MITTLERE VERZERRUNGEN BEI KONFORMER ABBILDUNG EINES AUFGESCHLITZTEN STREIFENS.

Von Yûsaku KOMATU.

1. In einer früheren Note[1] hat der Verfasser sich beschäftigt mit der Aufgabe über mittlere Verzerrungen bei konformer Abbildung in den Fällen einiger speziellen Typen von kanonischen Schlitzgebieten. In der vorliegenden Note betrachten wir einen weiteren Typus von kanonischen Grundgebieten, welche dadurch entsteht, daß man einen horizontalen Parallelstreifen längs einiger horizontalen oder vertikalen Geradenschlitze aufgeschlitzt, und wir sollen dann die der früheren entsprechende Aufgabe behandeln.

Im allgemeinen, läßt sich jedes $n+1$-fach zusammenhängende Gebiet in der w-Ebene mit nicht ausgearteten Randkomponenten — nur der solche Fall ist wesentlich! — schlicht auf einen horizontal oder vertikal aufgeschlitzten Parallelstreifen derart abbilden, daß ein ausgezeichnetes Randkontinuum in die Begrenzungsgeraden $\mathfrak{J}z = \pm\pi/2, \quad -\infty < \mathfrak{R}z < +\infty$ und die übrigen Randkontinua vorgeschriebenenweise in die horizontalen oder vertikalen Schlitze übergehen; weiter sollen dabei zwei ausgezeichnete auf dem erstgenannten Randkontinuum gelegene Randelemente in $-\infty + i0$ bzw. $+\infty + i0$ übergehen. Solche Abbildung ist nicht nur stets möglich, sondern eindeutig bestimmt bis auf eine Verschiebung in der Richtung der reellen Achse in der z-Ebene.[2]

Wir nehmen nun der Einfachheit halber an, daß ein gegebenes $n+1$-fach zusammenhängendes Gebiet D in der w-Ebene als äußerstes Randkomponent auch die Geraden $\mathfrak{J}w = \pm\pi/2, \quad -\infty < \mathfrak{R}w < +\infty$ besitzt und also dessen übrigen Randkontinua im Streifen $|\mathfrak{J}w| < \pi/2$ enthalten sind, und ferner, daß bei der betrachteten Abbildung der soeben erwähnten Art die äußersten Begrenzungsgeraden einander entsprechen und überdies die zwei unendlichfern liegende Randelemente invariant bleiben sollen.

Es sei

$$z = h(w)$$

eine in D schlichte Funktion welche dieses Gebiet unter Festhaltung der Randelemente $\pm\infty + i0$ abbildet auf ein in der z-Ebene gelegenes Gebiet derselben Art wie D. Es ist leicht zu sehen, daß solche Funktion der Limesbeziehung

$$h(w) = w(1 + o(1)) \qquad (w \in D, \quad \mathfrak{R}w \to \pm\infty)$$

genügt, welche zum Ideenkreis des Begriffs der Winkelderivierte gehört. Aber wir können ferner genauere asymptotische Beziehungen

$$h(w) = w + b_\pm[h] + o(1) \qquad (w \in D, \quad \mathfrak{R}w \to \pm\infty)$$

behaupten; hiebei bedeuten $b_+[h]$ und $b_-[h]$ irgendwelche reelle Konstanten. Diese Beziehungen gelten sogar gleichmäßig mit Einschluß der äußersten Begrenzungsgeraden von D.[3] Wir führen nun die Bezeichnung ein:

$$\beta[h] = b_+[h] - b_-[h] \equiv \lim_{w \to \infty} (h(w) - h(-w) - 2w).$$

Wir bezeichnen nun mit

$$z = f(w) \qquad \text{bzw.} \qquad z = g(w)$$

die auf der erwähnten Weise normierte Funktion welche die Abbildung vom gegebenen Gebiet D auf einen längs lauter horizontaler bzw. vertikaler Geradenschlitze aufgeschlitzten Parallelstreifen vermittelt. Dann sind diese beiden Funktionen, mihin auch die Größen $b_\pm[f]$ und $b_\pm[g]$ bis auf die additiven reellen Konstanten bestimmt. Die reellen Größen $\beta[f]$ und $\beta[g]$ sind dagegen von der Wahl der Abbildungsfunktionen unabhängig und durch das Urgebiet D eindeutig bestimmt. Diese beiden Gebietskonstanten lassen sich durch gewisse Extremaleigenschaften charakterisieren. In der Tat, bezeichenen wir mit $\mathfrak{F}$ die Familie derjenigen Funktionen, welche das Gebiet D unter Festhaltung der Randelemente $\pm\infty + i0$ schlicht abbilden auf beliebige Gebiete derselben Art wie D, dann lauten die Extremalcharaktere:

$$\beta[f] = \operatorname*{Max}_{h \in \mathfrak{H}} \beta[h]$$

und

$$\beta[g] = \operatorname*{Min}_{h \in \mathfrak{H}} \beta[h].$$

Ferner lassen sich beide Abbildungsfunktionen f und g durch diese Extremalitäten eindeutig bestimmt bis auf additive reelle Konstanten.[4]

Da eine spezielle Funktion $h_0(w) \equiv w$ mit $\beta[h_0] = 0$ gewiß zur Familie $\mathfrak{H}$ gehört, so ersehen wir offenbar, daß die Ungleichung

$$\beta[f] \geqq 0 \geqq \beta[g]$$

gilt; hierbei besteht das linke bzw. rechte Gleichheitszeichen nur wenn f bzw. g eine Parallelverschiebung in der Richtung der reellen Achse vermittelt, also das Gebiet D selbst die betreffende kanonische Gestalt besitzt.

Eine genauere Betrachtung führt weiter zum Resultat, daß eine präzisere Ungleichung

$$\beta[f] \geqq d/\pi$$

gilt, wo d das Flächeninhalt des im Innern von $|\Im w| < \pi/2$ enthaltenen Teils der komplementären Menge von D bezeichnet.[5]

Nun bezeichnen wir die Umkehrfunktion von $z = f(w)$ bzw. $z = g(w)$ mit $w = \varphi(z)$ bzw. $w = \psi(z)$. Dann besteht die asymptotische Beziehung

$$\varphi(z) = z + b_\pm[\varphi] + o(1)$$

bzw.

$$\psi(z) = z + b_\pm[\psi] + o(1)$$

für $\Re z \to \pm\infty$, worin natürlich

$$b_\pm[\varphi] = - b_\pm[f]$$

bzw.

$$b_\pm[\psi] = - b_\pm[g]$$

gesetzt ist. Setzen wir also wieder

$$\beta[\varphi] = b_+[\varphi] - b_-[\varphi],$$

$$\beta[\psi] = b_+[\psi] - b_-[\psi],$$

dann erhalten wir die Ungleichung

$$\beta[\varphi] \leqq 0 \leqq \beta[\psi];$$

das linke bzw. rechte Gleichheitszeichnen besteht nur wenn φ bzw. ψ eine Parallelverschiebung in der Richtung der reellen Achse vermittelt. Der Ungleichung $\beta[f] \geqq d/\pi$ entsprechend, gilt weiter

$$\beta[\varphi] \leqq -d/\pi$$

2. Auf Grund der eben genannten Tatsache liegt eine Frage nahe, ob, wenn das Gebiet D angenähert dieselbe Gestalt besitzt wie eine horizontal bzw. vertikal aufgeschlitzten horizontalen Parallelstreifen, so der Wert von $\beta[\varphi]$ bzw. $\beta[\psi]$ gleichmäßig beinahe gleich Null ist:

Um diese Vermutung bejahend zu bestätigen, versuchen wir beide Größen $\beta[\varphi]$ und $\beta[\psi]$ mittels lauter einigen geometrischen Quantitäten abzuschätzen von unten bzw. von oben.

Satz 1. Als $(n+1)$-fach zusammenhängendes kanonisches Gebiet sei ein Gebiet in der $z = x+iy$-Ebene gegeben, welches dadurch entsteht, daß man einen horizontalen Parallelstreifen längs n horizontaler Geradenschlitze aufschlitzt. Die $n+1$ Randkomponenten seien

$$t_0.\quad -\infty < x < +\infty, \quad y = \pm\pi/2;$$

$$t_j.\quad c_j^- \leqq x \leqq c_j^+, \quad y = h_j$$
$$(j = 1, \cdots, n).$$

Für jede in diesem Gebiete schlichte Funktion $w = \varphi(z)$, welche die äußerste Randkomponente t_0 nebst den zwei unendlichfern liegenden Randelemente invariant bleiben läßt und sich auf allen inneren Randkomponenten stetig verhält,[6] gilt dann die Relation

$$\beta[\varphi]$$
$$= -\frac{1}{\pi}\sum_{j=1}^{n}\int_{c_j^-}^{c_j^+}(v(x,h_j+0)-v(x,h_j-0))\,dx,$$

worin $\varphi(z) = u(x,y) + i\,v(x,y)$, d.i. $v(x,y) = \Im\varphi(z)$, gesetzt ist.

Beweis. Die Differenzfunktion $w - z = \varphi(z) - z$ ist eindeutig und regulär im aufgeschlitzten Streifen und sogar stetig mit Einschluß des Randes. Alle Schlitze des Grundgebiets seien in $X^- < x < X^+$ enthalten. Nach dem Cauchyschen Integralsatz gilt dann

$$\int (w - z)\,dz = 0;$$

das Integral links ist über den ganzen Rand des in $X^- < x < X^+$ enthaltenen Teils vom Greundgebiet im positiven Sinne zu erstrecken. Durch Trennung des imaginären Anteils erhalten wir also

$$
\begin{aligned}
0 &= \mathfrak{J}\int (w-z)\,dz \\
&= \int_{-\pi/2}^{\pi/2} ((u(X^+,y)-X^+) - (u(X^-,y)-X^-))\,dy \\
&\quad + \sum_{j=1}^{n} \int_{c_j^-}^{c_j^+} (v(x,h_j+0) - v(x,h_j-0))\,dx.
\end{aligned}
$$

Nun gilt aber die asymptotische Beziehung

$$
w - z = b_\pm[\varphi] + o(1) \qquad (\mathfrak{R}z \to \pm\infty)
$$

mit reellen $b_\pm[\varphi]$, welche nach sich zieht:

$$
u(X^\pm, y) - X^\pm = b_\pm[\varphi] + o(1) \qquad (X^\pm \to \pm\infty).
$$

Wir erhalten somit durch den Grenzübergang $X^\pm \to \pm\infty$ die gewünschte Relation

$$
0 = \pi(b_+[\varphi] - b_-[\varphi]) + \sum_{j=1}^{n} \int_{c_j^-}^{c_j^+} (v(x,h_j+0) - v(x,h_j-0))\,dx.
$$

Zusatz 1. Unter denselben Voraussetzungen wie im Satz 1 gilt die Ungleichung

$$
\sum_{j=1}^{n} \int_{c_j^-}^{c_j^+} (v(x,h_j+0) - v(x,h_j-0))\,dx \geqq 0;
$$

die Gleichheit darin besteht nur wenn $\varphi(z) = z + b$ mit einer reellen Konstante b

Zusatz 2. Unter denselben Voraussetzungen wie im Satz 1, wenn wir weiter mit δ_j die Breite in der vertikalen Richtung der j-ten Randkomponenten des Bildgebietes, i.e. der zu t_j entsprechenden Komponente bezeichnen, nämlich wenn wir

$$
\delta_j = \operatorname*{Osc}_{z\in t_j} \mathfrak{J}\varphi(z) \qquad (j = 1, \cdots, n)
$$

setzen, dann gilt die Abschätzung

$$
-\sum_{j=1}^{n} (c_j^+ - c_j^-) < -\frac{1}{\pi}\sum_{j=1}^{n} \delta_j (c_j^+ - c_j^-) \leqq \beta[\varphi] \leqq 0.
$$

Der letzte Zusatz besagt insbesondere, daß die Größe $\beta[\varphi]$ einen nahen Wert an Null besitzt, sofern alle vertikalen Breiten δ_j $(j = 1, \cdots, n)$ hinreichend schmal sind.

Satz 2. Als $(n+1)$-fach zusammenhängendes kanonisches Gebiet sei diesmal ein Gebiet in der $z = x+iy$-Ebene gegeben, welches dadurch entsteht, daß man einen horizontalen Parallelstreifen längs n vertikaler Geradenschlitze aufschlitzt. Die $n+1$ Randkomponenten seien

$$
\begin{aligned}
s_0 &: \quad -\infty < x < +\infty, \quad y = \pm\pi/2; \\
s_j &: \quad x = c_j, \quad h_j^- \leqq y \leqq h_j^+ \qquad (j = 1, \cdots, n).
\end{aligned}
$$

Für jede in diesem Gebiete schlichte Funktion $w = \psi(z)$, welche die äußerste Randkomponente nebst den zwei unendlichfern liegenden Randelemente invariant bleiben läßt und sich auf allen inneren Randkomponenten stetig verhält, gilt dann die Relation

$$
\beta[\psi] = \frac{1}{\pi}\sum_{j=1}^{n} \int_{h_j^-}^{h_j^+} (u(c_j+0,y) - u(c_j-0,y))\,dy,
$$

worin $\psi(z) = u(x,y) + i v(x,y)$, d.i. $u(x,y) = \mathfrak{R}\psi(z)$, gesetzt ist.

Beweis. Mit analogen Bezeichnungen wie im Beweise des vorigen Satzes, erhalten wir für $w = \psi(z)$:

$$
\begin{aligned}
0 &= \mathfrak{J}\int (w-z)\,dz \\
&= \int_{-\pi/2}^{\pi/2} ((u(X^+,y)-X^+) - (u(X^-,y)-X^-))\,dy \\
&\quad - \sum_{j=1}^{n} \int_{h_j^-}^{h_j^+} (u(c_j+0,y) - u(c_j-0,y))\,dy.
\end{aligned}
$$

Der Grenzübergang $X^\pm \to \pm\infty$ führt also ähnlich wie oben zur Relation

$$
0 = \pi(b_+[\psi] - b_-[\psi]) - \sum_{j=1}^{n} \int_{h_j^-}^{h_j^+} (u(c_j+0,y) - u(c_j-0,y))\,dy.
$$

Zusatz 1. Unter denselben Voraussetzungen wie im Satz 2 gilt die Ungleichung

$$
\sum_{j=1}^{n} \int_{h_j^-}^{h_j^+} (u(c_j+0,y) - u(c_j-0,y))\,dy \geqq 0;
$$

die Gleichheit darin besteht nur wenn $\psi(z) = z + b$ mit einer reellen Konstante b.

Zusatz 2. Unter denselben Voraussetzungen wie im Satz 2, wenn wir weiter mit γ_j die Breite in der horizontalen Richtung der j-ten Randkomponenten des Bildgebietes, i.e. der zu s_j entsprechenden Komponente bezeichnen. nämlich wenn wir

$$\gamma_j = \operatorname*{Osc}_{z \in s_j} \Re\psi(z) \qquad (j = 1, \cdots, n)$$

setzen, dann gilt die Abschätzung

$$0 \leqq \beta[\psi] \leqq \frac{1}{\pi}\sum_{j=1}^{n} \gamma_j (h_j^+ - h_j^-) < \sum_{j=1}^{n} \gamma_j$$

Der letzte Zusatz besagt also insbesondere, daß die Größe $\beta[\psi]$ einen nahen Wert an Null besitzt, sofern alle horizontalen Breiten γ_j $(j = 1, \cdots, n)$ hinreichend schmal sind.

Beide oben bewiesenen Sätze lassen sich in einer allgemeineren Form folgendermaßen zusammenfassen.

Satz 3. In der $z = x + iy$-Ebene sei ein $(n+1)$-fach zusammenhängendes Gebiet gegeben, welches dadurch entsteht, daß man den horizontalen Parallelstreifen $|\Im z| < \pi/2$ längs p horizontaler Schlitze t_j $(j = 1, \cdots, p)$ sowie $n-p$ vertikaler Schlitze s_j $(j = p+1, \cdots, n)$ aufschlitzt; es seien

$$t_j. \quad c_j^- \leqq x \leqq c_j^+, \quad y = h_j \qquad (j = 1, \cdots, p);$$

$$s_j \quad x = c_j, \quad h_j^- \leqq y \leqq h_j^+ \qquad (j = p+1, \cdots, n).$$

Für jede in diesem Gebiete schlichte Funktion $w = \chi(z)$, welche die äußerste Randkomponente nebst den zwei unendlichfern liegenden Randelemente invariant bleiben läßt und sich auf allen inneren Randkomponenten stetig verhält, gilt dann die Relation

$$\beta[\chi] \equiv \lim_{\Re z \to \infty} (\chi(z) - \chi(-z) - 2z)$$

$$= -\frac{1}{\pi}\sum_{j=1}^{p} \int_{c_j^-}^{c_j^+} (v(x, h_j+0) - v(x, h_j-0))\,dx$$

$$+ \frac{1}{\pi}\sum_{j=p+1}^{n} \int_{h_j^-}^{h_j^+} (u(c_j+0, y) - u(c_j-0, y))\,dy,$$

worin $\chi(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ gesetzt ist.

Beweis. Aus der aus dem Cauchyschen Integralsatze folgenden Beziehung

$$0 = \Im\int (\chi(z) - z)\,dz$$

$$= \int_{-\pi/2}^{\pi/2} ((u(X^+, y) - X^+) - (u(X^-, y) - X^-))\,dy$$

$$+ \sum_{j=1}^{p} \int_{c_j^-}^{c_j^+} (v(x, h_j+0) - v(x, h_j-0))\,dx$$

$$- \sum_{j=p+1}^{n} \int_{h_j^-}^{h_j^+} (u(c_j+0, y) - u(c_j-0, y))\,dy$$

erhalten wir durch Grenzübergang $X^{\pm} \to \pm\infty$ sofort die gewünschte Relation.

(*) Eingegangen am 26. September 1951.

(1) Y.Komatu, Zur konformen Abbildung vielfach zusammenhängender Gebiete. Proc. Japan Acad. 22 (1946), 343-351.

(2) Die Existenz- und Eindeutigkeitssätze solcher Abbildungen sind gezeigt in Y. Komatu und M.Ozawa, Conformal mapping of multiply connected domains, I. Kōdai Math. Sem. Rep. Nos. 5-6 (1951); vgl. auch T. Kubo, On conformal mapping of multiply-connected domains. Mem. Coll. Sci. Kyoto.

(3) Vgl. Y.Komatu und M.Ozawa, loc. cit. (2).

(4) Vgl. Y.Komatu und M.Ozawa, loc. cit. (2).

(5) Vgl. wieder Y.Komatu und M. Ozawa, loc. cit. (2).

(6) Es ist sicher der Fall, etwa wenn die Bilder von t_j die Jordankurven oder -schlitze sind.

Mathematisches Seminar, Institut für Technologie zu Tokyo.