algorithme ordinaire des fractions continues.

La proposition de M. Perron est énoncée de la manière suivante:

»*Désignons par $Q_0\, Q_1 \cdots Q_n$ une suite de polynômes rationnels, soit*

$$Q_i(x) = \sum_0^i{}^\lambda a_{\lambda . i} x^\lambda \qquad (i = 0, 1, \ldots n),$$

où nous supposons $a_{n.n} \neq 0$.

Il existera toujours une fonction entière transcendante, soit

$$y = V(x),$$

déterminée à un facteur constant près, qui satisfait à l'équation différentielle

$$Q_n(x) y^{(n+1)} + \ldots + Q_1(x) y'' + Q_0(x) y' - y = 0.$$

Or, soient tous les $a_{\lambda . i}$ des nombres rationnels et x_0 un nombre rationnel quelconque, qui n'annule pas le coefficient $Q_n(x_0)$, et désignons par $C_0\, C_1 \ldots C_n$ des nombres rationnels quelconques, qui ne soient pas tous égaux à zéro.

Il ne peut jamais exister une relation de la forme

$$\sum_0^k C_k V_k(x_0) = 0.«$$

Nous avons trouvé (lemme 2, p. 242), pour des valeurs quelconques de r et de $\lambda \leq r$, les relations suivantes:

$$(8)\qquad \left\{\begin{aligned} f_r &= \sum_{0}^{m}{}^{\nu} k_{r-\lambda}^{\nu} \frac{f^{\nu}(k_\lambda)}{\underline{|\nu}} = f_\lambda + \sum_{1}^{m}{}^{\nu} \frac{\underline{|r-\lambda}}{\underline{|r-\lambda-\nu}\,\underline{|\nu}} f^{\nu}(k_\lambda) \\ g_r &= \sum_{0}^{m}{}^{\nu} k_{r-\lambda}^{\nu} \frac{g^{\nu}(k_\lambda)}{\underline{|\nu}} = g_\lambda + \sum_{1}^{m}{}^{\nu} \frac{\underline{|r-\lambda}}{\underline{|r-\lambda-\nu}\,\underline{|\nu}} g^{\nu}(k_\lambda). \end{aligned}\right.$$

Introduisons maintenant une suite de fonctions $u^{\lambda}(x)$ par les formules récurrentes suivantes.

Soit $u^0 = 1$, et soit, pour $\lambda \geq 1$,

$$f_\lambda \frac{u^{\lambda+1}}{\underline{|\lambda+1}} = \sum_{0}^{m}{}^{\nu} \alpha_\nu(\lambda) x^{\nu} \frac{u^{\lambda-\nu}}{\underline{|\lambda-\nu}} - \sum_{1}^{m}{}^{\nu} \beta_\nu(\lambda) x^{\nu} \frac{u^{\lambda+1-\nu}}{\underline{|\lambda+1-\nu}} =$$

$$= \sum_{0}^{m}{}^{\nu} \{ \alpha_\nu(\lambda) - x\beta_{\nu+1}(\lambda) \} x^{\nu} \frac{u^{\lambda-\nu}}{\underline{|\lambda-\nu}},$$

$$\text{où } \beta_{m+1} = 0,$$

et où l'on aura encore

$$\alpha_\nu(\lambda) = 0 \text{ et } \beta_\nu(\lambda) = 0 \text{ pour } \lambda < \nu.$$

Nous aurons donc, en nous servant de notations symboliques analogues à celles introduites dans le chapitre précédent,

$$f_r \frac{(x+u)^{r+1}}{\underline{|r+1}} - f_r \frac{x^{r+1}}{\underline{|r+1}} = \sum_{0}^{r}{}^{\lambda} f_r \frac{u^{\lambda+1}}{\underline{|\lambda+1}} \frac{x^{r-\lambda}}{\underline{|r-\lambda}} =$$

$$= \sum_{0}^{r}{}^{\lambda} f_\lambda \frac{u^{\lambda+1}}{\underline{|\lambda+1}} \frac{x^{r-\lambda}}{\underline{|r-\lambda}} + \sum_{1}^{m}{}^{\nu} x^{\nu} \sum_{0}^{r-\nu}{}^{\lambda} \frac{f^{\nu}(k_\lambda)}{\underline{|\nu}} \frac{u^{\lambda+1}}{\underline{|\lambda+1}} \frac{x^{r-\lambda-\nu}}{\underline{|r-\lambda-\nu}} =$$

$$= \sum_{0}^{m}{}^{\nu} x^{\nu} \sum_{\nu}^{r}{}^{\lambda} \alpha_\nu(\lambda) \frac{u^{\lambda-\nu}}{\underline{|\lambda-\nu}} \cdot \frac{x^{r-\lambda}}{\underline{|r-\lambda}} - \sum_{1}^{m}{}^{\nu} x^{\nu} \sum_{\nu}^{r}{}^{\lambda} \beta_\nu(\lambda) \frac{u^{\lambda+1-\nu}}{\underline{|\lambda+1-\nu}} \frac{x^{r-\lambda}}{\underline{|r-\lambda}} +$$

$$+ \sum_{1}^{m}{}^{\nu} x^{\nu} \sum_{\nu}^{r}{}^{\lambda} \frac{f^{\nu}(k_{\lambda-\nu})}{\underline{|\nu}} \frac{u^{\lambda+1-\nu}}{\underline{|\lambda+1-\nu}} \cdot \frac{x^{r-\lambda}}{\underline{|r-\lambda}}.$$

Je pose

$$\left.\begin{aligned} \alpha_\nu(\lambda) &= \frac{g^{\nu}(k_{\lambda-\nu})}{\underline{|\nu}} \\ \beta_\nu(\lambda) &= \frac{f^{\nu}(k_{\lambda-\nu})}{\underline{|\nu}} \end{aligned}\right\} (\nu = 0, 1 \ldots m),$$

et je trouve

$$f_r \frac{(x+u)^{r+1}}{\lfloor\underline{r+1}} - f_r \frac{x^{r+1}}{\lfloor\underline{r+1}} = \sum_0^m {}_\nu\, x^\nu \sum_\nu^r {}_\lambda \frac{g^\nu(k_{\lambda-\nu})}{\lfloor\underline{\nu}} \frac{u^{\lambda-\nu}}{\lfloor\underline{\lambda-\nu}} \frac{x^{r-\lambda}}{\lfloor\underline{r-\lambda}} =$$

$$= \sum_0^m {}_\nu \sum_0^{r-\nu} {}_\lambda \frac{g^\nu(k_\lambda)}{\lfloor\underline{\nu}} \frac{u^\lambda}{\lfloor\underline{\lambda}} \frac{x^{r-\lambda}}{\lfloor\underline{r-\lambda-\nu}} =$$

$$= \sum_0^m {}_\nu \sum_0^r {}_\lambda\, k^\nu_{r-\lambda} \frac{g^\nu(k_\lambda)}{\lfloor\underline{\nu}} \frac{u^\lambda}{\lfloor\underline{\lambda}} \frac{x^{r-\lambda}}{\lfloor\underline{r-\lambda}},$$

ou

$$f_r \frac{(x+u)^{r+1}}{\lfloor\underline{r+1}} - f_r \frac{x^{r+1}}{\lfloor\underline{r+1}} = g_r \frac{(x+u)^r}{\lfloor\underline{r}}.$$

On a donc

$$\text{(9)} \qquad \frac{(x+u)^{r+1}}{\Pi_{r+1}\lfloor\underline{r+1}} = \sum_0^{r+1} {}_\nu \frac{x^\nu}{\Pi_\nu \lfloor\underline{\nu}}.$$

Les fonctions $u^\nu(x)$ doivent ici être définies par les formules de récurrence suivantes:

u^0 désignera toujours le nombre un, et, pour $\lambda \geq 0$, on aura

$$\text{(10)} \qquad \begin{cases} \displaystyle\sum_0^m {}_\nu \frac{f^\nu(k_{\lambda-\nu})}{\lfloor\underline{\nu}} x^\nu \frac{u^{\lambda+1-\nu}}{\lfloor\underline{\lambda+1-\nu}} = \sum_0^m {}_\nu \frac{g^\nu(k_{\lambda-\nu})}{\lfloor\underline{\nu}} x^\nu \frac{u^{\lambda-\nu}}{\lfloor\underline{\lambda-\nu}}, \text{ ou} \\ \displaystyle f_\lambda \frac{u^{\lambda+1}}{\lfloor\underline{\lambda+1}} = \sum_0^m {}_\nu \left[\frac{g^\nu(k_{\lambda-\nu})}{\lfloor\underline{\nu}} - x \frac{f^{\nu+1}(k_{\lambda-\nu-1})}{\lfloor\underline{\nu+1}}\right] x^\nu \frac{u^{\lambda-\nu}}{\lfloor\underline{\lambda-\nu}} \end{cases}$$

Si nous introduisons ensuite la notation

$$h^r = u^r(0) = \lfloor\underline{r} \frac{G(r)}{F(r)} = \lfloor\underline{r}\, \pi_r,$$

nous aurons

$$\text{(11')} \qquad h^r V = (x+u)^r + x^r \chi_r(x),$$

où

$$\chi_r(x) = \sum_1^\infty {}_\nu \frac{\pi_r \lfloor\underline{r}}{\pi_{r+\nu}\lfloor\underline{r+\nu}} x^\nu.$$

Or, nous avons supposé

$$m \geq m'.$$

A partir d'une certaine valeur λ_0 de λ, on aura par suite

$\left|\dfrac{\lambda g_{\lambda-1}}{f_{\lambda-1}}\right|$ supérieur à 1, et constamment et indéfiniment croissant avec λ,

et il en sera de même pour

$$\left|\pi_\lambda \lfloor\underline{\lambda}\right|.$$

Or, soit M la plus grande et m la plus petite des valeurs que prend

$$\left|\frac{\lambda g_{\lambda-1}}{f_{\lambda-1}}\right| \text{ pour } \lambda \leq \lambda_0.$$

On peut toujours trouver un nombre $\varkappa \geq \lambda_0$, assez grand pour que

$$\left|\pi_\varkappa \lfloor\underline{\varkappa}\right| > \left(\frac{M}{m}\right)^{\lambda_0},$$

et que, pour toute valeur de λ inférieure à $\varkappa$,

$$\left|\pi_\lambda \lfloor\underline{\lambda}\right| \leq \left|\pi_\varkappa \lfloor\underline{\varkappa}\right|.$$

Soit maintenant, en premier lieu, $r \geq \varkappa$, on aura évidemment

$$\left|\frac{\pi_r \lfloor\underline{r}}{\pi_{r+\nu}\lfloor\underline{r+\nu}}\right| \leq \left|\frac{\pi_\varkappa \lfloor\underline{\varkappa}}{\pi_{\varkappa+\nu}\lfloor\underline{\varkappa+\nu}}\right| \leq \left|\frac{\pi_\varkappa \lfloor\underline{\varkappa}}{\pi_\nu \lfloor\underline{\nu}}\right|.$$

En second lieu, si $r < \varkappa$ et $\nu \geq \lambda_0$, on aura

$$\left|\pi_r \lfloor\underline{r}\right| < \left|\pi_\varkappa \lfloor\underline{\varkappa}\right|$$

et

$$\left|\frac{1}{\pi_{r+\nu}\lfloor\underline{r+\nu}}\right| < \left|\frac{1}{\pi_\nu \lfloor\underline{\nu}}\right|.$$

Soit enfin $\nu < \lambda_0$, on aura

$$\left|\frac{\pi_r \lfloor\underline{r}}{\pi_{r+\nu}\lfloor\underline{r+\nu}}\right| \leq \frac{1}{m^\nu}$$

et

$$\left|\pi_\nu \lfloor\underline{\nu}\right| \leq M^\nu,$$

d'où

$$\left|\frac{\pi_r \lfloor\underline{r}}{\pi_{r+\nu}\lfloor\underline{r+\nu}}\pi_\nu \lfloor\underline{\nu}\right| \leq \left(\frac{M}{m}\right)^\nu \leq \left(\frac{M}{m}\right)^{\lambda_0} < \left|\pi_\varkappa \lfloor\underline{\varkappa}\right|.$$

Par conséquent, on aura dans tous les cas

$$\left|\frac{\pi_r \underline{|r}}{\pi_{r+r}\underline{|r+\nu}}\right| \leq \left|\frac{\pi_\varkappa \underline{|\varkappa}}{\pi_\nu \underline{|\nu}}\right|.$$

Soit dès lors

$$U(x) = |\pi_\varkappa \underline{|\varkappa}| \sum_0^\infty{}^\nu \frac{x^\nu}{|\pi_\nu \underline{|\nu}|},$$

on aura toujours

$$|\chi_r(x)| \leq U(|x|).$$

L'équation (11') pourra donc être écrite sous la forme suivante

(11) $$h^r V = (x+u)^r + \lambda_r x^r U(|x|), \text{ où } |\lambda_r(x)| \leq 1.$$

Soit, comme auparavant,

$$f(x) = \sum_0^n{}^\nu a_\nu \frac{x^\nu}{\underline{|\nu}}$$

une fonction rationnelle entière quelconque, et posons

$$\varphi(x) = \sum_0^n{}^\nu a_\nu \lambda_\nu \frac{x^\nu}{\underline{|\nu}},$$

nous aurons

(12) $$f(h)V(x) = f(x+u) + \varphi(x)U(|x|),$$

où l'on aura

$$|\varphi(x)| \leq \sum_0^n{}^\nu \left|a_\nu \frac{x^\nu}{\underline{|\nu}}\right|.$$

Soient $x_0 x_1 \ldots x_n$ $(n+1)$ nombres donnés rationnels inégaux — il suffit de les supposer tous entiers — et soient $C_0 C_1 \ldots C_n$ des entiers quelconques $\neq 0$.

Posons, pour abréger,

$$W = \sum_0^n{}^k C_k V(x_k),$$

et supposons qu'on ait

(13) $$W = 0.$$

Soient λ et p deux entiers positifs, dont $p > \lambda$.

Nous supposons, comme dans le chapitre précédent, que p soit un nombre impair et que λ doive être choisi dans l'intervalle

$$(i) \qquad \frac{p-1}{2} \leq \lambda \leq p-1.$$

Soit, de plus,

$$f(x) = \frac{(x-x_0)^\lambda}{\lfloor\lambda} \prod_1^n {}^i (x-x_i)^p,$$

on aura

$$(14) \qquad 0 = f(h) \sum_0^n {}^k C_k V(x_k) = A + B + C,$$

où l'on a posé, pour abréger,

$$A = C_0 \frac{u^\lambda(x_0)}{\lfloor\lambda} \prod_1^n {}^i (x_0 - x_i + u(x_0))^p$$

$$B = \sum_1^n {}^k C_k \frac{[x_k - x_0 + u(x_k)]^\lambda}{\lfloor\lambda} u^p(x_k) \prod_1^n {}^{\prime i} (x_k - x_i + u(x_k))^p$$

$$C = \sum_0^n {}^k C_k \varphi(x_k) U(|x_k|).$$

p peut être pris assez grand, pour que

$$|C| \text{ soit} < 1,$$

quelle que soit la valeur donnée de λ, prise dans l'intervalle (i).

Des relations analogues peuvent facilement être démontrées aussi pour des combinaisons linéaires arbitraires entre V et ses dérivées.

En effet, on aura, V_μ désignant toujours la derivée $\mu^{\text{ième}}$ de V,

$$V = \sum_0^\infty {}^\nu \frac{F_\nu x^\nu}{G_\nu \lfloor\nu} = \sum_0^\infty {}^\nu \frac{x^\nu}{\pi_\nu \lfloor\nu},$$

$$V_\mu = \sum_0^\infty {}^\nu \frac{F_{\nu+\mu} x^\nu}{G_{\nu+\mu} \lfloor\nu} = \sum_0^\infty {}^\nu \frac{x^\nu}{\pi_{\nu+\mu} \lfloor\nu},$$

$$h^\nu V_\mu = \lfloor\nu\, \pi_\nu V_\mu = \frac{\lfloor\nu}{\lfloor\nu-\mu} (x + u_\mu)^{\nu-\mu} + R,$$

où j'ai désigné, pour abréger, par R le restant des termes.

Donc

$$f(h)V_\mu = f^\mu(x+u_\mu) + R.$$

Soit

$$W = \sum_0^n{}^\mu C_\mu V_\mu(x),$$

il en résulte que

$$f(h)W = \sum_0^n{}^\mu C_\mu f^\mu(x+u_\mu) + R.$$

Dès lors, si l'on pose

$$\frac{v^\lambda}{\lfloor\lambda} = \sum_0^n{}^\mu C_\mu \frac{u_\mu^{\lambda-\mu}}{\lfloor\lambda-\mu},$$

on aura

$$f(v) = \sum_0^n{}^\mu C_\mu f^\mu(u_\mu),$$

d'où

$$(15)\qquad f(h)W = f(x+v) + R.$$

Or, mettons

$$f_{\lambda+\mu} = h(k_\lambda) \text{ et } g_{\lambda+\mu} = i(k_\lambda),$$

d'où, d'après le lemme 2, p. 242, on aura

$$h^\nu(k_\lambda) = f^\nu(k_{\lambda+\mu}) \text{ et } i^\nu(k_\lambda) = g^\nu(k_{\lambda+\mu}),$$

ce qui nous donne

$$f_{\lambda+\mu}\frac{u_\mu^{\lambda+1}}{\lfloor\lambda+1} = \sum_0^m{}^\nu \left\{\frac{i^\nu(k_{\lambda-\nu})}{\lfloor\nu} - x\frac{h^{\nu+1}(k_{\lambda-\nu-1})}{\lfloor\nu+1}\right\} x^\nu \frac{u_\mu^{\lambda-\nu}}{\lfloor\lambda-\nu} =$$

$$= \sum_0^m{}^\nu \left\{\frac{g^\nu(k_{\lambda-\nu+\mu})}{\lfloor\nu} - x\frac{f^{\nu+1}(k_{\lambda-\nu-1+\mu})}{\lfloor\nu+1}\right\} x^\nu \frac{u_\mu^{\lambda-\nu}}{\lfloor\lambda-\nu}.$$

Donc

$$f_\lambda \frac{u_\mu^{\lambda-\mu+1}}{\lfloor\lambda-\mu+1} = \sum_0^m{}^\nu \left\{\frac{g^\nu(k_{\lambda-\nu})}{\lfloor\nu} - x\frac{f^{\nu+1}(k_{\lambda-\nu-1})}{\lfloor\nu+1}\right\} x^\nu \frac{u_\mu^{\lambda-\nu-\mu}}{\lfloor\lambda-\nu-\mu},$$

et il en résulte que

$$(16)\qquad f_\lambda \frac{v^{\lambda+1}}{\lfloor\lambda+1} = \sum_0^m{}^\nu \left\{\frac{g^\nu(k_{\lambda-\nu})}{\lfloor\nu} - x\frac{f^{\nu+1}(k_{\lambda-\nu-1})}{\lfloor\nu+1}\right\} x^\nu \frac{v^{\lambda-\nu}}{\lfloor\lambda-\nu}.$$

A l'aide de ces équations (15) et (16), on pourra toujours rendre l'étude de combinaisons linéaires quelconques de V et de toutes ses derivées analogue à l'étude de la seule fonction V, et, par suite, nous pourrons nous borner, dans ce qui suit, à cette dernière étude.

En effet, le raisonnement suivant ne rencontre pas de difficultés.

Désignons par

$$W_k = \sum_1^{m_k}{}^{\mu} \gamma_\mu^k V_\mu(x)$$

une combinaison linéaire quelconque des V, $V_1 \ldots V_{m_k}$, dont les coefficients γ_μ^k soient des nombres rationnels ou des fonctions rationnelles de x à coefficients rationnels.

W_k se réduira toujours, à l'aide de l'équation (1) et des équations qui en auront été obtenues par des différentiations successives, à une combinaison de la forme

$$W_k = \sum_0^m{}^{\mu} C_\mu^k V_\mu(x),$$

dont les coefficients C_μ^k seront de la même nature que γ_μ^k.

Soient $x_0 x_1 \ldots x_n$ $(n + 1)$ valeurs rationnelles de l'argument, toutes distinctes, d'ailleurs arbitraires, et posons

$$W = \sum_0^n{}^k W_k(x_k).$$

Si l'on a montré, par les méthodes ici appliquées, l'impossibilité de toute relation de la forme

$$\sum{}^k C_k V(x_k) = 0,$$

(C_k et x_k étant tous des nombres rationnels), sauf le cas où tous les C_k s'évanouissent, on pourra toujours démontrer, d'une manière tout à fait analogue, la proposition suivante:

La condition nécessaire et suffisante, pour que

$$W = 0,$$

est qu'on ait chacun des termes

$$W_k(x_k) = 0,$$

et cela ne peut avoir lieu, sans que tous les C_μ^k s'annulent (sauf le cas, bien entendu, où l'on a $x_k = 0$, ce qui entraîne, en effet, une solution spéciale évidente).

§ 2. Nous nous bornons dans ce § au cas spécial de l'équation (1').

On doit substituer dans l'équation (1)

$$a_m = 0 = a_{m-1} = \cdots = a_1 ; \; a_0 \neq 0.$$

Comme

$$V(x \mid a_0, b) = V(a_0 x \mid 1, b),$$

on peut toujours supposer $a_0 = 1$.

On voit alors, à l'aide des équations (10), que tous les $\frac{u^\nu}{\lfloor \nu}$ sont des entiers.

Il en sera de même pour A et B, et l'on établira comme dans le chapitre II § 2 que

$$A + B = 0,$$

$$B \equiv 0 \quad (\text{mod. } p),$$

d'où encore

$$A \equiv 0 \quad (\text{mod. } p),$$

tandis que, p étant un nombre premier,

$$A \equiv C_0 \frac{u^\lambda(x_0)}{\lfloor \lambda} \prod_1^n {}^i (x_0 - x_i)^p \qquad (\text{mod. } p),$$

d'où, si l'on prend le nombre premier p suffisamment grand, on tire

$$\frac{u^\lambda(x_0)}{\lfloor \lambda} \equiv 0 \quad (\text{mod. } p). \tag{17}$$

Supposons, d'après le raisonnement repété plusieurs fois dans ce qui précède, que

$$x_0 \neq 0,$$

et choisissons d'abord le nombre premier

$$p > | b_m x_0 |.$$

Soit encore

$$\frac{p-1}{2} > m,$$

et soient ν, $\nu - 1, \ldots \nu - m$ $(m+1)$ nombres consécutifs dans l'intervalle (i), on aura, d'après l'équation (17),

$$\frac{u^{\nu-\varkappa}(x_0)}{\lfloor \nu - \varkappa} \equiv 0 \quad (\text{mod. } p) \qquad (\varkappa = 0, 1, \ldots m).$$

Il en résulte d'après (10)

$$b_m x_0^m \frac{u^{\nu-m-1}}{\underline{|\nu-m-1}} \equiv 0 \qquad (\text{mod. } p),$$

d'où

$$\frac{u^{\nu-m-1}}{\underline{|\nu-m-1}} \equiv 0 \qquad (\text{mod. } p) \text{ etc.}$$

Finalement, on aura donc

$$u^0 \equiv 0 \qquad (\text{mod. } p),$$

ce qui est impossible.

Nous aurons donc le théorème enoncé:

Théorème. *L'équation*

$$W = 0$$

comporte dans tous les cas une impossibilité.

Corollaire. *Même une relation linéaire à coefficients rationnels entre la fonction V et ses dérivées est donc, d'après ce que nous avons dit dans le § précédent, impossible pour des arguments rationnels, sauf les relations, qui sont identiquement réductibles à l'équation différentielle* (1'), *et sauf la relation évidente qui existe entre des fonctions V arbitraires pour $x = 0$.*

Remarquons enfin que même le théorème de Lindemann se déduit ici sans difficulté.

§ **3.** Mon intention a été de poursuivre ces études jusqu'à considérer certains types généraux des séries hypergéométriques généralisées. Si cela réussissait, on obtiendrait, comme on peut facilement le montrer, un point de départ important, qui permettrait d'approfondir considérablement l'étude de notre problème et notamment de l'étendre des relations linéaires entre des fonctions V données à des relations de degré supérieur.

Je me permettrai de rendre compte ici de quelques-unes de mes recherches préliminaires sur certains types plus généraux que ceux qui ont été étudiés dans le § précédent. Elles donnent une idée des difficultés que l'on rencontre, lorsqu'il s'agit de s'attaquer au problème général.

Considérons d'abord la fonction suivante d'un type plus général

$$V = \sum_{0}^{\infty}{}_{\nu} \frac{x^\nu}{H_\nu}, \tag{18*}$$

où l'on a mis

$$H_\nu = h_0 h_1 \ldots h_{\nu-1}$$

$$h_\lambda = h(k_\lambda),$$

$h(x)$ désignant une fonction rationnelle entière à coefficients rationnels, soit

$$(18\,\mathrm{h}) \qquad h(x) = \sum_0^m {}^\nu\, b_\nu x^\nu.$$

Pour plus de précision, nous supposons toujours qu'on ait obtenu, par un échange convenable des paramètres, tous les b_ν entiers.

Si h_λ possède un facteur de la forme $\lambda - \varkappa$, $\varkappa$ désignant un nombre entier quelconque positif, négatif ou nul, V doit être ramené aux fonctions déjà étudiées dans le numéro précédent.

Je suppose donc que h_λ n'ait pas de facteur pareil.

Nous aurons donc tous les $h_\lambda \neq 0$, et, par suite, la fonction V définie par l'égalité (18*) aura toujours un sens déterminé.

J'ajouterai l'observation suivante dont je ferai usage plus loin:

On aura, ce qui est facile à vérifier, pour des valeurs quelconques de λ et de ν,

$$k^\nu_{\lambda-1-\varkappa} \equiv (-1)^\nu k^\nu_{\varkappa+\nu} \quad (\text{mod. } \lambda) \qquad (\varkappa = 0, 1, 2, \ldots).$$

Par suite, si l'on met

$$(18\,\alpha) \qquad \alpha_\varkappa = \sum_0^m {}^\nu (-1)^\nu b_\nu k^\nu_{\varkappa+\nu},$$

on aura toujours

$$h_{\lambda-1-\varkappa} \equiv \alpha_\varkappa \quad (\text{mod. } \lambda) \qquad (\varkappa = 0, 1, 2, \ldots).$$

Ceci posé, supposons qu'on ait pour une valeur donnée de $\varkappa$, soit pour $\varkappa = \varkappa_0$,

$$\alpha_{\varkappa_0} = 0;$$

on aura évidemment tous les h_λ divisibles par $(\lambda + \varkappa_0 + 1)$, ce qui est contraire aux hypothèses.

Par conséquent, on aura tous les

$$\alpha_\varkappa \neq 0.$$

Supposons maintenant que h_λ contienne un facteur linéaire de λ, soit

$$h_\lambda = (b + c\lambda) g_\lambda.$$

Par hypothèse, on devra avoir évidemment $b \neq 0$, et, d'une façon générale,

$|b|$ ne doit pas être divisible par $|c|$.

Posons, d'après les notations introduites plus haut,

$$k_b^\nu = b(b+c)\ldots(b+c\,\overline{\nu-1}),$$

l'égalité (18*) se transformera dans

$$(18)\qquad V = \sum_0^\infty {}_\nu \frac{x^\nu}{k_b^\nu G_\nu}.$$

C'est-là la fonction que je veux étudier.

Considérons d'abord la fonction plus simple

$$(18')\qquad V = \sum_0^\infty {}_\nu \frac{x^\nu}{k_b^\nu}.$$

Cette fonction est une généralisation très simple de la fonction exponentielle, et, pour le cas que nous avons excepté,

$$b \equiv 0 \qquad (\text{mod. } c),$$

elle se transformera dans ladite fonction.

Je rappelle en passant que M. RATNER a montré, Math. Annalen tome 32, l'impossibilité de généraliser jusqu'à ce type de fonction les lemmes auxiliaires sur lesquels M. HURWITZ basait dans ses recherches antérieures sa démonstration.

Cependant le raisonnement de M. RATNER montre seulement que les *méthodes* employées par M. HURWITZ ne se laissent pas généraliser au delà de certains types de fonctions déterminés, mais ne prouve rien contre la possibilité d'une extension pareille des *résultats* auxquels M. HURWITZ a voulu arriver.

La fonction V, définie par l'équation (18'), est évidemment une intégrale particulière de l'équation différentielle linéaire non homogène

$$(19')\qquad cxV_1 + (b-c-x)V = b-c$$

ou de l'équation différentielle linéaire homogène

$$(19)\qquad cxV_2 + (b-x)V_1 - V = 0.$$

L'intégrale générale de ces équations doit être représentée, comme on le voit, par une combinaison linéaire de l'intégrale particulière donnée par l'équation (18') et d'une fonction exponentielle.[1]

[1] Je me sers ici et ailleurs de ce terme dans le sens étendu d'une combinaison de fonctions algébriques et de séries exponentielles de fonctions algébriques.

L'équation (19) est, comme on le voit, un cas particulier de l'équation (1), pour

$$m = 1, \quad b_1 = c \quad b_0 = b \quad a_1 = 1 = a_0.$$

Les formules récurrentes de (10) se transforment dans

$$(21) \qquad \begin{cases} u^0 = 1, \quad u^1 = b, \quad \text{et pour} \quad \nu \geq 1 \\ u^{\nu+1} = (b + c\,\nu - x)\, u^\nu + c\,\nu\, x\, u^{\nu-1}, \\ \text{ou encore} \\ u^\nu (x + u) = c\,\nu\, u^{\nu-1} (x + u) + b\, u^\nu. \end{cases}$$

Tous les u^ν sont donc des nombres entiers.

J'aurai à substituer dans les équations (11) et (12)

$$h = k_b,$$

et j'obtiens, d'après cette dernière,

$$(22) \qquad f(k_b)\, V = f(x + u) + \varphi(x)\, U(|x|).$$

Soient maintenant s et r des entiers positifs quelconques, on aura

$$\frac{u^s (x + u)^r}{\underline{|s}\ \underline{|r - 1}} = \frac{x + u}{\underline{|s}} \sum_0^{r-1}{}_\nu \frac{u^{\nu+s}}{\underline{|\nu}} \frac{x^{r-1-\nu}}{\underline{|r - 1 - \nu}} =$$

$$= \frac{c\,(x + u)}{\underline{|s}} \sum_0^{r-1}{}_\nu (\nu + s) \frac{u^{\nu+s-1}}{\underline{|\nu}} \frac{x^{r-1-\nu}}{\underline{|r - 1 - \nu}} + b \frac{u^s (x + u)^{r-1}}{\underline{|s}\ \underline{|r - 1}} =$$

$$= \frac{c\,(x + u)}{\underline{|s}} \sum_1^{r-1}{}_\nu \frac{u^{\nu+s-1}}{\underline{|\nu - 1}} \frac{x^{r-1-\nu}}{\underline{|r - 1 - \nu}} + \frac{c\, u^{s-1}}{\underline{|s - 1}} \frac{(x + u)^r}{\underline{|r - 1}} + b \frac{u^s (x + u)^{r-1}}{\underline{|s}\ \underline{|r - 1}} =$$

$$= \frac{c\, u^s}{\underline{|s}} \frac{(x + u)^{r-1}}{\underline{|r - 2}} + \frac{c\, u^{s-1}}{\underline{|s - 1}} \frac{(x + u)^r}{\underline{|r - 1}} + b \frac{u^s (x + u)^{r-1}}{\underline{|s}\ \underline{|r - 1}} =$$

$$= (b + c\,\overline{r - 1}) \frac{u^s (x + u)^{r-1}}{\underline{|s}\ \underline{|r - 1}} + \frac{c\, u^{s-1} (x + u)^r}{\underline{|s - 1}\ \underline{|r - 1}},$$

d'où

$$(23) \qquad \frac{u^s}{k_c^s} \frac{(x + u)^r}{k_b^r} = \frac{u^s}{k_c^s} \frac{(x + u)^{r-1}}{k_b^{r-1}} + \frac{u^{s-1}}{k_c^{s-1}} \frac{(x + u)^r}{k_b^r}.$$

Soit q le plus petit des nombres r et s.

Par l'application itérée de la formule (23), on trouvera évidemment pour chaque nombre entier

$$\mu \leq q:$$

$$\frac{u^s}{k_c^s}\frac{(x+u)^r}{k_b^r} = \left(\frac{u}{k_c}\right)^{s-\mu}\left(\frac{x+u}{k_b}\right)^{r-\mu}\left(\frac{u}{k_c}+\frac{x+u}{k_b}\right)^{\mu},$$

d'où l'on tire, d'après le lemme 4, p. 12,

$$\frac{c^\mu}{\underline{|\mu}}\, u^s (x+u)^r = \text{nombre entier.}$$

Or, cette proposition pourra s'étendre encore à la fonction (18) de type plus général.

En effet, d'après les équations (11) et (12) on aura, en mettant

$$h^r = H_r,$$

$$f(h)\, V(x) = f(x+u) + \varphi(x)\, U(|x|), \tag{24}$$

où les u^ν (voir l'équation (10)) seront introduits par les formules récurrentes suivantes

$$\left\{\begin{aligned} &u^0 = 1, \quad u^1 = h_0 \quad \text{et, pour } \lambda \geq 1, \\ &(x+u)\frac{u^\lambda}{\underline{|\lambda}} = \sum_0^m {}_\nu \frac{h^\nu (k_{\lambda-\nu})}{\underline{|\nu}} x^\nu \frac{u^{\lambda-\nu}}{\underline{|\lambda-\nu}}. \end{aligned}\right. \tag{25}$$

Tous les u_ν se réduiront à des nombres entiers, et, par suite, tous les

$$v^r = (x+u)^r$$

seront de même des entiers.

De plus, on aura

$$v^r = x^r + h_{r-1} v^{r-1}.$$

Donc, nous aurons, en désignant par r et s des entiers positifs quelconques,

$$v^r \frac{u^s}{\underline{|s}} = \sum_0^s {}_\lambda \frac{v^{r+\lambda}}{\underline{|\lambda}} \frac{(-x)^{s-\lambda}}{\underline{|s-\lambda}} = \sum_0^s {}_\lambda\, h_{r+\lambda-1} \frac{v^{r+\lambda-1}}{\underline{|\lambda}} \frac{(-x)^{s-\lambda}}{\underline{|s-\lambda}} =$$

$$= \sum_0^m {}_\nu \sum_\nu^s {}_\lambda \frac{h^\nu (k_{r-1})}{\underline{|\nu}} \frac{v^{r+\lambda-1}}{\underline{|\lambda-\nu}} \frac{(-x)^{s-\lambda}}{\underline{|s-\lambda}} =$$

$$= \sum_0^m {}_\nu \frac{h^\nu (k_{r-1})}{\underline{|\nu}}\, v^{r+\nu-1} \sum_\nu^s {}_\lambda \frac{v^{\lambda-\nu}}{\underline{|\lambda-\nu}} \frac{(-x)^{s-\lambda}}{\underline{|s-\lambda}},$$

d'où

(26)
$$v^r \frac{u^s}{\underline{|s}} = \sum_0^m{}_\nu \frac{h^\nu (k_{r-1})}{\underline{|\nu}} v^{r+\nu-1} \frac{u^{s-\nu}}{\underline{|s-\nu}},$$

ou, si l'on veut,

(26')
$$v^r \frac{u^s}{\underline{|s}} = (b + c\,\overline{r-1})\, g_{r-1}\, v^{r-1} \frac{u^s}{\underline{|s}} + \sum_1^m{}_\nu \frac{h^\nu (k_{r-1})}{\underline{|\nu}} v^{r+\nu-1} \frac{u^{s-\nu}}{\underline{|s-\nu}}.$$

Lemme. Désignons par s un indice quelconque.

Pour toute valeur de r qui n'est pas supérieure à s, soit pour

$$r = s - \mu \quad (\mu = 0, 1, \ldots s),$$

on aura

$$k^\mu_{b+c\,\overline{s-\mu}}\, v^{s-\mu} \frac{(c\,u)^s}{\underline{|s}} = \textit{nombre entier},$$

et pour toute valeur de r qui n'est pas inférieure à s, soit pour

$$r = s + \mu \quad (\mu = 0, 1, \ldots \textit{ad inf.}),$$

on aura

$$v^{s+\mu} \frac{(c\,u)^s}{\underline{|s}} = \textit{nombre entier}.$$

Pour $s = 0$ et pour $s = 1$ le lemme est évident, et pour $s \geq 2$ il peut s'établir aisément par déduction de $s - 1$ à s.

En effet, supposons le lemme vrai pour l'indice $\leq s - 1$.

D'après (26'), nous aurons

$$k^\mu_{b+c\,\overline{s-\mu}}\, v^{s-\mu} \frac{(c\,u)^s}{\underline{|s}} - k^{\mu+1}_{b+c\,\overline{s-\mu-1}} \cdot g_{s-\mu-1}\, v^{s-\mu-1} \frac{(c\,u)^s}{\underline{|s}} =$$

$$= \sum_1^m{}_\nu \frac{h^\nu (k_{s-\mu-1})}{\underline{|\nu}} k^\mu_{b+c\,\overline{s-\mu}}\, v^{s-\mu+\nu-1} \frac{c^s u^{s-\nu}}{\underline{|s-\nu}} = \text{nombre entier}.$$

Par l'application itérée de cette formule, nous aurons donc

$$k^\mu_{b+c\,\overline{s-\mu}} \cdot v^{s-\mu} \frac{(c\,u)^s}{\underline{|s}} = g_{s-\mu-1}\, g_{s-\mu-2} \ldots g_0 \frac{k^s_b}{\underline{|s}} (c\,u)^s + \text{nombre entier} =$$

$$= \text{nombre entier}, \quad \text{pour } \mu = 0, 1, \ldots s.$$

En particulier, nous aurons, pour $\mu = 0$,

$$v^s \frac{(c\,u)^s}{\underline{|s}} = \text{nombre entier}.$$

De plus, on aura d'après l'équation (26)

$$v^{s+\mu}\frac{(c\,u)^s}{\underline{|s}} = \sum_0^m {}_\nu \frac{h^\nu\,(k_{s+\mu-1})}{\underline{|\nu}} \cdot v^{s+\mu+\nu-1} \cdot \frac{c^s\,u^{s-\nu}}{\underline{|s-\nu}} =$$

$$= h_{s+\mu-1} \cdot v^{s+\mu-1}\frac{(c\,u)^s}{\underline{|s}} + \text{nombre entier} =$$

$$= h_{s+\mu-1} \cdot h_{s+\mu-2} \ldots h_s\, v^s \frac{(c\,u)^s}{\underline{|s}} + \text{nombre entier} =$$

$$= \text{nombre entier.}$$ *C. Q. F. D.*

Supposons maintenant qu'il existe une relation de la forme

$$W = \sum_0^n {}_k C_k\, V(x_k) = 0.$$

On peut toujours supposer

$$x_0 \neq 0.$$

Soit

$$f(x) = (c\,x)^p \frac{(x-x_0)^\lambda}{\underline{|\lambda}} \prod_1^n {}_i\,(x-x_i)^p,$$

avec les mêmes hypothèses qu'auparavant concernant les nombres p et λ (voir par exemple p. 278).

On trouve, comme auparavant,

$$0 = f(h) \sum_0^n {}_k C_k\, V(x_k) = A(x_0) + B + C,$$

où l'on aura posé, pour abréger,

$$A(x) = C_0 \frac{c^p\,u^\lambda}{\underline{|\lambda}} (x+u)^p \prod_1^n {}_i\,(x-x_i+u)^p$$

$$B = \sum_1^n {}_k C_k \frac{c^p\,[x_k - x_0 + u(x_k)]^\lambda}{\underline{|\lambda}} [x_k + u(x_k)]^p\, u^p(x_k) \prod_1^n{}'_i\, [x_k - x_i + u(x_k)]^p$$

$$C = \sum_0^n {}_k C_k\, \varphi(x_k)\, U(|x_k|).$$

$A(x_0)$ et B se réduiront à des nombres entiers, ce qui entraîne effectivement la conséquence que C sera de même entier.

Or, prenons p assez grand pour que

$$|C| \text{ soit } < 1;$$

donc il faut que

$$C = 0,$$

et, par suite, nous aurons encore

$$A(x_0) + B = 0.$$

Or, comme

$$B \equiv 0 \qquad (\text{mod. } p)$$

il faudra enfin que

$$A(x_0) \equiv 0 \qquad (\text{mod. } p).$$

Si l'on prend pour p un nombre premier, on doit avoir, pour $x = x_0$,

$$A(x) \equiv C_0 \frac{c^p u^\lambda}{\lfloor\lambda} (x+u)^p \prod_1^n {}_i (x - x_i)^p \qquad (\text{mod. } p).$$

Soit p un nombre premier assez grand et supérieur à la valeur numérique de

$$C_0 b_m c x_0 \prod_1^n {}_i (x_0 - x_i).$$

On trouve alors, pour $x = x_0$,

$$\frac{(cu)^\lambda}{\lfloor\lambda} (x+u)^p \equiv 0 \qquad (\text{mod. } p).$$

Supposons de plus que

$$\frac{p-1}{2} > m,$$

et soient $p-1, p-2, \ldots p-1-m$ $(m+1)$ nombres consécutifs dans l'intervalle de λ, on aura

$$\frac{(cu)^{p-\varkappa}}{\lfloor p-\varkappa} (x+u)^p \equiv 0 \quad (\text{mod. } p) \qquad (\varkappa = 1, 2, \ldots m+1).$$

On trouvera, plus généralement, pour $-\infty \leq \mu \leq m$ et $1 \leq \varkappa \leq p$,

(27) $$\frac{(cu)^{p-\varkappa}}{\lfloor p-\varkappa} (x+u)^{p-\mu} \equiv 0 \qquad (\text{mod. } p).$$

En effet, supposons d'abord que la formule (27) soit vraie pour une valeur certaine de $\varkappa$ et pour toutes les valeurs entières positives inférieures à celle-là, μ étant égal à zéro. Sa vérité pour $-\infty \leq \mu \leq -1$ sera alors facilement prouvée par déduction de μ à $\mu + 1$.

En effet, on aura

$$c\frac{(cu)^{p-\varkappa}}{\lfloor p-\varkappa} (x+u)^{p+\mu+1} \equiv \frac{(cu)^{p-\varkappa+1}}{\lfloor p-\varkappa} (x+u)^{p+\mu} \equiv 0 \quad (\text{mod. } p) \quad (\mu = 0, 1, \ldots \text{ad inf.}).$$

Cela démontré, la vérité de la formule (27) pour $1 \leq \mu \leq m$ sera aussi facilement prouvée par déduction de μ à $\mu + 1$.

En effet, d'après l'identité suivante

$$(x+u)^{p-\mu-1}[(cu)^{\varkappa-1} - (-cx)^{\varkappa-1}](cu)^{p-\varkappa} = c(x+u)^{p-\mu}\sum_{2}^{\varkappa}{}_{\lambda}(cu)^{p-\lambda}(-cx)^{\lambda-2},$$

qui pourra être aisément vérifiée, on aura

$$(28) \qquad (-cx)^{\varkappa-1}\frac{(cu)^{p-\varkappa}}{\lfloor p-\varkappa}(x+u)^{p-\mu-1} \equiv \frac{(cu)}{\lfloor p-\varkappa}(x+u)^{p-\mu-1} \qquad (\text{mod. } p).$$

De plus, on aura

$$\frac{(cu)^{p-1}}{\lfloor p-1}(x+u)^{p-\mu} = \sum_{0}^{m}{}_{\nu}\frac{h^{\nu}(k_{p-\mu-1})}{\lfloor \nu}(x+u)^{p-\mu-1+\nu}\frac{c^{p-1}u^{p-1-\nu}}{\lfloor p-1-\nu},$$

d'où

$$h_{p-\mu-1}(x+u)^{p-\mu-1}\frac{(cu)^{p-1}}{\lfloor p-1} \equiv 0 \qquad (\text{mod. } p).$$

Or, nous avons trouvé (voir p. 51)

$$h_{p-\mu-1} \equiv \alpha_{\mu} \qquad (\text{mod. } p),$$

où tous les α_{μ} sont différents de zéro, pour $\mu = 0, 1, 2, \ldots$ ad inf.

Par conséquent, si l'on prend p supérieur à la valeur numérique la plus grande des nombres $\alpha_0\, \alpha_1 \ldots \alpha_m$, on aura évidemment

$$(x+u)^{p-\mu-1}\frac{(cu)^{p-1}}{\lfloor p-1} \equiv 0 \qquad (\text{mod. } p),$$

d'où, d'après (28),

$$\frac{(cu)^{p-\varkappa}}{\lfloor p-\varkappa}(x+u)^{p-\mu-1} \equiv 0 \qquad (\text{mod. } p).$$

La formule (27) sera donc vraie pour $1 \leq \varkappa \leq m+1$ et pour $-\infty \leq \mu \leq m$. J'établirai, par déduction de $\varkappa$ à $\varkappa + 1$, qu'elle l'est aussi pour $m + 2 \leq \varkappa \leq p$.

Supposons en effet que ladite formule soit valable pour une certaine valeur donnée de $\varkappa \geq m + 1$ et pour toutes les valeurs inférieures à celle-là.

On trouve

$$\frac{(cu)^{p-\varkappa+m-1}}{\lfloor p-\varkappa+m-1}(x+u)^{p-m+1} = \sum_{0}^{m}{}_{\nu}\frac{h^{\nu}(k_{p-m})}{\lfloor \nu}(x+u)^{p-m+\nu}\frac{(cu)^{p-\varkappa+m-1-\nu}c^{\nu}}{\lfloor p-\varkappa+m-1-\nu},$$

d'où

$$c^m b_m(x+u)^p\frac{(cu)^{p-\varkappa-1}}{\lfloor p-\varkappa-1} \equiv 0 \qquad (\text{mod. } p),$$

et l'on établira, comme auparavant, que tous les

$$\frac{(cu)^{p-\varkappa-1}}{\underline{|p-\varkappa-1}}(x+u)^{p-\mu}\equiv 0 \qquad (\text{mod. } p),$$

$$\text{pour } -\infty \leq \mu \leq m.$$

Or, substituons dans l'équation (27) $\varkappa = p$, nous aurons

$$(x+u)^{p-\mu}\equiv 0 \quad (\text{mod. } p), \quad \text{pour } -\infty < \mu \leq m.$$

Or, l'on aura

$$(x+u)^p = x^p + h_{p-1}(x+u)^{p-1},$$

d'où

$$x^p \equiv 0 \qquad (\text{mod. } p),$$

ce qui est impossible.

De là résulte cette proposition:

Théorème. *V désignant la fonction définie par la formule* (18), *il ne peut exister aucune relation de la forme*

$$W = \sum_0^n {}_k\, C_k\, V(x_k) = 0.$$

En poursuivant les recherches exposées dans ce §, j'ai réussi encore à étudier de plus près l'équation différentielle générale du 2ème degré que voici:

$$(29) \qquad c\,x\,V_2 + (b - e\,x)\,V_1 - a\,V = 0,$$

équation dont celle de M. Hurwitz est un cas spécial pour

$$e = 0$$

et dont l'équation (19) est un autre cas spécial pour

$$a \equiv 0 \qquad (\text{mod. } e).$$

Mes recherches ont abouti à la proposition suivante analogue aux précédentes:

Théorème. *Soit*

$$\psi_\nu = \prod_0^{\nu-1} {}_\lambda\,(a + e\lambda), \quad \chi_\nu = \prod_0^{\nu-1} {}_\lambda\,(b + c\lambda).$$

La fonction

$$V = \sum_0^{\infty} \nu \frac{\psi_\nu x^\nu}{\chi_\nu \underline{|\nu}} \tag{30}$$

sera donc une intégrale particulière de l'équation (29).

Il est vrai aussi pour cette fonction V qu'il ne peut exister aucune relation de la forme

$$W = \sum_0^n k\, C_k\, V(x_k) = 0,$$

$a, b, c, e, x_0\, x_1 \ldots x_n$ et $C_0, C_1 \ldots C_n$ étant des nombres rationnels quelconques, $x_0\, x_1 \ldots x_n$ étant tous différents et $C_0\, C_1 \ldots C_n$ n'étant pas tous égaux à zéro.

Cette proposition représente un progrès incontestable comparée à celles que nous avons exposées dans ce qui précède. J'ai pourtant trouvé inutile de prolonger encore cet article, en en donnant ici la preuve, espérant trouver l'occasion de passer dans un article suivant à certaines études générales basées sur ces recherches.