KŌDAI MATH. SEM. REP.
22 (1970), 501—514

SUR LES VALEURS DEFICIENTES DE FONCTIONS ALGEBROIDES A 2 BRANCHES*)

PAR NOBUSHIGE TODA

1. Introduction. Soit $f(z)$ une fonction algébroïde transcendante à deux branches dans le plan fini définie par une équation irréductible

$$F(z, f) \equiv A_0(z)f^2 + A_1(z)f + A_2(z) = 0 \tag{1}$$

où les A_0, A_1 et A_2 sont entières sans zéros communs à toutes. Niino-Ozawa [3] a trouvé le théorème très intéressant suivant:

THÉORÈME A. *Si $A_0(z) \equiv 1$ et s'il y a trois valeurs distinctes finies a_1, a_2 et a_3 telles que*

$$\sum_{i=1}^{3} \delta(a_i, f) > 2,$$

alors, une des a_1, a_2, a_3 (soit a_1) est valeur exceptionnelle au sens de Picard et $\delta(a_2, f) = \delta(a_3, f)$. De plus, s'il y a une autre valeur a_4 exceptionnelle au sens de Nevanlinna,

$$\delta(a_4, f) \leqq 1 - \delta(a_3, f).$$

Dans ce mémoire, on donne quelques améliorations et extensions de ce théorème. On utilise les symboles usuels de la théorie de Nevanlinna-Selberg ([2], [4]).

Je remercie infiniment Professeurs Niino et Ozawa d'avoir lu ce mémoire et me fait une observation utile.

2. Préliminaires. Soit $g_0, \cdots, g_n$ $(n \geqq 1)$ $n+1$ fonctions entières sans zéros communs à toutes,

$$u(re^{i\theta}) = \max_{0 \leqq j \leqq n} \log |g_j(re^{i\theta})|$$

et

$$T(r, g) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(re^{i\theta}) d\theta - u(0).$$

On dit que $T(r, g)$ est la fonction caractéristique du système $g = (g_0, \cdots, g_n)$, qui est convexe par rapport à $\log r$ ([1]). On note que, quand $n=1$,

---

Reçu le 7 mai 1970.
*) Ce travail a été fait en partie avec l'aide de la fondation de Sakkokai (The Sakkokai Foundation).

$$T(r, g)=T(r, g_0/g_1)+O(\log r) \tag{2}$$

(voir [1]).

LEMME 1. *Soit $f(z)$ une fonction algébroïde définie par* (1), *alors*

$$\left|T(r, f)-\frac{1}{2}T(r, A)\right|<O(1)$$

où $A=(A_0, A_1, A_2)$ ([5]).

Soit $G(z)$ une combinaison des fonctions $g_0, \cdots, g_n$, linéaire, homogène à coefficients constants non tous nuls,

$$\delta(G)=1-\limsup_{r\to\infty}\frac{N(r, 0, G)}{T(r, g)}$$

et

$$\theta_p(G)=1-\limsup_{r\to\infty}\frac{N_p(r, 0, G)}{T(r, g)} \qquad (p\geqq 1),$$

où

$$N_p(r, 0, G)=\sum_k \log^+\frac{r}{|z_k|}$$

étendue aux zéros z_k de la fonction $G(z)$, chaque zéro étant compté autant de fois qu il'y a d'unités dans son ordre de multiplicité si celui-ci est inférieur à p, et p fois dans le cas contraire.

On a

$$\delta(G)\leqq\cdots\leqq\theta_p(G)\leqq\cdots\leqq\theta_2(G)\leqq\theta_1(G).$$

Quand les fonctions $g_0, \cdots, g_n$ sont linéairement indépendantes, Cartan [1] a donné le

LEMME 2. *Soit $E=\{G\}$ un ensemble des combinaisons des fonctions $g_0, \cdots, g_n$, linéaires, homogènes à coefficients constants et linéairement indépendantes $n+1$ à $n+1$. Alors, il existe au plus une infinité dénombrable de combinaisons $\{G_i\}_{i=1}^{\infty}\subset E$ telles que*

$$\theta_n(G_1)>0$$

et

$$\sum_{i=1}^{\infty}\theta_n(G_i)\leqq n+1.$$

On note que ce lemme s'applique en particulier aux fonctions algébroïdes telles que les coefficients des équations qui les définissent n'admettent pas de relations linéaires, homogènes à coefficients constants.

3. Le cas de fonctions algébroïdes. En utilisant les lemmes qui précédent, on peut préciser le théorème A dans le paragraphe 1.

THÉORÈME 1. *Soit $f(z)$ une fonction algébroïde définie par* (1). *Si $A_0 \equiv 1$, et s'il existe des valeurs finies et distinctes $a_0, \cdots, a_i, \cdots$ telles que*

$$\sum_{i=0}^{\infty} \theta_2(a_i, f) > 2, \tag{3}$$

alors, les valeurs $\{a_i\}_{i=0}^{\infty}$ sont divisées comme suivant.

1) *il y a une et une seule valeur dans $\{a_i\}_{i=0}^{\infty}$ (soit a_0) telle que $F(z, a_0)$ est constante, par conséquent, a_0 est valeur lacunaire;*

2) *il y a quelques paires dans $\{a_i\}_{i=1}^{\infty}$ (soient $b_1, c_1, b_2, c_2, \cdots, b_p, c_p$; $1 \leqq p \leqq \infty$) telles que*

$$F(z, b_k) = \alpha_k F(z, c_k) \qquad (\alpha_k \neq 0, \quad \textit{constante}),$$

par conséquent,

$$\theta_2(b_k, f) = \theta_2(c_k, f) \qquad (k=1, \cdots, p);$$

3) *soit*

$$\{d_i\}_{i=1}^{\infty} = \{a_i\}_{i=1}^{\infty} - \{b_k, c_k\}_{k=1}^{p},$$

alors, on a

$$\sum_{k=1}^{p} \theta_2(b_k, f) + \sum_{i=1}^{\infty} \theta_2(d_i, f) \leqq 1.$$

Démonstration. D'après le lemme 2, l'inégalité (3) entraîne qu'il existe une relation linéaire, homogène à coefficients constants entre 1, A_1 et A_2. Soit cette relation

$$\alpha + \beta A_1 + \gamma A_2 = 0 \tag{4}$$

où les α, β et γ sont constants non tous nuls. Alors, γ n'est pas nul. En effet, supposons que $\gamma = 0$. Alors, on peut prendre $\beta = -1$. On a

$$F(z, a_i) = a_i^2 + \alpha a_i + A_2 \qquad (i=0, 1, \cdots).$$

Soit

$$x_i = -(a_i^2 + \alpha a_i) \qquad (i=0, 1, \cdots).$$

S'il y a trois indices i, j et k tels que

$$x_i = x_j = x_k,$$

on a

$$a_i = a_j \quad \text{ou} \quad a_j = a_k \quad \text{ou} \quad a_k = a_i$$

qui est absurde. Par conséquent, soient $\{x_{i_k}\}_{k=0}^{\infty}$ toutes les valeurs distinctes dans $\{x_i\}_{i=0}^{\infty}$, alors, on a de (3)

$$\sum_{k=0}^{\infty} \theta_2(x_{i_k}, A_2) > 1$$

en utilisant

$$0 \leqq T(r, A) - T(r, A_2) < O(1),$$

où $A=(1, A_1, A_2)$. Mais, c'est absurde, parce que A_2 est entière transcendante. C'est-à-dire que $\gamma \neq 0$. On peut supposer que $\gamma = -1$. Alors, on a

$$F(z, a_i) = a_i^2 + A_1 a_i + A_2 = (a_i + \beta) A_1 + a_i^2 + \alpha \qquad (i=0, 1, \cdots).$$

On démontre qu'il existe un i tel que

$$a_i + \beta = 0.$$

D'abord, s'il en existe, il y a un seul, parce que les a_i sont distinctes. Supposons que pour tout i,

$$a_i + \beta \neq 0.$$

Soient

$$x_i = -\frac{a_i^2 + \alpha}{a_i + \beta},$$

alors,

$$N_2(r, 0, F(z, a_i)) = N_2(r, x_i, A_1) \qquad (i=0, 1, \cdots).$$

De (4), on a facilement

$$0 \leqq T(r, A) - T(r, A_1) < O(1),$$

où $A=(1, A_1, A_2)$. Par conséquent, en vertu du lemme 1, on a

$$\begin{aligned}\theta_2(a_i, f) &= 1 - \limsup_{r\to\infty} \frac{N_2(r, a_i, f)}{T(r, f)} \\ &= 1 - \limsup_{r\to\infty} \frac{N_2(r, 0, F(z, a_i))}{T(r, A)} \qquad (5) \\ &= 1 - \limsup_{r\to\infty} \frac{N_2(r, x_i, A_1)}{T(r, A_1)} = \theta_2(x_i, A_1).\end{aligned}$$

Or, $x_i = x_j$ signifie que

$$a_i a_j + \beta(a_i + a_j) - \alpha = 0.$$

Par conséquent, si $x_i = x_j = x_k$ $(i \neq j, j \neq k, k \neq i)$, $a_i = a_j = a_k$. C'est une contradiction à l'hypothèse. Cela veut dire qu'il existe au plus une dans $\{x_i\}_{i=0}^{\infty} - \{x_i\}$ qui est égale à x_i $(i=0, 1, \cdots)$. En conséquence, soient $\{x_{i_k}\}_{k=0}^{\infty}$ toutes les valeurs dans $\{x_i\}_{i=0}^{\infty}$ qui sont distinctes les unes les autres, alors, on a de (3) et (5)

$$2\sum_{k=0}^{\infty}\theta_2(x_{i_k},\ A_1)\geqq\sum_{i=0}^{\infty}\theta_2(x_i,\ A_1)>2,$$

c'est-à-dire,

$$\sum_{k=0}^{\infty}\theta_2(x_{i_k},\ A_1)>1.$$

C'est une contradiction parce que A_1 est entière transcendante et

$$1\geqq\sum_{k=0}^{\infty}\theta_1(x_{i_k},\ A_1)\geqq\sum_{k=0}^{\infty}\theta_2(x_{i_k},\ A_1)$$

d'après le lemme 2. Par conséquent il y a un i (soit 0) tel que $a_0+\beta=0$. Cela veut dire que

$$F(z,\ a_0)=a_0^2+\alpha.$$

On a 1). Il en résulte que, de (3),

$$\sum_{i=1}^{\infty}\theta_2(a_i, f)>1. \tag{6}$$

Si toutes les valeurs x_i $(i=1,\ 2,\ \cdots)$ sont différentes les unes les autres, l'inégalité (6) conduit à l'inégalité

$$\sum_{i=1}^{\infty}\theta_1(x_i,\ A_1)\geqq\sum_{i=1}^{\infty}\theta_2(x_i,\ A_1)>1,$$

qui est absurde parce que les x_i sont finies et A_1 est entière transcendante. Par conséquent, en tenant compte de $a_i\neq a_j$ $(i\neq j)$, il existe au moins une paire $(x_{i_1},\ x_{i_2})$ dans $\{x_i\}_{i=1}^{\infty}$ telle que

$$x_{i_1}=x_{i_2}.$$

Soient $\{u_k,\ v_k\}_{k=1}^{p}$ $(1\leqq p\leqq\infty)$ toutes telles paires dans $\{x_i\}_{i=1}^{\infty}$:

$$u_k=v_k \text{ et } \{u_k,\ v_k\}\subset\{x_i\}_{i=1}^{\infty} \qquad (k=1,\ \cdots,\ p).$$

Soient $\{b_k,\ c_k\}_{k=1}^{p}\subset\{a_i\}_{i=1}^{\infty}$ telles que

$$-\frac{b_k^2+\alpha}{b_k+\beta}=u_k \quad \text{et} \quad -\frac{c_k^2+\alpha}{c_k+\beta}=v_k \qquad (k=1,\ \cdots,\ p),$$

alors, on a

$$F(z,\ b_k)=\frac{b_k+\beta}{c_k+\beta}F(z,\ c_k).$$

On a 2). Soit

$$\{d_i\}_{i=1}^{\infty}=\{a_i\}_{i=1}^{\infty}-\{b_i,\ c_i\}_{i=1}^{p}.$$

Si

$$\sum_{i=1}^{p} \theta_2(b_i, f) + \sum_{i=1}^{\infty} \theta_2(d_i, f) > 1,$$

on a

$$\sum_{i=1}^{p} \theta_2(u_i, A_1) + \sum_{x_j \neq u_i} \theta_2(x_j, A_1) > 1.$$

C'est une contradiction. Par conséquent, on a 3).

N.B. On a un résultat analogue en changeant " θ_2 " en " δ ".

THÉORÈME 2. *Soient* $f(z)$ *une fonction algébroïde comme dans le théorème* 1 *et* $N=\{a \neq \infty;\ \theta_2(a, f)>0\}$. *Si*

$$\sum_{a \in N} \theta_2(a, f) > 2, \tag{7}$$

1) *il existe une et une seule valeur* (*soit* a_0) *dans* N *telle que* $F(z, a_0)$ *est constante, par conséquent,* a_0 *est valeur lacunaire;*

2) *il y a quelques paires dans* N (*soient* $b_1, c_1, \cdots, b_p, c_p$; $1 \leqq p \leqq \infty$) *telles que*

$$F(z, b_k) = \alpha_k F(z, c_k) \qquad (\alpha_k \neq 0,\ \textit{constante}),$$

par conséquent

$$\theta_2(b_k, f) = \theta_2(c_k, f) \qquad (k=1, \cdots, p);$$

3) *soit*

$$E = N - \{b_k, c_k\}_{k=1}^{p},$$

alors, E *contient au plus deux éléments et on a*

$$\sum_{k=1}^{h} \theta_2(b_k, f) + \sum_{a \in E} \theta_2(a, f) \leqq 1.$$

Démonstration. On utilise les mêmes notations comme dans la démonstration du théorème 1. Il faut prouver 3) seulement. Considérons l'équation en a

$$-\frac{a^2+\alpha}{a+\beta} = x. \tag{8}$$

Alors, cette équation admet deux racines distinctes si $D = x^2 - 4x\beta - 4\alpha \neq 0$ et une seule si $D=0$. Cela veut dire que l'équation (8) admet toujours deux racines distinctes si

$$x \neq 2 \pm (4\beta^2 + 4\alpha)^{1/2}.$$

En appliquant ce fait à notre cas, les équations

$$-\frac{a_i^2+\alpha}{a_i+\beta}=x_i \qquad (i=1, 2, \cdots)$$

admet deux racines distinctes a_i et a_i' sauf au plus deux i. Parce que

$$\theta_2(a_i, f)=\theta_2(a_i', f)=\theta_2(x_i, A_1)>0,$$

a_i' appartient à N d'après l'hypothèse. Cela veut dire qu'il y a un $j(i)$ (et un seul) tel que

$$a_i'=a_j \qquad (\neq a_i)$$

sauf au plus deux i. Ecrivons toutes telles paires par $\{b_k, c_k\}_{k=1}^p$ $(1\leqq p\leqq\infty)$, alors,

$$N-\{b_k, c_k\}_{k=1}^p=E$$

consiste en au plus deux éléments. Comme dans la démonstration du théorème 1, on a

$$\sum_{i=1}^p \theta_2(b_k, f)+\sum_{a\in E}\theta_2(a, f)\leqq 1.$$

N. B. 1. Si $\alpha+\beta^2=0$, E consiste en au plus un élément.
N. B. 2. On a un résultat analogue par le changement de "θ_2" en "δ".

On généralise ces théorèmes par la suite.

THÉORÈME 3. *Soit $f(z)$ une fonction algébroïde définie par* (1) *telle que*

$$\theta_2(\infty, f)=1.$$

S'il existe des valeurs finies distinctes a_i $(i=0, 1, \cdots)$ telles que

$$\sum_{i=0}^\infty \theta_2(a_i, f)>2,$$

alors,

1) *il existe une et une seule valeur dans $\{a_i\}_{i=1}^\infty$ (soit a_0) telle que*

$$F(z, a_0)=K_0A_0(z) \qquad (K_0\neq 0, \textit{ constante});$$

2) *il y a quelques paires dans $\{a_i\}_{i=1}^\infty$ (soient $b_1, c_1, \cdots, b_p, c_p$; $1\leqq p\leqq\infty$) telles que*

$$F(z, b_k)/F(z, c_k)=\alpha_k \qquad (\alpha_k\neq 0, \textit{ constante}),$$

par conséquent,

$$\theta_2(b_k, f)=\theta_2(c_k, f) \qquad (k=1, \cdots, p);$$

3) *soit*

$$E=\{a_i\}_{i=1}^\infty-\{b_k, c_k\}_{k=1}^p,$$

alors,

$$\sum_{k=1}^{p} \theta_2(b_k, f) + \sum_{a_i \in E} \theta_2(a_i, f) \leqq 1. \tag{9}$$

En particulier, si $\{a_i\}_{i=0}^{\infty} = \{a \neq \infty;\ \theta_2(a, f) > 0\}$, 3) *est changé comme suivant:* 3′) *E contient au plus deux éléments et on a* (9).

Démonstration. D'après le lemme 2, l'hypothèse de ce théorème entraîne qu'il existe une relation linéaire, homogène à coefficients constants non tous nuls entre les fonctions A_0, A_1 et A_2. Soit cette relation

$$\alpha A_0 + \beta A_1 + \gamma A_2 = 0$$

où les α, β, γ sont constants non tous nuls. Supposons que $\gamma = 0$. Alors, on peut prendre $\beta = -1$. On a

$$F(z, a_i) = a_i^2 A_0 + a_i A_1 + A_2 = A_0(a_i^2 + \alpha a_i) + A_2 \qquad (i = 0, 1, \cdots).$$

Dans ce cas,

$$0 \leqq T(r, A) - T(r, A) \leqq O(1)$$

et

$$T(r, A') = T(r, A_2/A_0) + O\ (\log r)$$

où $A = (A_0, A_1, A_2)$ et $A' = (A_0, A_2)$. Par conséquent, d'après le lemme 1, on a

$$\theta_2(a_i, f) = \theta_2(x_i, A_2/A_0)$$

où

$$x_i = -a_i^2 - \alpha a_i.$$

Parce qu'il existe au plus un j tel que $x_i = x_j$, soient $\{x_{i_k}\}_{k=0}^{\infty}$ toutes les valeurs distinctes les unes les autres dans $\{x_i\}_{i=0}^{\infty}$, alors, on a

$$\sum_{k=0}^{\infty} \theta_2(x_{i_k}, A_2/A_0) > 1$$

et

$$\theta_2(\infty, A_2/A_0) = 1.$$

C'est une contradiction en considérant que A_2/A_0 est fonction méromorphe transcendante. Cela veut dire que $\gamma \neq 0$. On peut supposer que $\gamma = -1$. Alors, on a

$$F(z, a_i) = a_i^2 A_0 + a_i A_1 + A_2 = (a_i^2 + \alpha) A_0 + (a_i + \beta) A_1 \qquad (i = 0, 1, \cdots).$$

Dans ce cas,

$$0 \leqq T(r, A) - T(r, A'') \leqq O(1)$$

et

$$T(r, A'') = T(r, A_1/A_0) + O\ (\log r)$$

où $A''=(A_0, A_1)$. On peut trouver, comme dans la démonstration du théorème 1, qu il existe un et un seul i tel que

$$a_i+\beta=0$$

en appliquant le lemme 2 à A_1/A_0 au lieu de A_1. On peut démontrer les autres choses aussi comme dans les démonstrations des théorèmes 1 et 2.

N. B. 1. Si $A_0\equiv 1$, on obtient les théorèmes 1 et 2.
N. B. 2. On peut changer " θ_2 " en " δ " dans ce théorème.

4. Le cas de systémes. Dans ce paragraphe, on considére l'extension des résultats dans le paragraphe 3 aux systèmes.

THÉORÈME 4. *Soient A_0, A_1 et A_2 trois fonctions entières sans zéros communs à toutes telles que*

$$\lim_{r\to\infty}\frac{T(r, A)}{\log r}=\infty$$

où $A=(A_0, A_1, A_2)$. Si $\theta_2(A_0)=1$ et s'il existe des combinaisons $\{F_i\}_{i=0}^{\infty}$ des fonctions A_0, A_1 et A_2, linéaires, homogènes à coefficients constants, linéairement indépendantes 3 à 3 et telles que $F_0=A_0$ et

$$\sum_{i=1}^{\infty}\theta_2(F_i)>2,$$

alors,

1) *il existe une et une seule combinaison dans $\{F_i\}_{i=1}^{\infty}$ (soit F_1) telle que*

$$F_1=K_0A_0 \qquad (K_0\neq 0, \textit{ constante});$$

2) *il existe quelques paires dans $\{F_i\}_{i=2}^{\infty}$ (soient $G_1, H_1, \cdots, G_p, H_p$; $1\leqq p\leqq\infty$) telles que*

$$G_k=\alpha_k H_k \qquad (\alpha_k\neq 0, \textit{ constante}),$$

par conséquent

$$\theta_2(G_k)=\theta_2(H_k) \qquad (k=1, \cdots, p);$$

3) *soit*

$$E=\{F_i\}_{i=2}^{\infty}-\{G_k, H_k\}_{k=1}^{p},$$

alors,

$$\sum_{k=1}^{p}\theta_2(G_k)+\sum_{F_i\in E}\theta_2(F_i)\leqq 1.$$

Démonstration. En vertu du lemme 2, l'hypothèse entraîne qu'il existe une relation linéaire, homogène à coefficients constants non tous nuls entre les fonctions A_0, A_1 et A_2. Soit cette relation

$$\alpha A_0+\beta A_1+\gamma A_2=0. \tag{10}$$

Parce que $\beta\neq 0$ ou $\gamma\neq 0$, il suffit de démontrer le cas $\gamma\neq 0$. On peut supposer que $\gamma=-1$. Soient

$$F_i=a_iA_0+b_iA_1+c_iA_2=A_0(a_i+\alpha c_i)+A_1(b_i+\beta c_i) \qquad (i=1, 2, \cdots). \tag{11}$$

On démontre qu'il existe un et un seul i tel que

$$b_i+\beta c_i=0.$$

D'abord, s'il en existe deux:

$$b_i+\beta c_i=0 \quad \text{et} \quad b_j+\beta c_j=0 \qquad (i\neq j),$$

on a

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ b_i & b_i & c_i \\ a_j & b_i & c_j \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} b_i & c_i \\ b_j & c_j \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & c_i \\ 0 & c_j \end{vmatrix} =0.$$

C'est une contradiction à l'hypothèse. On suppose, ensuite, que, pour tout i

$$b_i+\beta c_i\neq 0.$$

Soient

$$x_i=-\frac{a_i+\alpha c_i}{b_i+\beta c_i},$$

alors, de (11)

$$N_2(r, 0, F_i)=N_2(r, x_i, A_1/A_0) \qquad (i=1, 2, \cdots).$$

De (10), on a facilement

$$T(r, A)=T(r, A_1/A_0)+O(\log r),$$

par conséquent,

$$\theta_2(F_i)=1-\limsup_{r\to\infty}\frac{N_2(r, 0, F_i)}{T(r, A)}=1-\limsup_{r\to\infty}\frac{N_2(r, x_i, A_1/A_0)}{T(r, A_1/A_0)}$$

$$=\theta_2(x_i, A_1/A_0).$$

Or, $x_i=x_j=x_k$ $(i\neq j, i\neq k, j\neq k)$ signifie que $T(r, A)=O(1)$, qui est absurde. Par conséquent, soient $\{x_{i_k}\}_{k=1}^{\infty}$ toutes les valeurs distinctes dans $\{x_i\}_{i=1}^{\infty}$, alors,

$$\sum_{k=1}^{\infty} \theta_2(x_{i_k}, A_1/A_0) > 1$$

et d'après l'hypothèse, $\theta_2(\infty, A_1/A_0)=1$. C'est une contradiction au lemme 2. Cela veut dire qu il y a un et un seul i (soit 1) tel que

$$b_1+\beta c_1=0,$$

de sorte que

$$F_1=(a_1+\alpha c_1)A_0.$$

On a 1), parce que si $a_1+\alpha c_1=0$, $F_1 \equiv 0$, qui est absurde. Ensuite, il y au moins une paire dans $\{x_i\}_{i=2}^{\infty}$ (soit x_{i_1} et x_{i_2}) telle que $x_{i_1}=x_{i_2}$. En effet, si $\{x_i\}_{i=2}^{\infty}$ sont distinctes les unes les autres, on a de l'hypothèse

$$\theta_2(\infty, A_1/A_0)+\sum_{i=2}^{\infty} \theta_2(x_i, A_1/A_0)>2,$$

qui est absurde.

Soient $\{u_k, v_k\}_{k=1}^{p}$ $(1 \leqq p \leqq \infty)$ toutes les paires dans $\{x_i\}_{i=2}^{\infty}$ telles que

$$u_k=v_k \qquad (k=1, \cdots, p).$$

et $\{G_k, H_k\}$ les combinaisons correspondant à $\{u_k, v_k\}$ $(k=1, \cdots, p)$, alors

$$G_k=\alpha_k H_k \ (\alpha_k \neq 0\text{: une constante}) \text{ et } \theta_2(G_k)=\theta_2(H_k) \ (k=1, \cdots, p).$$

On a 2). Soit

$$E=\{F_i\}_{i=2}^{\infty}-\{G_k, H_k\}_{k=1}^{p},$$

alors, on peut démontrer facilement

$$\sum_{k=1}^{p} \theta_2(G_k)+\sum_{F_i \in E} \theta_2(F_i) \leqq 1,$$

N.B.1. On peut démontrer un résultat analogue si on suppose

$$\theta_2(A_1)=1 \qquad \text{ou} \qquad \theta_2(A_2)=1$$

au lieu de $\theta_2(A_0)=1$.

N.B.2. On a le même théorème par le changement de "θ_2" en "δ".

5. Plus généralement, on peut démontrer deux théorèmes suivants.

THÉORÈME 5. *Soit $f(z)$ une fonction algébroïde définie par* (1). *Supposons qu'il existe des valeurs $N=\{a_i\}_{i=0}^{\infty}$ (finies ou non) telles que*

$$\sum_{i=0}^{\infty} \theta_2(a_i, f)>3.$$

S'il existe une valeur dans N (soit a_0) tell que

$$\theta_2(a_0, f)=1,$$

1) *il y a une et une seule autre valeur dans* N (*soit* a_1) *telle que*

$$F(z, a_1)=k_1F(z, a_0) \qquad (k_1 \neq 0, \text{ constante});$$

2) *il y a quelques paires dans* $N-\{a_0, a_1\}$ (*soit* $b_1, c_1, \cdots, b_p, c_p$; $1 \leqq p \leqq \infty$) *telles que*

$$F(z, b_k)=\alpha_k F(z, c_k) \qquad (\alpha_k \neq 0, \text{ constante}),$$

par conséquent

$$\theta_2(b_k, f)=\theta_2(c_k, f) \qquad (k=1, \cdots, p);$$

3) *soit*

$$E=N-\{a_0, a_1\}-\{b_k, c_k\}_{k=1}^{p},$$

alors,

$$\sum_{k=1}^{p} \theta_2(b_k, f)+\sum_{a_i \in E} \theta_2(a_i, f) \leqq 1. \tag{12}$$

En particulier, si

$$N=\{a;\ \theta_2(a, f)>0\},$$

3) *est changé comme suivant:*

3′) *E contient au plus deux éléments et l'égalité* (12) *est aussi valable.*

THÉORÈME 6. *Soit* $A=(A_0, A_1, A_2)$ *un système tel que*

$$\lim_{r\to\infty} \frac{T(r, A)}{\log r}=\infty$$

où A_0, A_1 *et* A_2 *sont entières sans zéros communs à toutes. Supposons qu'il existe des combinaisons* $\{F_i\}_{i=0}^{\infty}=F$ *de* A_0, A_1 *et* A_2, *linéaires, homogènes à coefficients constants, linéairement indépendantes* 3 *à* 3 *et telles que*

$$\sum_{i=0}^{\infty} \theta_2(F_i)>3.$$

S'il y a une combinaison dans F (*soit* F_0) *telle que*

$$\theta_2(F_0)=1,$$

1) *il existe une et une seule autre combinaison dans* F (*soit* F_1) *telle que*

$$F_1=k_2F_0 \qquad (k_2 \neq 0, \text{ constante});$$

2) *il y a quelques paires dans* F (*soient* $G_1, H_1, \cdots, G_p, H_p$; $1 \leqq p \leqq \infty$) *telles que*

$$G_k = \alpha_k H_k \qquad (\alpha_k \neq 0, \text{ constante}),$$

par conséquent

$$\theta_2(G_k) = \theta_2(H_k) \qquad (k=1, \cdots, p);$$

3) *soit*

$$E = F - \{F_0, F_1\} - \{G_k, H_k\}_{k=1}^{p},$$

alors, on a

$$\sum_{k=1}^{p} \theta_2(G_k) + \sum_{F_i \in E} \theta_2(F_i) \leqq 1.$$

N.B. 1. Si a_0 (resp. F_0) est exceptionnelle au sens de Picard (ou lacunaire), a_1 (resp. F_1) est aussi exceptionnelle au sens de Picard (ou lacunaire).

N.B. 2. " θ_2 " peut être changé par " δ " dans les théorèmes 5 et 6.

Comme cas particulier, on peut démontrer les théorèmes suivants.

THÉORÈME 7. *Soient* $f(z)$ *une fonction algébroïde définie par* (1) *et* $N = \{a;\ \theta_2(a, f) > 0\}$. *Si*

$$\sum_{a \in N} \theta_2(a, f) = 4,$$

alors, pour toute valeur a *dans* N, *il existe une et une seule autre valeur dans* N (*soit* b) *telle que*

$$F(z, a) = k_a F(z, b)$$

où k_a *est une constante différente de zéro et* $F(z, \infty) = A_0$.

THÉORÈME 8. *Soit* $A = (A_0, A_1, A_2)$ *un système comme dans le théorème* 6. *S'il existe des combinaisons* $N = \{F\}$ *des* A_0, A_1 *et* A_2, *linéaires, homogènes à coefficients constants, linéairement indépendantes* 3 *à* 3 *et telles que*

$$\sum_{F \in N} \theta_2(F) = 4.$$

alors, pour toute combinaison F *dans* N, *il existe une et une seule autre combinaison dans* N (*soit* $\tilde{F}$) *telle que*

$$F = k_F \tilde{F}$$

où k_F *est constante différente de zéro.*

BIBLIOGRAPHIE

[1] CARTAN, H., Sur les zéros des combinaisons linéaires de p fonctions holomorphes données. Mathematica **7** (1933), 5–33.

[2] NEVANLINNA, R., Le théorème de Picard-Borel et la théorie des fonctions méromorphes. Paris, Gauthier-Villars (1929).

[3] NIINO, K., ET M. OZAWA, Deficiencies of an entire algebroid function. Kōdai Math. Sem. Rep. **22** (1970), 98–113.

[4] SELBERG, H. L., Algebroide Funktionen und Umkehrfunktionen Abelscher Integrale. Avh. Norske Vid. Akad. Oslo **8** (1934), 1–72.

[5] VALIRON, G., Sur la dérivée des fonctions algébroïdes. Bull. Soc. Math. **59** (1931), 17–39.

INSTITUT DE MATHÉMATIQUES,
UNIVERSITÉ DE TÔHOKU, SENDAI.