Y. KUSUNOKI
KŌDAI MATH. SEM. REP
26 (1975), 446—453

BEITRÄGE ZUR THEORIE DER ANALYTISCHEN DIFFERENTIALE UND FUNKTIONEN

Herrn Professor Yûsaku Komatu zum 60. Geburtstag gewidmet

VON YUKIO KUSUNOKI

Die quadratisch integrierbaren Differentiale auf offenen Riemannschen Flächen sind seit Nevanlinna [4] weitgehend untersucht worden. Wir werden hier die exakten oder semi-exakten analytischen Differentiale von der Form $f\omega$ betrachten, wobei f eine analytische Funktion und ω ein analytisches, quadratisch integrierbares Differential angibt. Dass solche Differentiale $f\omega$ mit nichtkonstanten Funktionen f existieren, folgt aus allgemeinen Existenzsätze von Gunning-Narasimhan [1] und Kusunoki-Sainouchi [3], und zwar gibt es auch diejenigen, die nicht quadratisch integrierbar sind (vgl. Nr. 4). In der früheren Arbeit [3] haben wir für die Differentiale von der oben erwähnten Form die Periodenrelationen und seine Anwendungen gezeigt. Wir werden im folgenden einige Eigenschaften über diese Differentiale und ihre Klassen (Fréchetsche Räume) aufstellen, die sich mit der Wertverteilungslehre der analytischen Funktionen berühren.

§ 1. Anwachsen der Nullstellen analytischer Differential mit endlicher Norm.

1. Es sei R eine offene Riemannsche Fläche. Wir werden zuerst auf R eine Koordinate festlegen, die die ähnliche Rolle wie Polarkoordinate in der Ebene spielt. Es sei $\{R_n\}$ $(n=1, 2, \cdots)$ eine reguläre Ausschöpfung von R, so dass jeder Rand ∂R_n aus endlich vielen analytischen Jordanschen Kurven besteht und $R-R_n$ keine kompakten Komponenten besitzt. Es sei u_n die harmonische Funktion auf $R_n-\bar{R}_{n-1}$, so dass $u_n=0$ auf ∂R_{n-1} und $u_n=\mu_n$ (Konst.) auf ∂R_n, wo μ_n (harmonischer Modul von $R_n-\bar{R}_{n-1}$) so gewählt ist, dass $\int_{\partial R_{n-1}} {}^*du_n=2\pi$. Nun setzt man

$$u(p)=\sum_{i=1}^{n-1}\mu_i+u_n(p)\,, \qquad p\in R_n-\bar{R}_{n-1}\ (n=1, 2, \cdots)$$

$$\mu_R=\sum_{n=1}^{\infty}\mu_n\,,$$

Received Nov. 30, 1973.

so ist $\int_{u=c} {}^*du = 2\pi,\ 0 \leq c < \mu_R$. Dabei ist u nicht immer stetig differenzierbar auf ∂R_n, aber ${}^*du$ wird längs ∂R_n mit $\frac{\partial u}{\partial \nu} ds$ (ν : ausseres Normal) definiert. Die Funktion $v = \int {}^*du$ ist eindeutig auf jedem längs der Flusslinien ${}^*du = 0$, die die kritische Stellen passieren, geschnitzten Teil von $R_n - \bar{R}_{n-1}$ ($n = 1, 2, \cdots$), und $u + iv$ dort eine Lokalkoordinate gibt.

Es ist bekannt, dass R parabolisch ist dann und nur dann, wenn $\mu_R = +\infty$ für eine reguläre Ausschöpfung (vgl. Sario-Noshiro [6]).

2. Es sei $\varphi = \varphi(z)dz$ ein meromorphes Differential auf R und $n_\varphi(x, 0)$ die Anzahl der Nullstellen, $n_\varphi(x, \infty)$ die Anzahl der Pole von φ auf dem Gebiet $\tilde{\Omega}_x = \Omega_x \cup \bar{R}_0$ ($0 \leq x < \mu_R$), wobei jeder Pol oder jede Nullstelle nach der vorkommenden Mehrfachheit zu zählen ist und $\Omega_x = \{p \mid 0 < u(p) < x\}$. Man bezeichne $e(x)$ ($= -n_0 + n_1 - n_2$) die Eulersche Charakteristik von $\tilde{\Omega}_x$. Dann hat man nach dem Gauss-Bonnetschen Satz (oder Argmentenprinzip)

$$n_\varphi(x, 0) - n_\varphi(x, \infty) = \frac{1}{2\pi} \frac{\partial}{\partial x} \int_{u=x} \log |\varphi(u+iv)|\, dv + e(x) \tag{1}$$

für jeden $x \in (0, \mu_R)$, so dass die Niveaulinie $u = x$ keine Pole und Nullstellen von φ enthält und $x \neq \sum_{i=1}^{n} \mu_i$ ($n = 1, 2, \cdots$) (vgl. Nevanlinna [5]). Man bezeichnet

$$N_\varphi(x, a) = \int_0^x n_\varphi(u, a)du\,, \qquad a = 0 \text{ oder } \infty\,,$$

$$E(x) = \int_0^x e(u)du\,.$$

Wir haben dann aus (1) durch Integration die folgende Beziehung:

Für alle $x \in (0, \mu_R)$

$$N_\varphi(x, 0) - N_\varphi(x, \infty) = \frac{1}{2\pi} \int_{u=x} \log |\varphi(u+iv)|\, dv + E(x) + k \tag{2}$$

wo $k = -\frac{1}{2\pi} \int_{u=0} \log |\varphi|\, dv$ *unabhängig von* x *ist.*

3. Im folgenden werden wir nur regulär analytische Differentiale auf R betrachten.

SATZ 1. *Für jedes regulär analytische Differential* $\varphi = \varphi(z)dz$ ($\not\equiv 0$) *auf* R

$$\frac{1}{x} \int_0^x (N_\varphi(u, 0) - E(u))du + \frac{1}{2} \log x \leq \log \|\varphi\|_{\Omega x} + O(1) \tag{3}$$

für $x \in (0, \mu_R)$, *wo* $\|\varphi\|^2_{\Omega x} = \iint_{\Omega x} |\varphi(u+iv)|^2 du\, dv$.

Diese Beziehung folgt in der Tat aus (2) unter Integration über $(0, x)$ und zweimal Anwendungen der bekannten Ungleichung $\frac{1}{\alpha} \int_0^\alpha \log f(x)dx \leq$

$\log\left(\frac{1}{\alpha}\int_0^\alpha f(x)dx\right)$ für nichtnegative Funktion f auf $(0, \alpha)$.

Es sei $\Gamma_a=\Gamma_a(R)$ der Hilbertsche Raum von quadratisch integrierbaren analytischen Differentiable auf R. Im folgenden werden wir annehmen, dass $\Gamma_a(R)\neq\{0\}$, d. h. R nicht eine parabolische Fläche vom Geschlecht 0 ist.

FOLGESATZ. *Gehört φ zum $\Gamma_a(R)$, so ist der linksstehende Ausdruck in* (3) *oder*

$$\frac{1}{x}\int_0^x\left(N_\varphi(u, 0)-E(u)+\frac{1}{2}\log u\right)du \tag{4}$$

beschränkt nach oben für $x\to\mu_R$.

Als eine unmittelbare Anwendung des obigen Satz erhalten wir

SATZ 2. *Sei φ $(\not\equiv 0)\in\Gamma_a$.* (a) *Falls R parabolisch ist* $(\mu_R=\infty)$, *ist*

$$\overline{\lim_{x\to\infty}}(e(x)-n_\varphi(x, 0))\geqq 1. \tag{5}$$

Das Gleichheitszeichen trifft, wenn R eine in einem (geeigneten) Punkt punktierte geschlossene Fläche vom positiven Geschlecht ist.

(b) *Falls R hyperbolisch ist* $(\mu_R<\infty)$, *so ist für $\lambda>0$*

$$\overline{\lim_{x\to\mu_R}}(\mu_R-x)^{2+\lambda}(e(x)-n_\varphi(x, 0))\geqq 0. \tag{6}$$

Beweis. (a) Es gibt dann eine Folge $\{x_n\}$ $(x_n\to\infty)$, so dass für $c>0$

$$N_\varphi(x_n, 0)-E(x_n)+\frac{1}{2}\log x_n<c\log x_n,$$

sonst die Grösse (4) gegen ∞ strebte. Also für $c=\frac{1}{4}$, $\int_0^{x_n}(e(x)-n_\varphi(x, 0))dx$ $>\frac{1}{4}\log x_n$. Hieraus gibt es eine Folge $\{t_n\}$ $(t_n\to\infty)$, so dass $e(t_n)-n_\varphi(t_n, 0)>0$ daher $\geqq 1$, weil sie die ganze Zahlen sind. Dies zeigt (5).

Es sei $R=R_0-\{P\}$, wo R_0 eine geschlossene Fläche vom Geschlecht g $(\geqq 1)$ ist. Jedes $\varphi\in\Gamma_a$ lässt sich dann über den Punkt P fortsetzen. So ist $n_\varphi(x, 0)$ $\leqq 2g-2$ für alle x und $e(x)=2g-1$ für genügend gross x. Insbesondere $e(x)$ $-n_\varphi(x, 0)=1$ für genügend gross x, wenn P nicht die Nullstelle von φ ist.

(b) Aus (3) gibt es eine Folge $\{u_n\}$ $(u_n\to\mu_R)$, so dass für jede λ' $(0<\lambda'<\lambda)$

$$N_\varphi(u_n, 0)-E(u_n)<(\mu_R-u_n)^{-(1+\lambda')}.$$

Daraus gibt es ferner eine Folge $\{x_n\}$ $(x_n\to\mu_R)$, so dass für λ'' $(\lambda'<\lambda''<\lambda)$, $n_\varphi(x_n, 0)-e(x_n)<(\mu_R-x_n)^{-(2+\lambda'')}$. Damit $\underline{\lim}_{x\to\mu_R}(\mu_R-x)^{2+\lambda}(n_\varphi(x, 0)-e(x))\leqq 0$.

FOLGESATZ. *Sei R ein hyperbolische Fläche von endlicher Eulerscher Charakteristik und $f(z)$ eine analytische Funktion auf R mit $\iint_R|f'(z)|^2dxdy<\infty$, so ist*

$$\underline{\lim}_{u\to\mu_R}(\mu_R-u)^{2+\lambda}n_{f'}(u, 0)=0, \qquad \lambda>0.$$

§ 2. Neue Klassen von analytischen Differentiale.

4. Mit $A=A(R)$ bezeichnet man die Menge von eindeutigen analytischen Funktionen auf einer offenen Riemannschen Fläche R. Wir werden hier zuerst die folgenden Klassen der analytischen Differentiale auf R betrachten;

$$dA, \qquad A\Gamma_a, \qquad (A\Gamma_a)_e, \qquad (A\Gamma_a)_{se},$$

wo $dA=\{df|f\in A\}$, $A\Gamma_a=\{f\omega|f\in A, \omega\in\Gamma_a\}$ und $(A\Gamma_a)_e$ (bzw. $(A\Gamma_a)_{se}$) die Menge der analytischen exakten (bzw. semi-exakten) Differentiale aus $A\Gamma_a$ bezeichnet. Offenbar $(A\Gamma_a)_e\subset dA$, $\Gamma_{ae}\subset(A\Gamma_a)_e$ und $(A\Gamma_a)_e\subset(A\Gamma_a)_{se}\subset A\Gamma_a$, wo Γ_{ae} den Hilbertschen Raum von exakten Differentiale aus Γ_a bezeichnet.

Die kanonische Homologiebasis $\Xi=\{A_j, B_j\,; C_k\}$ in Bezug auf einer kanonischen Ausschöpfung $\{R_n\}$ von R besteht aus die kanonische Homologiebasis $\{A_j, B_j\}$ (mod ∂R) und der Basis $\{C_k\}$ $\left(C_k\sim\gamma_k, \gamma_k\subset \bigcup_{n=1}^{\infty}\partial R_n\right)$ für Zerlegendezyklen von R, so dass jeder 1-Zyklus auf R homolog zu einer endlich Linearkombination der Zyklen aus Ξ ist.

HILFSSATZ ([3]). *Für ein Abelsches Differential ω ($\not\equiv 0$) auf R gibt es eine analytische Funktion f ohne Nullstelle, so dass $f\omega$ die vorgeschriebenen Perioden längs der allen Zyklen aus Ξ besitzt.*

Aus dem Hilfssatz folgt, dass für jede Fläche R mit $\Gamma_a(R)\neq\{0\}$

$$\{0\}\neq(A\Gamma_a)_e\subsetneqq(A\Gamma_a)_{se}\subsetneqq A\Gamma_a\,.$$

Ferner haben wir den folgenden

SATZ 3. *Für jede Fläche R mit $\Gamma_a(R)\neq\{0\}$ enthalten die Klassen $(A\Gamma_a)_e$ und $(A\Gamma_a)_{se}$ nicht quadratisch integrierbare Differentiale,*) d. h.*

$$\Gamma_{ae}\subsetneqq(A\Gamma_a)_e\,, \qquad \Gamma_{ase}\subsetneqq(A\Gamma_a)_{se}\,.$$

Wenn $\Gamma_{ae}\neq\{0\}$ (d. h. wenn $R\notin O_{AD}$), hat man ausserdem

$$\Gamma_{ae}\subsetneqq(A\Gamma_{ae})_e \qquad (\subset(A\Gamma_a)_e)\,.$$

Beweis. Sei $\omega(\not\equiv 0)\in\Gamma_a$. Nach dem Behnke-Steinschen Satz gibt es ein analytisches Differential ω_1, so dass $f_1=\omega_1/\omega$ regulär analytisch ist und sogar die gegebenen Nullstellen auf R besitzt. Damit sind wir anzunehmen, dass ω_1 so viele Nullstellen hat, dass

$$\frac{1}{x}\int_0^x(N_{\omega_1}(u, 0)-E(u))du+\frac{1}{2}\log x\to\infty\,, \qquad x\to\mu_R\,. \tag{7}$$

Nach dem obigen Hilfssatz gibt es dann ferner eine Funktion $f_2\in A$ ohne Nullstelle, so dass $\varphi=f_2\omega_1=f\omega$ $(f=f_1f_2\in A)$ auf R die vorgeschriebenen Perioden 0 besitzt, daher exakt ist. Da φ denselben Divisor wie ω_1 hat, so gilt (7) für φ

*) Dies ist in [2] ohne Beweis gesprochen.

anstatt ω_1. Nach dem Satz 1 ist φ dann nicht quadratisch integrierbar. Ähnlicherweise haben wir die anderen Behauptungen.

5. Der Vektorraum A lässt sich als ein Fréchetscher Raum mit der wachsenden Normen $\{p_n\}$ ($p_n(f)=\max_{\bar{R}_n}|f|$, $f\in A$, $n=1, 2, \cdots$) auffassen. Wir wollen nun den Vektorraum $D_a=D_a(R)$ von allen analytischen Differentiale auf R betrachten. Er wird auch zum Fréchetschen Raum mit der wachsenden Normen $\{q_n\}$ ($q_n(\varphi)=\|\varphi\|_{R_n}$, $\varphi\in D_a$), der vollständig in Bezug auf der bekannten Quasi-norm

$$|||\varphi|||=\sum_{n=1}^{\infty}2^{-n}q_n(\varphi)/(1+q_n(\varphi))$$

ist, und dA wird zum geschlossenen Teilraum von D_a (vgl. den Beweis der folgenden Satz). Für einen Teilraum A_1 von A und $\omega\in D_a$ betrachten wir den Teilraum $(A_1\omega)_e$ (bzw. $(A_1\omega)_{se}$), der aus alle exakten (bzw. semi-exakten) Differentiale von der Form $f\omega$ mit $f\in A_1$ besteht.

SATZ 4. *Für $\omega(\not\equiv 0)\in D_a$ und jeden geschlossenen Teilraum A_1 von A sind $(A_1\omega)_e$ und $(A_1\omega)_{se}$ die geschlossenen Teilräume von Fréchetschem Raum dA bzw. D_a.*

Insbesondere $(A\omega)_e=dA$ dann und nur dann, wenn ω keine Nullstelle besitzt.

Beweis. Sei $|||\varphi_m-\varphi_n|||\to 0$ $(m, n\to\infty)$ mit $\varphi_n=f_n\omega\in(A_1\omega)_e$. Dann für jede R_ν $\|\varphi_m-\varphi_n\|_{R_\nu}\to 0$, $m, n\to\infty$. Zuerst zeigen wir, dass $\{f_n\}$ gleichmässig in einer Umgebung des beliebigen Punkt P auf R konvergieren. Nehme R_ν, so dass es einen Parameterkreis U um P enthält. In $U:\{|z|<1\}$ $(P\leftrightarrow z=0)$ ist ω darstellbar als $a(z)dz$ mit einer analytischen Funktion $a(z)$. Weil

$$|(f_m(z)-f_n(z))a(z)|\leqq(\sqrt{\pi}(1-r))^{-1}\|\varphi_m-\varphi_n\|_{R_\nu}, \qquad |z|\leqq r<1,$$

so ist $\{f_n(z)a(z)\}$ eine Cauchysche Folge in $|z|\leqq r$. Falls $a(0)\neq 0$, konvergieren $\{f_n(z)\}$ offenbar gleichmässig in einer Umgebung von $z=0$. Im Falle $a(0)=0$, nehme einen Kreis U_1 um P in U, so dass ∂U_1 keine Nullstelle von $a(z)$ enthält. So konvergieren $\{f_n(z)\}$ gleichmässig auf einer Umgebung von ∂U_1, also auch in U_1. Daher $f=\lim f_n\in A_1$ und für $\varphi=f\omega$ ist $|||\varphi_n-\varphi|||\to 0$, $n\to\infty$. Da nun $\varphi_n=f_n\omega$ exakt auf R sind, so hat man

$$\int_\gamma f_n\omega=0, \qquad n=1, 2, \cdots$$

für jeden Zyklus γ auf R. Weil $f_n\to f$ gleichmässig auf jeder kompakten Menge auf R, daraus folgt, dass $\int_\gamma f\omega=0$, also $f\omega\in(A_1\omega)_e$. Dies zeigt, dass $(A_1\omega)_e$ vollständig und geschlossen in dA ist. Im Falle von $(A_1\omega)_{se}$ ist es genug alle zerlegendenzyklen γ zu betrachten.

Wenn ω keine Nullstelle besitzt, offenbar $(A\omega)_e=dA$. Entgegengesetztenfalls, ist $(A\omega)_e$ ein echter Teilraum von dA, weil es diejenigen Differentiale aus dA gibt, die an den Nullstellen von ω nicht verschwinden, und sie nicht zur Klasse $(A\omega)_e$ gehören.

BEMERKUNG. Es gilt $(A\omega)_e=(A\Gamma_a)_e=dA$, wenn es ein Differential ω aus $\Gamma_a(R)$ existiere, das keine Nullstelle auf R besitzt. Solches Differential existiert wirklich für relativ kompakte berandete Flächen oder gewisse hyperbolische Flächen vom unendlichem Geschlecht, aber ich weiss nicht es für beliebige hyperbolische Fläche.

6. *Eine Ungleichung.* Es sei Ω eine relativ kompakte berandete Teilfläche von R und Ω_0 ein Parameterkreis mit $\bar{\Omega}_0\subset\Omega$. Wir betrachten die harmonische Funktion $h(=h_{\Omega,\Omega_0})$ auf $\Omega-\bar{\Omega}_0$, die auf $\partial\Omega_0$ verschwindet und auf $\partial\Omega$ eine konstanten Wert λ $(=\lambda_{\Omega,\Omega_0}>0)$ annimmt, der so normiert wird, dass $\int_{\partial\Omega}{}^*dh=2\pi$, wo ${}^*dh$ das zu dh konjugierte harmonische Differential angibt. Die zu h konjugierte Funktion $h^*=\int{}^*dh$ ist eindeutig auf jedem längs der Flusslinien ${}^*dh=0$, die die kritische Stellen passieren, geschnittenen Teil von $\Omega-\bar{\Omega}_0$, und also gibt $h+ih^*$ dort eine Lokalkoordinate.

SATZ 5. *Sei $\varphi=f\omega\in(A\omega)_e$ mit $\omega\in D_a$ und Φ ein eindeutiges Integral von φ auf R. So ist*

$$\frac{1}{\pi}\int_{\partial\Omega}\overset{+}{\log}|\Phi|\,dh^*\leqq\overset{+}{\log}\int_{\partial\Omega}|f|^2dh^*+\overset{+}{\log}\lambda+\overset{+}{\log}\|\omega\|_\Omega^2+\gamma$$

wo $\gamma=2\overset{+}{\log}m+5\log 2$ mit $m=\max\limits_{p\in\partial\Omega_0}|\Phi(p)|$.

Beweis. Es gilt für alle h^*, bis auf endlich vielen Werte, in $(0, 2\pi)$, dass

$$\Phi(\lambda+ih^*)=\Phi(ih^*)+\int_0^\lambda f(h+ih^*)a(h, h^*)dh\,,$$

wobei $\omega=adh+bdh^*$. Wir haben unter der Anwendung der Schwarzschen Ungleichung

$$|\Phi(\lambda+ih^*)|^2\leqq2\Big[m^2+\int_0^\lambda|f(h+ih^*)|^2dh\int_0^\lambda|a(h, h^*)|^2dh\Big]\,,$$

$$\begin{aligned}&2\overset{+}{\log}|\Phi(\lambda+ih^*)|\\&\qquad\leqq2\overset{+}{\log}m+2\log 2+\overset{+}{\log}\int_0^\lambda|f(h+ih^*)|^2dh+\overset{+}{\log}\int_0^\lambda|a(h, h^*)|^2dh\,.\end{aligned}$$

Nach der Ungleichung $\frac{1}{\alpha}\int_0^\alpha\overset{+}{\log}\psi(x)dx\leqq\overset{+}{\log}\Big(\frac{1}{\alpha}\int_0^\alpha\psi(x)dx\Big)+\log 2$ $(\psi>0)$ erhalten wir

$$\begin{aligned}\int_0^{2\pi}\overset{+}{\log}|\Phi(\lambda+ih^*)|\,dh^*\leqq2\pi\overset{+}{\log}m&+4\pi\log 2\\&+\pi\overset{+}{\log}\Big[\int_0^{2\pi}dh^*\int_0^\lambda|f(h+ih^*)|^2dh\Big]\\&+\pi\overset{+}{\log}\Big[\int_0^{2\pi}dh^*\int_0^\lambda|a(h, h^*)|^2dh\Big].\end{aligned}$$

Nun nimmt das Integral $\int_0^{2\pi}|f(h+ih^*)|^2dh^*$ monoton mit h zu. (Dies ist offensichtlich, wenn h ein in Nr. 7 zu erwähnendes Potential ist). In der Tat hat man nach Greensche Formel, dass für jede r $(0<r<\lambda)$

$$\int_{\partial\Omega_r}|f|^2dh^*-\int_{\partial\Omega_0}|f|^2dh^*-r\int_{\partial\Omega_r}{}^*d|f|^2=-\iint_{\Omega_r-\Omega_0}h\Delta|f|^2dx\,dy\,,$$

wo $\Omega_r=\bar{\Omega}_0\cup\{p\,|\,0<h(p)<r\}$ und $z=x+iy$ einen Lokalparameter bezeichnet. Da $\int_{\partial\Omega_r}{}^*d|f|^2=4\iint_{\Omega_r}|f'(z)|^2dx\,dy$, so nimmt das Integral

$$\int_{\partial\Omega_r}|f|^2dh^*=\int_{\partial\Omega_0}|f|^2dh^*+4r\iint_{\Omega_0}|f'(z)|^2dx\,dy+4\iint_{\Omega_r-\Omega_0}(r-h)|f'(z)|^2dx\,dy$$

monoton mit r zu. Daher

$$\int_0^{2\pi}dh^*\int_0^{\lambda}|f(h+ih^*)|^2dh\leqq\lambda\int_0^{2\pi}|f(\lambda+ih^*)|^2dh^*\,.$$

Ausserdem

$$\int_0^{2\pi}dh^*\int_0^{\lambda}|a(h,\,h^*)|^2dh\leqq\|\omega\|^2_{\Omega-\Omega_0}\leqq\|\omega\|^2_{\Omega}\,,$$

daraus folgt die Behauptung.

7. Wir zeigen eine Anwendung des obigen Satz. Es sei R eine hyperbolische Riemannsche Fläche und Ω eine relativ kompakte berandete Fläche auf R. Sei $g_\Omega(p,\,p_0)$ die Greensche Funktion auf Ω mit dem Pol $p_0\in\Omega$. Mit $\Omega\to R$ konvergieren $g_\Omega(p,\,p_0)$ gegen die Greensche Funktion $g(p,\,p_0)$ auf R. Nehme $\rho>0$, so dass $R_0=\{p\,|\,g(p,\,p_0)>\rho\}$ relativ kompakt wird. Dann $\Omega_0=\{p\,|\,g_\Omega(p,\,p_0)>\rho\}\subset R_0$ und $\Omega_0\uparrow R_0$ für $\Omega\uparrow R$. Für solche Ω_0, Ω wendet man Satz 5 an, wobei $\lambda=\rho$ und

$$h=h_\Omega=\rho-g_\Omega(p,\,p_0)\,.$$

Überdies stellt $\dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{\partial\Omega}\overset{+}{\log}|\Phi|\,dh^*_\Omega$ die Nevanlinnasche Charakteristik von Φ dar (vgl. [6], Chap. III), und

$$\sup_{\Omega\subset R}\int_{\partial\Omega}|f|^2dh^*_\Omega<\infty$$

dann und nur dann, wenn f zur Hardyschen Klasse $H^2(R)$ gehört. Daher haben wir

SATZ 6. *Wenn $\varphi=f\omega\in(H^2\omega)_e$ mit $\omega\in\Gamma_a(R)$ auf einer hyperbolischen Fläche R, so ist die eindeutige analytische Funktion $\Phi=\int\varphi$ beschränktartig auf R. Mit anderen Worten, für jede nicht-beschränktartige Funktion Φ lässt sich $d\Phi$ nicht als $f\omega$ $(f\in H^2,\ \omega\in\Gamma_a)$ zerlegen.*

Die Klassen von exakten Differentiale z. B. $(A\Gamma_a)_e$, $(A\Gamma_{ae})_e$, $(A'\Gamma_a)_e$ oder $(A'\omega)_e$ mit geeignetem Unterraum A' von A, definieren natürlich entsprechende

Klassen von eindeutigen analytischen Funktionen, und weitere Untersuchung über derartige Differentiale scheint mir auch zur Theorie der analytischen Funktionen beizutragen.

LITERATUR

[1] GUNNING, R. C. AND NARASIMHAN, R., Immersion of open Riemann surfaces. Math. Ann. 174 (1967), 103–108.

[2] KUSUNOKI, K., Funktionentheorie—Riemannsche Flächen und konforme Abbildungen (Japanisch) Asakura Verlag, Tokyo (1973) 408 pp.

[3] KUSUNOKI, Y. AND SAINOUCHI, Y., Holomorphic differentials on open Riemann surfaces, J. Math. Kyoto Univ., 11 (1971), 181–194.

[4] NEVANLINNA, R., Quadratisch integrierbare Differentiale auf einer Riemannschen Mannigfaltigkeit, Ann. Acad. Sci. Fenn. Ser. A-I Math-Phy. Nr. 1 (1941) 31 pp.

[5] NEVANLINNA, R., Beitrag zur Theorie der Abelschen Integrale, Ibid. Nr. 100 (1951), 11 pp.

[6] SARIO, L. AND NOSHIRO, K., Value distribution theory, Van Nostrand, Princeton (1966), 236 pp.

UNIVERSITÄT ZU KYOTO