Tôhoku Math. Journ.
23(1971), 621–639.

DAS ANFANGSWERTVERHALTEN VON EVOLUTIONS-GLEICHUNGEN IN BANACHRÄUMEN
TEIL II: ANWENDUNGEN

W. KÖHNEN

(Received January 27, 1971)

4. Einführung und bekannte Resultate. Diese Arbeit ist der zweite Teil der Abhandlung "W.Köhnen: Das Anfangswertverhalten von Evolutionsgleichungen in Banachräumen, Tôhoku Math. Journ. 22(1970), 566-596." Den Inhalt dieser Arbeit setzen wir im folgenden als bekannt voraus. Formal ist der Zusammenhang mit dem ersten Teil dadurch gekennzeichnet, dass die Numerierung der Abschnitte sowie der Literaturzitate an diesen anschliesst.

Wir wollen nun -wie in Abschnitt 1.1 schon angedeutet- aufbauend auf den Ergebnissen von Teil I, das Verhalten der Grösse $\|u(t;f)-f\|$ für $t \to 0+$ in Abhängigkeit von f untersuchen. Dabei ist $u(t;f)$ starke Lösung des Anfangswertproblems für die abstrakte inhomogene Evolutionsgleichung

$$(4.1)\qquad \begin{cases} u'(t) = \dfrac{du}{dt} = A(t)u + F(t) & (0 < t \leqq T,\ T > 0) \\ u(0) = f, \quad f \in \mathbf{X} \end{cases}$$

mit linearem, abgeschlossenem, im allgemeinen unbeschränktem Operator $A(t)$ in einem komplexem Banachraum $\mathbf{X}$ mit der Norm $\|\cdot\|$. Die erzielten Resultate wenden wir dann auf konkrete Anfangswertprobleme für Differentialgleichungen vom parabolischen Typ an. Damit können physikalische Aussagen über Ausgleichsvorgänge, also z.B. über gewisse Probleme der Wärmeleitung, der Diffusion und anderer ähnlicher Prozesse gewonnen werden.

Unsere approximationstheoretischen Untersuchungen betreffen Lösungen des Problems (4.1), welche durch den nachfolgenden Satz geliefert werden.

SATZ 4.1(H. Tanabe [28] und P.E. Sobolevskij [24]). *Erfüllt die Schar der Operatoren* $A(t)$ $(0 \leqq t \leqq T)$ *die Voraussetzungen von Satz* 1.1 *und ist* $F(t)$ *eine auf* $[0,T]$ *definierte Funktion mit Werten in* $\mathbf{X}$, *die hölderstetig ist, d.h.*

$$(4.2)\qquad \|F(t)-F(r)\| \leqq C'|t-r|^{\gamma} \qquad (0 < \gamma \leqq 1;\ t, r \in [0,T]),$$

dann hat das Problem (4.1) *eine eindeutige Lösung*

(4. 3) $$u(t;f)=U(t,0)+\int_0^t U(t,v)f(v)dv,$$

wobei $U(t,s)$ *der Evolutionsoperator aus Satz* 1. 1 *ist.*

BEMERKUNG. Satz 4. 1 gilt unverändert, wenn wir die Schar der Operatoren $A(t)$ durch die gestörte Schar $(A(t)+B(t))$ aus Satz 3. 1 ersetzen und den Evolutionsoperator $U(t,s)$ durch den entsprechenden Evolutionsoperator $V(t,s)$ (siehe H. Tanabe [28]). Bei unseren Anwendungen beschränken wir uns auf die Untersuchung von (4. 3), weisen aber von Fall zu Fall auf Verbesserungen hin, die durch die Benutzung der gestörten Gleichung ermöglicht werden.

Wir bezeichnen im folgenden mit $\mathbf{L}_*^q(a,T)$ $(a\in[0,T))$ die Menge der numerischwertigen Funktionen $h(t)$, für die $\int_a^T |h(t)|^q dt/(t-a)$ $(1\leqq q<\infty)$ bzw. $\operatorname{wes\,sup}_{a<t\leqq T}|h(t)|$ $(q=\infty)$ im Lebesgueschen Sinne als endliche Zahl existiert. Das für unsere weiteren Untersuchungen wichtigste Resultat der voraufgegangenen Arbeit geben wir nun noch einmal in einer etwas anderen, für die folgenden Betrachtungen zweckmässigeren Form wieder (vgl. Satz 2. 12).

SATZ 4. 2. *Für beliebige* $a,b,c,d\in[0,T)$ *und* $0<\alpha<1, 1\leqq q<\infty$ *bzw.* $0<\alpha\leqq 1, q=\infty$ *sind die folgenden Teilräume von* $\mathbf{X}$ *gleich*:

(i) $\mathbf{X}_{\alpha,q;A(a)}=\{f: f\in\mathbf{X}; t^{-\alpha}\|\exp(tA(a))f-f\|\in\mathbf{L}_*^q(0,T)\}$;

(ii) $\mathbf{X}'_{\alpha,q;A(b)}=\{f: f\in\mathbf{X}; t^{1-\alpha}\|A(b)\exp(tA(b))f\|\in\mathbf{L}_*^q(0,T)\}$;

(iii) $\mathbf{X}_{\alpha,q;U(c)}=\{f: f\in\mathbf{X}; (t-c)^{-\alpha}\|U(t,c)f-f\|\in\mathbf{L}_*^q(c,T)\}$;

(iv) $\mathbf{X}'_{\alpha,q;U(d)}=\{f: f\in\mathbf{X}; (t-d)^{1-\alpha}\|A(t)U(t,d)f\|\in\mathbf{L}_*^q(d,T)\}$.

Satz 4. 2 ermöglichte es auch zu zeigen, dass das Approximationsverfahren $\{U(t,a), t\to a+;\ a\in[0,T)\}$ die Saturationseigenschaft besitzt. Dabei stellte sich heraus, dass der Nullraum von $A(a)$ der "triviale" Unterraum von $\mathbf{X}$ war und die Saturationsklasse mit $\widetilde{\mathbf{D}(A(a))}^X$ identifiziert werden konnte (siehe Satz 2. 7).

Im einzelnen zeigen wir nun im nächsten Abschnitt, dass für $t\to 0+$ $U(t,0)f$ und $u(t;f)$ dasselbe Verhalten aufweisen, das ausserdem durch die Ableitung $u'(t;f)$ von $u(t;f)$ charakterisiert werden kann (Satz 5. 1). Beziehungen, die zwischen dem Approximationsverhalten von $u'(t;f)$ und dem von (eventuell vorhandenen) höheren Ableitungen $u^{(n)}(t;f)$ $(n=2,3,\cdots)$ bestehen, stellt Satz 5. 2 auf. In Abschnitt 6 untersuchen wir dann konkrete Beispiele, bei denen $A(t)$ ein gewöhnlicher Differentialoperator ist. Es gelingt, für Operatoren der Form

$$A(t)f=a(x,t)f''+b(x,t)f'+c(x,t)f$$

mit relativ allgemeinen Koeffizienten das Approximationsverhalten der Lösung $u(t;f)$ von (4.1) auf das des singulären Integrals von Gauss-Weierstrass (periodisch wie nichtperiodisch) zu reduzieren, über das uns bekannte Resultate zur Verfügung stehen (Satz 6.5 und 6.6). Dies ermöglicht es unter anderem, Aussagen über die Wärmeleitung in einem inhomogenen unendlich langen Stab auf solche für einen homogenen Stab zurückzuführen. Schliesslich zeigen wir in Abschnitt 7, dass sich für geeignete partielle Differentialoperatoren entsprechend das Approximationsverhalten von $u(t;f)$ über das n-dimensionale singuläre Integral von Gauss-Weierstrass beschreiben lässt.

Bevor wir nun die angekündigten Resultate beweisen, zitieren wir noch einen Satz von P. E. Sobolevskij [24].

SATZ 4.3. *Es seien die Voraussetzungen von Satz* 1.1 *erfüllt. Es sei ferner* $A(t)A(0)^{-1}$ *k-mal stark stetig differenzierbar auf* $[0,T]$, *und* $A^{(k)}(t)A(0)^{-1}$ *sei hölderstetig in der gleichmässigen Operatortopologie auf* $[0,T]$. *Ist dann* $F(t)$ *k-mal stark stetig differenzierbar auf* $[0,T]$ *und* $F^{(k)}(t)$ *hölderstetig in der Norm von* $\mathbf{X}$ *auf* $[0,T]$, *so ist* $u(t;f)$ $(k+1)$*-mal stark stetig differenzierbar auf* $(0,T]$, *und es gilt*

$$\|u^{(k)}(t;f)\| \leqq C_{k+1}t^{-(k+1)} \qquad (t \in (0,\ T]).$$

5. Das Anfangswertverhalten von $u(t;\ f)$ und seinen Ableitungen. Der nun folgende Satz zeigt, dass wir das Approximationsverhalten von $u(t;f)$ auf das von $U(t,\ 0)f$ und damit (wegen Satz 2.4) auf das von $\exp(tA(0))$ reduzieren können. Darüberhinaus klärt er durch die Äquivalenz ii)$\Longleftrightarrow$iii) den Zusammenhang zwischen dem Approximationsverhalten von $u(t;\ f)$ und dem von $u'(t;\ f)$, gibt also für das Verhalten von $u(t;\ f)$ eine "Charakterisierung vom Zamanskyschen Typ". Diese Charakterisierung enthält als Spezialfall $(F(t)=0)$ die (allerdings rein algebraische) Äquivalenzbeziehung des Satzes 2.10.

SATZ 5.1. *Für ein* $f \in \mathbf{X}$ *sind die folgenden Aussagen für* $0<\alpha<1$, $1\leqq q<\infty$ *bzw.* $0<\alpha\leqq 1$, $q=\infty$ *untereinander äquivalent*:
(i) $t^{-\alpha}\|U(t,0)f-f\| \in \mathbf{L}^q_*(0,\mathrm{T})$;
(ii) $t^{-\alpha}\|u(t;\ f)-f\| \in \mathbf{L}^q_*(0,T)$;
(iii) $t^{1-\alpha}\|u'(t;\ f)\| \in \mathbf{L}^q_*(0,T)$.

BEWEIS. Die Äquivalenz der Aussagen (i) und (ii) ergibt sich sofort mit Lemma 3.4. Nun ist weiter in $0\leqq s\leqq t\leqq T$

$$A(t)\int_s^t \exp((t-v)A(v))F(v)dv = (\exp((t-s)A(t))-I)F(t)$$

$$+\int_s^t A(t)(\exp((t-v)A(v))-\exp((t-v)A(t)))F(v)dv$$

$$+\int_s^t A(t)\exp((t-v)A(t))(F(v)-F(t))dv$$

(siehe H. Tanabe [28]). Daraus ergibt sich wegen der Holomorphie der Halbgruppen $\{\exp(\tau A(t));\ 0\leqq\tau<\infty\}(t\in[0,T])$, Lemma 2.8 und der Hölderstetigkeit von $F(t)$

$$\left\|A(t)\int_0^t \exp((t-v)A(v))F(v)dv\right\|\leqq C\,.$$

Auf Grund der Abgeschlossenheit von $A(t)$, Lemma 2.8 und der Hölderstetigkeit von $F(t)$ folgt ferner

$$\left\|A(t)\int_0^t W(t,v)F(v)dv\right\|\leqq C\,.$$

Die beiden letzten Abschätzungen ergeben nun zusammen mit Satz 4.2 die Äquivalenz der Aussagen (ii) und (iii).

Wir bemerken, dass die Äquivalenz (i)$\Longleftrightarrow$(ii) in Satz 5.1 offenbar gültig bleibt, wenn wir $U(t,0)$ durch $V(t,0)$ ersetzen und $u(t;f)$ nicht mit $U(t,s)$ sondern mit $V(t,s)$ in (4.3) bilden. Dies lässt eine Verschärfung späterer Aussagen zu, weil wir dadurch auf Grund von Satz 3.7 und 3.8 auch Approximationsaussagen für die Lösung einer gestörten Gleichung auf solche für die Halbgruppen $\{\exp(tA(a));\ 0\leqq t<\infty\}$ $(a\in[0,T))$ zurückführen können.

Es ist klar, dass die Äquivalenz der Aussagen (i) und (ii) in Satz 5.1 auch für $-\infty<\alpha<0$, $1\leqq q<\infty$ und $-\infty<\alpha\leqq 0$, $q=\infty$ erhalten bleibt, während sie für die anderen Werte von α und q im allgemeinen nicht erfüllt ist. Da

$$\lim_{t\to 0+}\left\|(1/t)\int_0^t U(t,v)F(v)dv-F(0)\right\|=0$$

gilt, haben wir für ein $f\in\mathbf{X}$ die Äquivalenz der Aussagen $\|u(t;f)-f\|=o(t)$ $(t\to 0+)$ und $\|U(t,0)f-f\|=o(t)$ $(t\to 0+)$, die natürlich nicht erfüllt ist, wenn $F(0)\neq 0$ ist.

Das Approximationsverhalten der höheren Ableitungen von $u(t;f)$ untersuchen wir nun lediglich für den Fall der zweiten Ableitung. Entsprechende Resultate gelten auch für die höheren Ableitungen, sollen aber hier nicht explizit aufgeführt werden, weil sie für konkrete Anwendungen von geringem Interesse sind.

SATZ 5.2. *Unter den Voraussetzungen von Satz* 4.3 *für* $k=1$ *sind für* $0<\alpha<1$ *und ein* $f\in\mathbf{X}$ *die folgenden Aussagen untereinander äquivalent*:

(i) $t^{1-\alpha}\|u'(t;f)\|\in\mathbf{L}_*^\infty(0,T)$;

(ii) $t^{2-\alpha}\|u''(t;f)\|\in\mathbf{L}_*^\infty(0,T)$.

BEWEIS. Man überlegt sich leicht, dass für jedes $f \in \mathbf{X}$ und alle $t \in (0, T]$ der Grenzwert

$$\lim_{h\to 0} \frac{A(t+h)-A(t)}{h} u(t; f)$$

in der Norm des Raumes $\mathbf{X}$ existiert; wir bezeichnen ihn mit $A'(t)u(t; f)$. Es gilt damit weiter für jedes $\tau \in (0, t]$

$$\text{(5. 1)} \qquad u''(t; f) = A(t)\left\{U(t, \tau)u'(t; f) + \int_\tau^t U(t,v)(F'(v)+A'(v)u(v; f))dv\right\}$$
$$+ A'(t)u(t; f) + F'(t)$$

(siehe) P. E.Sobolevskij [24]). Es gelte nun Aussage (i). Wir setzen in der letzten Formel $\tau = t/2$. Wegen Lemma 2. 8 und der Holomorphie der Halbgruppen $\{\exp(\tau A(t)); \ 0 \leqq \tau < \infty\}(t \in [0, T])$ bekommen wir dann

$$t^{2-\alpha}\|A(t)U(t, t/2)u'(t; f)\| \in \mathbf{L}_*^\infty(0, T) .$$

Die Abschätzung der anderen Terme in (5. 1) bereitet keine Schwierigkeiten. Die Funktion $F'(v)+A'(v)u(v; f)$ ist nämlich auf $[t/2, t]\,(0 < t \leqq T)$ hölderstetig in der Norm von $\mathbf{X}$ (siehe P.E.Sobolevskij [24]). Folglich erhalten wie genau wie im Beweis von Satz 5. 1 (man setze dort anstelle von $F(v)$ die Funktion $F'(v)+A'(v)u(v; f)$)

$$\left\|A(t)\int_{t/2}^t U(t, v)(F'(v) + A'(v)u(v; f))dv\right\| \leqq C .$$

Damit erhalten wir Aussage (ii), da die Abschätzung der beiden letzten Terme in (5. 1) evident ist. Umgekehrt ist für $0 < t < T$

$$u'(t; f) - u'(T; f) = \int_T^t u''(v; f)dv ,$$

woraus sich $\|u'(t; f)\| \leqq C(t^{\alpha-1} - T^{\alpha-1}) + \|u'(T; f)\|$, also Aussage (i), ergibt.

Wir weisen nochmals darauf hin, dass sich durch Kombination der Sätze 5. 2, 5. 1 und 4. 2 das Approximationsverhalten von $u''(t; f)$ auf das der Halbgruppe $\{\exp(tA(0)); \ 0 \leqq t < \infty\}$ zurückführen lässt.

Bevor wir nun die bisherigen Resultate, insbesondere die Sätze 5. 2, 5. 1, 4. 2 und 2. 7 auf konkrete Differentialgleichungsprobleme anwenden, sei noch eine Bemerkung gemacht, auf die wir schon im Anschluss an den Beweis von Satz 2. 7 hingewiesen hatten. Erfüllt nicht $A(t)$, sondern der Operator $(A(t)+kI)$, wobei k

eine beliebige komplexe Zahl ist, die Voraussetzungen von Satz 1. und $B(t)$ die Voraussetzungen von Satz 1. 3 bezüglich $(A(t)+kI)$, dann ist offensichtlich $u_k(t; f)$ die Lösung von

$$u'(t) = (A(t) + B(t) + kI))u(t) + F(t)e^{kt},\ u(0) = f,\ f \in \mathbf{X} \qquad (0 < t \leqq T);$$

genau dann, wenn $u(t; f) = e^{-kt}u_k(t; f)$ Lösung von

$$u'(t) = (A(t) + B(t))u(t) + F(t),\ u(0) = f,\ f \in \mathbf{X} \qquad (0 < t \leqq T);$$

ist. Daraus erkennt man, dass alle bisherigen Approximationssätze unverändert auch für $u(t; f) = e^{-kt}u_k(t; f)$ Gültigkeit haben, wobei jedoch beachtet werden muss, dass der "triviale" Unterraum in den Saturationssätzen 2. 7 und 3. 8 nun der Nullraum von $(A(a)-kI)$ bzw. von $(A(a)+B(a)-kI)$ ist.

6. Beispiele mit $A(t)$ als gewöhnlichem Differentialoperator. Wie angedeutet, wollen wir nun zuerst in geeigneten Banachräumen von Funktionen das Approximationsverhalten von $u(t; f)$ für Operatoren $A(t)$ diskutieren, die durch

$$(A(t)f)(x) = a(x, t)f''(x) + b(x, t)f'(x) + c(x, t)f(x)$$

mit noch zu spezifizierenden Funktionen $a(x,t)$, $b(x, t)$ und $c(x, t)$ definiert sind. Zu diesem Zweck muss als erstes nachgewiesen werden, dass bei geeigneter Wahl einer Konstanten k_1 die Operatoren $(A(t)-k_1I)$ die Voraussetzungen von Satz 1. 1 erfüllen. Diesen Nachweis erbringen wir in den nachfolgenden Sätzen 6. 3 und 6. 4. Zuvor benötigen wir noch einige Hilfsmittel.

Es sei A Erzeuger einer bezüglich $t \in (0, \infty)$ stark stetigen Halbgruppe $\{\exp(tA);\ 0 \leqq t < \infty\}$ von Operatoren. Wir bezeichnen dann mit $\mathfrak{P}(A)$ die Klasse der linearen Opevatoren B in $\mathbf{X}$ mit den Eigenschaften: (i) $\mathrm{D}(B) = \mathrm{D}(A)$, (ii) $B(\lambda I - A)^{-1} \in \mathfrak{E}(\mathbf{X})$ für ein $\lambda \in \rho(A)$ und (iii) $\int_0^1 \|B \exp(tA)\|_A dt < \infty$ ($\|\cdot\|_A$ ist die Norm der Restriktion des Operators $B\exp(tA)$ auf $\mathrm{D}(A)$).

Es sei ferner der Winkel ϕ mit $0 < \phi \leqq \pi/2$ fest vorgegeben. Mit $\boldsymbol{C}\mathbf{H}(\phi, M)$ bezeichnen wir die Klasse aller Halbgruppen $\{\exp(zA);\ |\arg z| < \phi\}$ von Operatoren, die holomorph in allen Punkten z mit $|\arg z| < \phi$ sind und die der Ungleichung $\|\exp(zA)\| \leqq M$ für alle z mit $|\arg z| < \phi$ genügen. Eine Halbgruppe der Klasse $\boldsymbol{C}\mathbf{H}(\phi, M)$ ist eine Halbgruppe der Klasse $(\mathbf{H}-\phi, \phi)$ im Sinne von E. Hille und R.S.Phillips [12, S. 325] mit der zusätzlichen Eigenschaft $\|\exp(zA)\| \leqq M$ für $|\arg z| < \phi$. Ist $\{\exp(zA);\ |\arg z| < \phi\}$ aus der Klasse $\mathbf{H}(-\phi, \phi)$, so läpt sich zu jedem $\varepsilon > 0$ eine positive reelle Zahl $\omega(\varepsilon)$ finden, so dass für die Halbgruppe $\{\exp(z(A-\omega(\varepsilon)I));\ |\arg z| < \phi\}$ die Abschätzung $\|\exp(z(A-\omega(\varepsilon)I))\| \leqq M_\varepsilon$ in $|\arg z| < \phi - \varepsilon$ erfüllt ist (siehe E.Hille-R.S.Phillips [12, S.359 u. S.384]). Wir brauchen nun noch zwei wichtige Ergebnisse.

LEMMA 6. 1 (E.Hille-R.S.Phillips [12, S.418]). *Gehört die Halbgruppe* $\{\exp(zA);\ |\arg z|<\phi\}$ *von Operatoren zu der Klasse* $\mathbf{H}(-\phi, \phi)$ *und ist* $B \in \mathfrak{P}(A)$, *dann erzeugt der Operator* $A+B$ *mit* $\mathrm{D}(A)=\mathrm{D}(A+B)$ *auch eine Halbgruppe* $\{\exp(z(A+B));\ |\arg z|<\phi\}$ *von Operatoren der Klasse* $\mathbf{H}(-\phi, \phi)$.

LEMMA 6. 2 (R.T.Moore [34]). *Ist A Erzeuger einer Halbgruppe der Klasse* $\boldsymbol{CH}(\phi, 1)$, *dann ist A* ϕ*-sektorial bezüglich jedes halbinneren Produktes auf* $\mathbf{X}$, *d.h. für jedes halbinnere Produkt* $[\cdot,\cdot]$ *auf* $\mathbf{X}$ *gilt*

$$\operatorname{tg}\phi\,|\mathrm{Im}[Af, f]|\leqq -\mathrm{Re}[Af, f]\geqq 0 \qquad (0\leqq\phi<\pi/2),$$

$$\mathrm{Im}\,[Af, f]=0,\quad \mathrm{Re}[Af, f]\leqq 0 \qquad (\phi=\pi/2)$$

für alle $f\in \mathrm{D}(A)$. *Ist umgekehrt A linear und abgeschlossen,* $\mathrm{D}(A)$ *dicht in* $\mathbf{X}$, $\rho(A)\cap\Delta_\phi$ *nicht leer* ($\Delta_\phi=\{z\colon |\arg z|<\pi/2+\phi\}$) *und A* ϕ*-sektorial bezüglich eines halbinneren Produktes auf* $\mathbf{X}$, *dann ist A Erzeuger einer Halbgruppe der Klasse* $\boldsymbol{CH}(\phi, 1)$.

In der Folge bezeichnen wir nun mit $\mathbf{L}_p$, $1\leqq p\leqq\infty$, den komplexen Banachraum der auf der reellen Zahlengeraden definierten, komplexwertigen, zur p-ten Potenz Lebesgue-integrierbaren bzw. wesentlich beschränkten Funktionen unter der Norm

$$\|f\|_p=\left\{\int_{-\infty}^{\infty}|f(x)|^p dx\right\}^{1/p} \qquad \text{bzw.} \qquad \|f\|_\infty=\mathrm{wes}_x\sup\,|f(x)|$$

und mit $\mathbf{C}[-\infty,\infty]$ den Banachunterraum von $\mathbf{L}_\infty$, der aus den gleichmässig stetigen Funktionen besteht. Mit **LAC** bezeichnen wir die Klasse der auf $(-\infty,\infty)$ lokal absolut stetigen Funktionen. Im folgenden sei $\mathbf{X}$ stets einer der Räume $\mathbf{L}_p$, $1\leqq p<\infty$ oder $\mathbf{C}[-\infty,\infty]$. Wir haben dann

SATZ 6. 3. *Es sei der Operator A in* $\mathbf{X}$ *wie folgt definiert*: $\mathrm{D}(A)=\{f\colon f \in \mathbf{X}, f, f'\in \mathbf{LAC}, f', f''\in\mathbf{X}\}$ *und*

$$(Af)(x)=a(x)f''(x)+b(x)f'(x)+c(x)f(x),$$

wobei im Falle $X=\mathbf{C}[-\infty,\infty]$ $a(x), b(x), c(x)\in\mathbf{C}[-\infty,\infty]$ *und im Falle* $\mathbf{X}=\mathbf{L}_p$ $a(x), b(x), c(x)\in\mathbf{L}_\infty$ *sind. Ferner sei* $a(x)>\delta_1>0$ *für alle* $x\in(-\infty,\infty)$. *Bei hinreichend grosser Wahl der Konstanten* k_1 *gibt es dann einen Sektor* Σ *der in Satz* 1. 1 *genannten Art, so dass* $\Sigma\subset\rho(A-k_1 I)$ *gilt und für alle* $\lambda\in\Sigma$ *die Abschätzung*

$$\|((\lambda + k_1)I - A)^{-1}\| \leqq M/(1 + |\lambda|)$$

erfüllt ist.

BEWEIS. Der Beweis stellt, wie die vorangegangenen Hilfssätze andeuteten, eine Anwendung der Störungstheorie für Halbgruppen von Operatoren dar. Der Operator $A_1 f = f''$ mit $D(A_1) = D(A)$ ist Erzeuger der Gauss-Weierstrass Halbgruppe

$$[\exp(tA_1))f](x) = \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-\frac{(x-u)^2}{4t}\right) f(u) du \qquad (t > 0),$$

für die $\|\exp(tA_1)\| \leqq 1$ $(0 \leqq t < \infty)$ und $\|A_1 \exp(tA_1)\| \leqq 1/t$ $(0 < t < \infty)$ gilt. Aus diesen beiden Bedingungen folgt, dass die Gauss-Weierstrass Halbgruppe eine holomorphe Erweiterung $\{\exp(zA_1); |\arg z| < 1/e\}$ besitzt, die zu der Klasse $\boldsymbol{CH}(1/e - \varepsilon, M_\varepsilon)$ für jedes $\varepsilon > 0$ gehört (siehe P. L. Butzer-H. Berens [7, S.16]). Definieren wir nun den Operator B_1 durch $D(B_1) = D(A)$ und

$$(B_1 f)(x) = \frac{b(x)}{a(x)} f'(x) + \frac{c(x)}{a(x)} f(x),$$

so bestätigt man leicht, dass B_1 zur Klasse $\mathfrak{P}(A_1)$ gehört. Es ist nämlich

$$((I - A_1)^{-1} f)(x) = 1/2 \int_{-\infty}^{\infty} \exp(-|u - x|) f(u) du$$

(siehe K. Yosida [30, S.243]), woraus sich offenbar

$B_1(I - A_1)^{-1} \in \mathfrak{E}(\mathbf{X})$ ergibt. Ferner gilt

$$\|B_1 \exp(tA_1) f\| \leqq \left(\text{wes}_x \sup \left| \frac{b(x)}{a(x)} \right| \frac{1}{\sqrt{\pi t}} + \text{wes}_x \sup \left| \frac{c(x)}{a(x)} \right| \right) \|f\|,$$

was unmittelbar $\int_0^1 \|B_1 \exp(tA_1)\|_A \, dt < \infty$ zur Folge hat. Wegen Lemma 6.1 erhalten wir damit, dass es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $\omega_0(\varepsilon)$ gibt, so dass der Operator $A_2(\varepsilon) = (A_1 + B_1 - \omega_0(\varepsilon) I)$ mit $D(A_2(\varepsilon)) = D(A)$ eine Halbgruppe der Klasse $\boldsymbol{CH}(1/e - \varepsilon, M'_\varepsilon)$ erzeugt. Wir wählen nun ein $\varepsilon = \varepsilon_0$ fest und setzen $A_2 = A_2(\varepsilon_0)$ und $1/e - \varepsilon_0 = \phi_0$. Auf $\mathbf{X}$ führen wir dann durch

$$|||f||| = \sup_{z:\, |\arg z| \leqq \phi_0} \|\exp(zA_2) f\|$$

eine neue Norm ein, die zu $\|\cdot\|$ offenbar äquivalent ist und unter der $\{\exp(zA_2); |\arg z| \leqq \phi_0\}$ eine Halbgruppe der Klasse $\mathbf{CH}(\phi_0, 1)$ wird. Es gilt nämlich

$$|||\exp(zA_2)||| = \sup_f \frac{|||\exp(zA_2)f|||}{|||f|||}$$

$$= \sup_f \frac{\sup_{|\arg \lambda|\leqq\phi_0} \|\exp(zA_2)\ \exp(\lambda A_2)f\|}{\sup_{|\arg \lambda|\leqq\phi_0} \|\exp(\lambda A_2)f\|}$$

$$= \sup_f \frac{\sup_{|\arg \lambda|\leqq\phi_0} \|\exp(\lambda A_2)f\|}{\sup_{|\arg \lambda|\leqq\phi_0} \|\exp(\lambda A_2)f\|} = 1\,.$$

Das bedeutet nach Lemma 6. 2, dass A_2 ϕ_0-sektorial bezüglich jedes halbinneren Produktes $[\cdot,\cdot]$ auf $\mathbf{X}$ (versehen mit der Norm $|||\cdot|||$) ist. Daraus folgt, dass der Operator A_3, definiert durch $(A_3f)(x)=a(x)f''(x)+b(x)f'(x)+c(x)f(x)-\omega_0(\varepsilon_0)a(x)f(x)$ mit $\mathrm{D}(A_3)=\mathrm{D}(A)$ ebenfalls ϕ_0-sektorial ist, denn es gilt für alle $f\in \mathrm{D}(A_3)=\mathrm{D}(A_2)$

$$\begin{aligned}\operatorname{tg}\,\phi_0|\operatorname{Im}[A_3f, f]| &= a(x)\operatorname{tg}\phi_0|\operatorname{Im}[A_2f, f]| \leqq -a(x)\operatorname{Re}[A_2f, f]\\ &= -\operatorname{Re}[A_3f, f]\geqq 0\,.\end{aligned}$$

A_3 ist ferner abgeschlossen, und $\mathrm{D}(A_3)$ ist dicht in $\mathbf{X}$. Mit Hilfe eines allgemeinen Satzes von K. Gustafson [32] findet man weiter sofort, dass $\rho(A_3)\cap\Delta_{\phi_0}$ nicht leer ist. Damit ergibt sich aus Lemma 6. 2, dass A_3 eine Halbgruppe $\{\exp(zA_3); |\arg z| \leqq\phi_0\}$ von Operatoren erzeugt mit $|||\exp(zA_3)|||\leqq 1$ für $|\arg z|\leqq\phi_0$. Kehren wir nun zur ursprünglichen Norm des Raumes $\mathbf{X}$ zurück, so ist $\|\exp(zA_3)\|\leqq M'_{\varepsilon_0}$ für $|\arg z|\leqq\phi_0$. Da die Operation der Addition von $\omega_0(\varepsilon_0)a(x)$ sicher ein Operator der Klasse $\mathfrak{P}(A_3)$ ist, folgt, analog wie vorher, dass es zu jedem $\varepsilon>0$ ein $\omega_1(\varepsilon)$ gibt, so dass der Operator $A_4(\varepsilon)$ mit $\mathrm{D}(A_4(\varepsilon))=\mathrm{D}(A)$ und $[A_4(\varepsilon)f](x)=a(x)f''(x)+b(x)f'(x)+c(x)f(x)-\omega_1(\varepsilon)f(x)$ eine Halbgruppe der Klasse $\mathbf{CH}(\phi_0-\varepsilon, M''_\varepsilon)$ erzeugt. Wir wählen ein festes $\varepsilon=\varepsilon_1$ und setzen $\phi_1=\phi_0-\varepsilon_1$ und $A_4(\varepsilon_1)=A_4$. Für alle z mit $|\arg z|\leqq\phi_1$ und alle $f\in \mathrm{D}(A_4)$ ist

$$\lim_{|z|\to 0} \|(\exp(zA_4)f-f)/z-A_4f\| = 0$$

(siehe E.Hille-R.S.Phillips [12, S.487]). Daraus folgt, dass für jedes $\varphi\in(-\phi_1, \phi_1)$, wenn wir $\exp(zA_4)=T(z)$ setzen, $\{T(re^{i\varphi}); 0\leqq r<\infty\}$ eine bezüglich $r\in[0,\infty)$ stark stetige Halbgruppe von Operatoren ist, die $e^{i\varphi}A_4$ als Erzeuger hat und für die $\|T(re^{i\varphi})\|\leqq M''_{\varepsilon_1}$, $0\leqq r<\infty$, erfüllt ist. Nach T.Kato [15, S.490] erhalten wir weiter: Alle λ mit $|\arg\lambda|<\pi/2+\phi_1$ gehören zu $\rho(A_4)$, und für jedes $\varepsilon>0$ gilt

$$\|(\lambda I - A_4)^{-1}\| \leqq M_\varepsilon'''/|\lambda| \qquad (|\arg \lambda| \leqq \pi/2 + \phi_1 - \varepsilon).$$

Wählen wir nun wieder $\varepsilon = \varepsilon_2$ fest, so bestätigt man durch eine leichte Rechnung, dass ein Sektor Σ und Konstante k_1 und M, wie gefordert, existieren. Also ist der Satz vollständig bewiesen.

Im Zusammenhang mit Satz 6. 3 machen wir auf eine Arbeit von C.T.Taam [36] aufmerksam, in der unter wesentlich stärkeren Bedingungen an die Koeffizienten $a(x)$ und $c(x)$ für den Fall $\mathbf{X} = \mathbf{C}[-\infty, \infty]$ und für andere Banachräume von stetigen Funktionen Satz 6. 3 mit gänzlich anderen Methoden bewiesen worden ist. C.T.Taam kann zwar zusätzlich zeigen, dass die Halbgruppe $\{\exp(tA);\ 0 \leqq t < \infty\}$ positiv ist, benötigt dieses Ergebnis aber weiter nicht. Wir bekommen nun

SATZ 6. 4. *Für jedes $t \in [0, T]$, $T > 0$, sei der Operator $A(t)$ in $\mathbf{X}$ wie folgt definiert: Es ist* $\mathrm{D}(A(t)) = \{f\colon f \in \mathbf{X},\ f, f' \in \mathbf{LAC},\ f', f'' \in \mathbf{X}\}$ *und*

$$(A(t)f)(x) = a(x, t)f''(x) + b(x, t)f'(x) + c(x, t)f(x),$$

wobei für jedes feste t im Falle $\mathbf{X} = \mathbf{C}[-\infty, \infty]$ $a(x, t)$, $b(x, t)$ und $c(x, t) \in \mathbf{C}[-\infty, \infty]$ und im Falle $\mathbf{X} = \mathbf{L}_p$ $a(x, t)$, $b(x, t)$ und $c(x, t) \in \mathbf{L}_\infty$ sind. Es sei ferner $a(x, t) > \delta > 0$ für alle $x \in (-\infty, \infty)$ und alle $t \in [0, T]$. Für alle $t, s \in [0, T]$ gelte weiter

$$\|a(\cdot, t) - a(\cdot, s)\|_\infty \leqq C_1\ |t - s|^{\rho_1},$$

$$\|b(\cdot, t) - b(\cdot, s)\|_\infty \leqq C_2\ |t - s|^{\rho_2},$$

$$\|c(\cdot, t) - c(\cdot, s)\|_\infty \leqq C_3\ |t - s|^{\rho_3} \qquad (0 < \rho_i \leqq 1,\ i = 1, 2, 3).$$

Gehört dann für jedes $t \in [0, T]$ die Funktion $F(\cdot, t)$ zu $\mathbf{X}$ und ist sie hölderstetig in der Norm von $\mathbf{X}$ auf $[0, T]$, d. h. gilt

$$\|F(\cdot, t) - F(\cdot, s)\|_X \leqq C|t - s|^\gamma \qquad (t, s \in [0, T];\ 0 < \gamma \leqq 1),$$

dann hat das Problem (4. 1) eine eindeutige Lösung $u(t; f)$ in $\mathbf{X}$.

BEWEIS. Zunächst zeigen wir, dass die Operatoren $(A(t) - kI)$ bei geeignet gewählter Konstanten k die Bedingungen aus Satz 1. 1 erfüllen. Wir verfolgen dazu den Beweis von Satz 6. 3 für den Operator $A(t)$ für jedes feste $t \in [0, T]$ und zeigen, dass die zunächst von t abhängigen Grössen Σ und M unabhängig von t gewählt werden können. Durch die erste Störung, die Addition von

$$(B_1(t)f)(x) = \frac{b(x,t)}{a(x,t)} f'(x) + \frac{c(x,t)}{a(x,t)} f(x),$$

sind Halbgruppen $\{\exp(z(A_1+B_1(t))); |\arg z|<1/e\}$ entstanden, die sämtlich aus der Klasse $\mathbf{H}(-1/e, 1/e)$ sind. Für alle $t \in [0,T]$ und alle $\tau>0$ ist aber

$$\|B_1(t)\exp(\tau A_1)\| \leqq C(1+1/\sqrt{\pi\tau}),$$

wobei C unabhängig von t und τ ist. Diese Abschätzung liefert, wie man aus dem Beweis von Lemma 6.1 bei E.Hille-R.S.Phillips [12, S.417-419] direkt entnehmen kann, dass für jedes $\varepsilon>0$ der Operator $A_2(t,\varepsilon)=(A_1+B_1(t)-\omega_0(\varepsilon)I)$ eine Halbgruppe der Klasse $\mathbf{CH}(1/e-\varepsilon, M'_\varepsilon)$ erzeugt, wobei wir M'_ε unabhängig von t wählen können. Der weitere Beweisgang von Satz 6.3 zeigt damit sofort, dass auch Σ und M unabhängig von t gewählt werden können. Weiter haben wir für alle t, $s \in [0,T]$ und alle $f \in \mathbf{X}$

$$\begin{aligned}\|(A(t)-kI)(A(s)-kI)^{-1}f - If\| &= \|(A(t)-A(s))(A(s)-kI)^{-1}f\| \\ \leqq \|(a(\cdot,t)-a(\cdot,s))(d^2/d\cdot^2)&\,(A(s)-kI)^{-1}f(\cdot)\| \\ + \|(b(\cdot,t)-b(\cdot s))(d/d\cdot)&(A(s)-kI)^{-1}f(\cdot)\| \\ + \|(c(\cdot,t)-c(\cdot,s))(A(s)&-kI)^{-1}f(\cdot)\|\,.\end{aligned}$$

Nun sind aber die Operatoren $(d^2/d\cdot^2)(A(s)-kI)^{-1}$ und$(d/d\cdot)(A(s)-kI)^{-1}$ auf Grund des Graphensatzes Elenente aus $\mathfrak{E}(\mathbf{X})$, und nach einer weiteren kleinen Rechnung ergibt sich

$$\|(A(t)-kI)(A(s)-kI)^{-1}-I\| \leqq C|t-s|^\rho$$

mit $\rho=\min(\rho_1,\rho_2,\rho_3)$ und von t, s unabhängigem C. Daraus folgt, dass die Operatoren $(A(t)-kI)$ die Voraussetzungen von Satz 1.1 erfüllen. Beachten wir noch die am Schluss von Abschnitt 5 gemachte Bemerkung, so ist der Beweis des Satzes erbracht.

Man überlegt sich nun leicht weiter folgendes: Sind $a(\cdot,t)$, $b(\cdot,t)$ und $c(\cdot,t)$ bzw. $F(\cdot,t)$ auf $[0,T]$ hölderstetig differenzierbar in der $\mathbf{L}_\infty$-Norm bzw. der Norm von $\mathbf{X}$, so ergibt sich wegen Satz 4.3, dass $u(t;f)$ zweimal stark stetig differenzierbar auf $(0,T]$ ist.

Das Resultat von Satz 6.4 können wir unter schwächeren Voraussetzungen erhalten, wenn wir Satz 1.3 und die im Anschluss an Satz 4.1 gemachte Bemerkung beachten. Eine unmittelbar zu erkennende Verbesserung ist die folgende: Es sei $h(t)$ eine beliebige, stetige, notwendig hölderstetige, numerischwertige Funktion auf $[0,T]$. Wir setzen für $t \in [0,T]$ $B(t)f=h(t)f$ mit $\mathrm{D}(B(t))=\mathbf{X}$, dann sind offenbar die Operatoren $B(t)$ Operatoren der in Satz 1. 3 geforderten Art.

Wir haben nun die Grundlagen bereitgestellt, um die Approximationssätze der vorangegangenen Abschnitte auf die Lösung $u(t; f)$ aus Satz 6. 4 (bzw. auf die durch die zusätzliche Störung erhaltene Lösung) anwenden zu können. Zuvor sei noch erklärt, was wir unter dem verallgemeinerten Lipschitzraum $\mathbf{Lip}(\alpha, r, q;\ \mathbf{X})$ für $0<\alpha<r$, $\mathbf{X}=\mathbf{L}_p(1\leqq p<\infty)$ bzw. $0\leqq\alpha\leqq r$, $\mathbf{X}=\mathbf{C}[-\infty,\infty]$ verstehen wollen:

$$\mathbf{Lip}(\alpha. r, q;\ \mathbf{X})=\{f\colon f\in\mathbf{X};\ t^{-\alpha}\|\Delta_t^r f\|\in\mathbf{L}_*^q(0,\infty)\}\ . \tag{6. 1}$$

Dabei bezeichnet Δ_t^r die r-te rechte Differenz des Elementes $f\in\mathbf{X}$ mit dem Inkrement $t>0$, d. h.

$$\Delta_t^r f=\sum_{n=0}^{r}(-1)^{r-n}\binom{r}{n}f(\cdot+nt)\,. \tag{6. 2}$$

Fur die Lösung $u(t; f)$ aus Satz 6. 4 erhalten wir nun folgenden Approximationssatz:

SATZ 6. 5. a) *Für ein* $f\in\mathbf{X}$ *sind für* $0<\alpha<1$, $1\leqq q\leqq\infty$ *die folgenden Aussagen äquivalent*:

(i) $t^{-\alpha}\|u(t; f)-f\|\in\mathbf{L}_*^q(0, T)$;

(ii) $\begin{cases} f\in\mathbf{Lip}(2\alpha, 1, q;\ \mathbf{X}) & (0<\alpha<1/2)\\ f\in\mathbf{Lip}(1, 2, q;\ \mathbf{X}) & (\alpha=1/2)\\ f\in\mathbf{LAC}\ \textit{und}\ f'\in\mathbf{Lip}(2\alpha-1, 1, q;\ \mathbf{X}) & (1/2<\alpha<1)\,.\end{cases}$

b) *Für ein* $f\in\mathbf{X}$ *sind äquivalent*:

(i) $t^{-1}\|u(t; f)-f\|\in\mathbf{L}_*^\infty(0, T)$;

(ii) $f\in\mathbf{LAC}$ *und* $f'\in\mathbf{Lip}(1, 1, \infty;\ \mathbf{X})$;

(iii) $\begin{cases} \textit{für}\ \mathbf{X}=\mathbf{C}[-\infty,\infty]\colon f, f'\in\mathbf{LAC}\ \textit{und}\ f''\in\mathbf{L}_\infty;\\ \textit{für}\ \mathbf{X}=\mathbf{L}_1\colon f\in\mathbf{LAC}\ \textit{und}\ f'\ \textit{ist von beschränkter Variation auf}\ (-\infty,\infty);\\ \textit{für}\ \mathbf{X}=\mathbf{L}_p(1<p<\infty)\colon f, f'\in\mathbf{LAC}\ \textit{und}\ f''\in\mathbf{X}.\end{cases}$

BEWEIS. Nach Satz 5. 1 und Satz 4. 2 ist bas Problem der Charakterisierung der Elemente $f\in\mathbf{X}$, für die $t^{-\alpha}\|u(t; f)-f\|\in\mathbf{L}_*^q(0, T)$ gilt, zurückgeführt auf die Frage, für welche Elemente $f\in\mathbf{X}$ $t^{-\alpha}\|\exp(tA(0))f-f\|\in\mathbf{L}_*^q(0, T)$ erfüllt ist. Nun gilt folgendes Theorem (siehe P.L.Butzer-W.Köhnen [8]): Sind $\{\exp(tA);\ 0\leqq t<\infty\}$ und $\{\exp(tA');\ 0\leqq t<\infty\}$ zwei bezüglic[h $t\in[0,\infty)$ stark stetige Halbgruppen von Operatoren mit $D(A)\subset D(A')$, so folgt für $0<\alpha<1$, $1\leqq q<\infty$ bzw. $0<\alpha\leqq 1$, $q=\infty$ aus $t^{-\alpha}\|\exp(tA)f-f\|\in\mathbf{L}_*^q(0, T)$ die Aussage $t^{-\alpha}\|\exp(tA').f-f\|\in\mathbf{L}_*^q(0, T)$.

Damit können wir das Problem der Charakterisierung der Elemente $f \in \mathbf{X}$, für die $t^{-\alpha}\|u(t; f)-f\| \in \mathbf{L}_{*}^{q}(0, T)$ gilt, schliesslich auf Approximationsaussagen für das singuläre Integral von Gauss-Weierstrass zurückführen. Für das letztere sind aber die oben angegebenen Charakterisierungen a) (ii) und b) (ii), (iii) in der Literatur wohlbekannt. Wir verweisen diesbezüglich auf P.L.Butzer-H.Berens [7, chapter IV] und die dort zitierte Literatur.

Es ist klar, dass wir mittels Satz 5. 1 nun auch sofort Approximationsaussagen über das Verhalten der Ableitung $u'(t; f)$ von $u(t; f)$ erhalten und ferner, wenn wir noch die oben erwähnten Differenzierbarkeitsbedingungen an die Koeffizienten $a(x, t)$, $b(x, t)$ und $c(x, t)$ bzw. an die Funktion $F(x, t)$ stellen, mittels Satz 5. 2 Aussagen über das Verhalten von $u''(t; f)$ gewinnen.

Wenn $F(\cdot, 0)=0$ ist, liegt, wie wir in Satz 2. 7 und Satz 3. 8 gezeigt haben, Saturation vor. Die Saturationsklasse wird in unserem Beispiel durch Satz (6. 5 b) angegeben. Zur Bestimmung des "trivialen" Unterraumes von $\mathbf{X}$, d. h. der Elemente $f \in \mathbf{X}$, für die $\|u(t; f)-f\|=o(t)$ $(t \rightarrow 0+)$ gilt, müssen wir noch die Elemente aus $\mathbf{X}$ angeben, für die $A(0)f=0$ gilt. Diesen Unterraum ohne weitere Bedingungen an die Koeffizienten $a(x, t)$, $b(x, t)$ und $c(x, t)$ einfacher zu charakterisieren, ist aber nicht möglich, wie wir an dem folgenden Beispiel sehen. Ist $\mathbf{X}=\mathbf{C}[-\infty, \infty]$, $a(x, t) \equiv 1$, $b(x, t) \equiv 0$, $c(x, t)=(1+t)$ und $F(x, t) \equiv 0$ sowie $T=2$, dann gehört $f(x)=\sin x$ zum Nullraum von $A(0)$. Ist aber $a(x, t) \equiv 1$ und $b(x, t)$ $=c(x, t)=F(x, t) \equiv 0$ sowie $T=2$, so gehören nur die Funktionen $f(x)=$ const. zum Nullraum von $A(0)$.

Das letzte Beispiel bestätigt, modifiziert, dass die Räume $\mathbf{X}_{\alpha, q;\, V(a)}$ und $\mathbf{X}_{\alpha, q;\, U(a)}$ für $\alpha \geqq 1$, $1 \leqq q<\infty$ bzw. $\alpha>1$, $q=\infty$ im allgemeinen nicht äquivalent sind. Bezogen auf die Bemerkungen in Abschnitt 3, brauchen wir nämlich dort nur $Af=f''-f$ und $Bf=2f$ zu setzen, um sofort zu erkennen, dass die Nullräume von A und $(A+B)$ im allgemeinen nicht zusammenfallen. Es gehört nämlich $f(x)=\sin x$ zum Nullraum von $A+B$, jedoch nicht zu dem von A.

Für physikalische Anwendungen von Interesse ist nun noch die Frage, inwieweit $u(t; f)$ "klassische Lösung" des konkreten Differentialgleichungsproblems

$$(6.3) \quad \begin{cases} \dfrac{\partial u(x, t)}{\partial t}=a(x, t) \dfrac{\partial^{2} u(x, t)}{\partial x^{2}}+b(x, t) \dfrac{\partial u(x, t)}{\partial x}+c(x, t) u(x, t)+F(x, t) \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad (-\infty<x<+\infty,\ 0<t \leqq T) \\ u(x, 0)=f(x) \end{cases}$$

ist, und somit eine Approximationsaussage entsprechend Satz 6. 5 für die "klassische Lösung" formuliert werden kann. Dabei wollen wir unter einer "klassischen Lösung" des Problems (6. 3) eine Funktion $u(x, t)$ verstehen, die stetig für alle $x \in(-\infty, \infty)$ und $t \in[0, T]$ ist, für die partiellen Ableitungen $\partial u(x, t) / \partial t$, $\partial u(x, t) / \partial x$

und $\partial^2 u(x,t)/\partial x^2$ existieren und stetig sind für alle $x \in (-\infty, \infty)$ und $t \in (0, T]$ und die (6. 3) erfüllt. Es ist nun im allgemeinen schwierig zu entscheiden, wann $u(t, f)$ eine klassische Lösung des Problems (6. 3) ist, ausgenommen im Falle $\mathbf{X} = \mathbf{C}[-\infty, \infty]$. Dann nämlich ist die starke Lösung $u(t, f)$ auch klassische Lösung des Problems (6. 3), die allerdings nicht notwendig eindeutig zu sein braucht. Eine eindeutige klassische Lösung erhalten wir aber, wenn wir das periodische Analogon zu dem bisher betrachteten Beispiel untersuchen. Dies soll im folgenden geschehen.

Mit $\mathbf{L}_p^{2\pi}$, $1 \leqq p \leqq \infty$; bezeichnen wir den komplexen Banachraum, der auf der reellen Zahlengeraden definierten, komplexwertigen, 2π-periodischen, zur p-ten Potenz auf $[0, 2\pi]$ Lebesgueintegrierbaren bzw. auf $[0, 2\pi]$ wesentlich beschränkten Funktionen unter der Norm

$$\|f\|_p^{2\pi} = \left\{ \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(x)|^p \, dx \right\}^{1/p} \qquad \text{bzw.} \quad \|f\|_\infty^{2\pi} = \operatorname{wes}_x \sup |f(x)| \,.$$

$\mathbf{C}^{2\pi}$ sei der Banachunterraum der stetigen Funktionen von $\mathbf{L}_\infty^{2\pi}$ und $\mathbf{AC}^{2\pi}$ die Menge der auf $[0, 2\pi]$ absolut stetigen Funktionen. Es gilt nun:

SATZ 6. 6. *Ist* $\mathbf{X}$ *einer der Räume* $\mathbf{C}^{2\pi}$ *oder* $\mathbf{L}_p^{2\pi}(1 \leqq p < \infty)$, *sind für jedes* $t \in [0, T]$ $a(x,t)$, $b(x,t)$ *und* $c(x,t)$ *Funktionen aus* $\mathbf{C}^{2\pi}$(*im Falle* $\mathbf{X} = \mathbf{C}^{2\pi}$) *bzw. aus* $\mathbf{L}_\infty^{2\pi}$(*im Falle* $\mathbf{X} = \mathbf{L}_p^{2\pi}$), *die hölderstetig in der Norm von* $\mathbf{L}_\infty^{2\pi}$ *bezüglich* $t \in [0, T]$ *sind, dann gilt, wenn zusätzlich* $a(x,t) > \delta' > 0$ *für alle* $x \in (-\infty, \infty)$ *und alle* $t \in [0, T]$ *ist und* $F(\cdot, t)$ *in der Norm von* $\mathbf{X}$ *hölderstetig auf* $[0, T]$ *ist, dass das Problem* (4. 1) *mit*

$$(A(t)f)(x) = a(x,t)f''(x) + b(x,t)f'(x) + c(x,t)f(x)$$

$\mathrm{D}(A(t)) = \{f\colon f \in \mathbf{X}, f, f' \in \mathbf{AC}^{2\pi}, f', f'' \in \mathbf{X}\}$ *und* $F(t) = F(\cdot, t)$ *eine eindeutige starke Lösung* $u(t; f)$ *besitzt, für welche die folgenden Approximationsaussagen gelten*:

a) *Für ein* $f \in \mathbf{X}$ *sind für* $0 < \alpha < 1$, $1 \leqq r \leqq \infty$ *äquivalent*:

$$\text{(i)} \quad t^{-\alpha}\|u(t; f) - f\| \in \mathbf{L}_*^q(0, T);$$

$$\text{(ii)} \begin{cases} f \in \mathbf{Lip}(2\alpha, 1, q; \mathbf{X}) & (0 < \alpha < 1/2) \\ f \in \mathbf{Lip}(1, 2, q; \mathbf{X}) & (\alpha = 1/2) \\ f \in \mathbf{AC}^{2\pi} \text{ und } f' \in \mathbf{Lip}(2\alpha - 1, 1, q; \mathbf{X}) & (1/2 < \alpha < 1). \end{cases}$$

b) *Für ein* $f \in \mathbf{X}$ *sind äquivalent*:

(i) $t^{-1}\|u(t;f)-f\| \in \mathbf{L}_*^\infty(0,T)$;

(ii) $f \in \mathbf{AC}^{2\pi}$ *und* $f' \in \mathbf{Lip}(1,1,\infty;\mathbf{X})$;

(iii) $\begin{cases} \textit{für } \mathbf{X}=\mathbf{C}^{2\pi}\colon f, f' \in \mathbf{AC}^{2\pi} \textit{ und } f'' \in \mathbf{L}_\infty^{2\pi}; \\ \textit{für } \mathbf{X}=\mathbf{L}_1^{2\pi}\colon f \in \mathbf{AC}^{2\pi} \textit{ und } f' \textit{ ist von beschränter Variation auf } [0,2\pi]; \\ \textit{für } \mathbf{X}=\mathbf{L}_p^{2\pi}(1<p<\infty)\colon f, f' \in \mathbf{AC}^{2\pi} \textit{ und } f'' \in \mathbf{X}. \end{cases}$

BEWEIS. Der Beweis der Existenz und Eindeutigkeit von $u(t;f)$ lässt sich ganz analog zu dem Beweis von Satz 6. 4 führen. An die Stelle des singulären Integrals von Gauss-Weierstrass tritt jetzt lediglich das periodische singuläre Integral von Weierstrass

$$[\exp(tA_1)]f(x) = 1/(2\pi)\int_0^{2\pi} \theta_3(x-u;t)f(u)du \qquad (t>0)$$

mit $D(A_1)=D(A(t))$ und $A_1 f = f''$, wobei $\theta_3(\cdot\,;t)$ die Jakobische Thetafunktion

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{-k^2t}e^{ikx} = \sqrt{\frac{\pi}{t}}\sum_{k=-\infty}^{\infty}\exp\left(-\frac{(2\pi k-x)^2}{4t}\right) \qquad (t>0)$$

ist. Es gilt $\|\exp(tA_1)\| \leqq 1$ $(0 \leqq t < \infty)$, $\|A_1\exp(tA_1)\| \leqq 1/t$ $(0<t<\infty)$ sowie die Resolventendarstellung

$$((\lambda I - A_1)^{-1}f)(x) = 1/(2\pi)\int_0^{2\pi} r(\lambda; x-u)f(u)du \qquad (\lambda>0)$$

mit

$$r(\lambda;u) = \frac{\pi}{\sqrt{\lambda}}\,\frac{\cosh\sqrt{\lambda}(u-\pi)}{\sinh\sqrt{\lambda}\,\pi} \qquad (0 \leqq u < 2\pi)$$

(siehe P. L. Butzer-H.Berens [7, chapter 1. 5]). Damit überzeugt man sich, dass alle Beweisschritte des Satzes 6. 4 unverändert übernommen werden können, wenn man jeweils $\mathbf{L}_p$ durch $\mathbf{L}_p^{2\pi}$ bzw. $\mathbf{C}[-\infty,\infty]$ durch $\mathbf{C}^{2\pi}$ ersetzt. Unsere Approximationsaussagen ergeben sich nun ganz entsprechend zum Beweis von Satz 6. 5. Wir können nämlich die Aussagen (i) in Satz 6. 6 auf Approximationsaussagen für das periodische singuläre Integral von Weierstrass reduzieren, für das die oben angegebenen Charakterisierungen wieder wohlbekannt sind. Wir verweisen auf P. L. Butzer-H. Berens [7, chapter IV] und die dort angegebene Literatur.

Die im Anschluss an die Beweise der Sätze 6. 4 und 6. 5 gemachten Bemerkungen über das Verhalten von $u'(t;f)$ und $u''(t;f)$ sowie über die Lösung bei zusätzlich vorhandenen Störungsoperatoren $B(t)$ gelten selbstverständlich unverändert.

Wie schon bemerkt, ist im Falle $\mathbf{X}=\mathbf{C}^{2\pi}$ die Funktion $u(t; f)$ eindeutige klassische Lösung des Problems (6. 3), so dass die Aussagen von Satz 6. 6 im Falle $\mathbf{X}=\mathbf{C}^{2\pi}$ jede klassische, in x 2π-periodische Lösung des Problems (6. 3) betreffen.

Als Beispiel für eine der vielen Anwendungsmöglichkeiten der Sätze 6. 5 und 6. 6 auf Probleme der Wärmeleitung und Diffusion sei das Fouriersche Ringproblem erwähnt. Satz 6. 6 gestattet es, hier unter anderem bei gegebener Anfangstemperaturverteilung, Aussagen über die Art des Temperaturausgleichs zu machen, wenn der adiabatisch abgeschirmte, isotrope Ring aus inhomogenem Material besteht und sich in ihm Wärmequellen befinden.

7. Beispiele mit $A(t)$ als partiellem Differentialoperator. In diesem Abschnitt soll gezeigt werden, dass sich unsere Theorie auch sinnvoll anwenden lässt, wenn $A(t)$ ein geeigneter partieller Differentialoperator ist. Als Spezialfall des nun folgenden Beispiels ergibt sich unser erstes Beispiel.

Die Punkte des reellen euklidischen Raumes E_n der Dimension n bezeichnen wir mit $x=(x_1, x_2, \cdots, x_n)$. Unter $\mathbf{L}_p(E_n)$, $1\leqq p\leqq\infty$, sei der Banachraum der auf dem E_n definierten komplexwertigen, zur p-ten Potenz Lebesgue-integrierbaren bzw. wesentlich beschränkten Funktionen unter der Norm

$$\|f\|_p=\left\{\int_{E_n}|f(x)|^p dx\right\}^{1/p} \textit{bzw.} \quad \|f\|_\infty=\operatorname{wes}_x\sup\,|f(x)|$$

verstanden. Mit $\mathbf{C}(E_n)$ bezeichnen wir den Banachunterraum der gleichmässig stetigen Funktionen von $\mathbf{L}_\infty(E_n)$. Wir verstehen in diesem Abschnitt alle vorkommenden Ableitungen im distributionentheoretischen Sinne. Sei $\mathbf{X}$ einer der Räume $\mathbf{C}(E_n)$ oder $\mathbf{L}_p(E_n)$ $(1\leqq p<\infty)$. Auf $\mathbf{X}$ ist die n-dimensionale Gauss-Weierstrass Halbgruppe durch

$$(\exp(tA_1)f)(x)=\frac{1}{(4\pi t)^{n/2}}\int_{E_n}\exp\left(-\frac{|x-u|^2}{4t}\right)f(u)du \qquad (t>0)$$

definiert mit $\mathrm{D}(A_1)=\{f\colon\ f\in\mathbf{X},\ \ \Delta f\equiv\sum_{i=1}^n(\partial^2/\partial x_i^2)f\in\mathbf{X}\}$ und $A_1 f=f''$ sowie $\|\exp(tA_1)\|\leqq 1$ $(0\leqq t<\infty)$ und $\|A_1\exp(tA_1)\|\leqq n/t$ $(0<t<\infty)$ (siehe P. L. Butzer-H. Berens [7, chapter 4. 3. 2]). Für $i=1, 2, \cdots, n$ definieren wir nun den Operator B_i wie folgt: $\mathrm{D}(B_i)=\{f\colon f\in\mathbf{X}, \partial f/\partial x_i\in\mathbf{X}\}$ und $B_i f=\partial f/\partial x_i$. Damit gilt.

LEMMA 7. 1. *Für jedes $i=1, 2, \cdots, n$ ist $\mathrm{D}(B_i)\subset\mathrm{D}(A_1)$, und die Restriktion B_i^r von B_i auf $\mathrm{D}(A_1)$ ist ein Operator der Klasse $\mathfrak{P}(A_1)$.*

BEWEIS. Der Operator B_i ist abgeschlossen, weil er Erzeuger der Gruppe der Translationen $(G_i(h)f)(x)=f(x+he_i)$ ist; dabei ist $h\in E_1$ und e_i der i-te Einheitsvektor im E_n (siehe P. L. Butzer-H. Berens [7, S. 256]). Es ist leicht zu zeigen, dass für alle $f\in \mathbf{X}$

$$\|B_i\exp(tA_1)f\| \leqq (C/t^{1/2})\|f\| \qquad (t>0)$$

gilt. Wegen der Abgeschlossenheit von B_i erhalten wir weiter wegen

$$\left\|\int_0^\infty e^{-t}B_i\exp(tA_1)fdt\right\| \leqq C\|f\|,$$

dass $(I-A_1)^{-1}[\mathbf{X}]\subset \mathrm{D}(B_i)$ gilt. Also folgt $\mathrm{D}(B_i)\supset \mathrm{D}(A_1)$ und $B_i^r\in \mathfrak{P}(A_1)$.

Mit Hilfe von Lemma 7.1 können wir nun einen zu Satz 6.5 und Satz 6.6 analogen Approximationssatz beweisen. Zuvor noch eine Bezeichnung: Es seien

$$(S(s)f)(x)\equiv |\Omega_n|^{-1}\int_{|\Omega_n|} f(x+se_\sigma)\,d\sigma \qquad (0<s<\infty)$$

die sphärischen Mittel der Funktion f, wobei $f\in \mathbf{X}$ ist und Ω_n die Einheitskugel im E_n, $|\Omega_n|$ deren Oberfläche und e_σ deren Punkte bezeichnet.

SATZ 7.2. *Sind für jedes $t\in[0,T]$ $a(x,t)$, $b_i(x,t)$ $(i=1,2,\cdots,n)$ und $c(x,t)$ Funktionen aus $\mathbf{C}(E_n)$ bzw. $\mathbf{L}_\infty(E_n)$, die hölderstetig in der Norm von $\mathbf{L}_\infty(E_n)$ auf $[0,T]$ sind, gilt $a(x,t)>\delta''>0$ für alle $x\in E_n$ und alle $t\in[0,T]$ und ist ferner $F(\cdot,t)$ für $t\in[0,T]$ eine in der Norm von $\mathbf{X}$ hölderstetige Funktion, dann hat das Problem* (4.1) *mit*

$$(A(t)f)(x)=a(x,t)\Delta f(x)+\sum_{i=1}^n b_i(x,t)\frac{\partial}{\partial x_i}f(x)+c(x,t)f(x),$$

$\mathrm{D}(A(t))=\{f: f\in\mathbf{X},\ (\partial/\partial x_i)f\in \mathbf{X}\ (i=1,2,\cdots,n),\ \Delta f\in \mathbf{X}\}$ *und* $F(t)=F(\cdot,t)$ *eine eindeutige starke Lösung* $u(t;f)$, *für welche die folgenden Approximationsaussagen erfüllt sind.*

a) *Es sei* $\mathbf{X}=\mathbf{L}_p(E_n)\,(1\leqq p<\infty)$ *und* $0<\alpha<1$, $1\leqq q\leqq\infty$, *so sind für ein* $f\in\mathbf{X}$ *äquivalent.*

(i) $t^{-\alpha}\|u(t,f)-f\|\in \mathbf{L}_*^q(0,T)$;

(ii) $\left\{\int_0^\infty (t^{-2\alpha}\|S(t)f-f\|^q\,dt/t\right\}^{1/q}<\infty$,

$$
\text{(iii)} \begin{cases} \left\{\int_{E_n} (|h|^{-2\alpha}\|f(\cdot+h)-f(\cdot)\|)^q \, dh/|h|^n\right\}^{1/q} < \infty & (0<\alpha<1/2), \\ \left\{\int_{E_n} (|h|^{-1}\|f(\cdot+2h)-2f(\cdot+h)+f(\cdot)\|)^q \, dh/|h|^n\right\}^{1/q} < \infty & (\alpha=1/2), \\ \sum_{i=1}^n \left\{\int_{E_n} (|h|^{-(2\alpha-1)}\|\frac{\partial f}{\partial x_i}(\cdot+h)-\frac{\partial f}{\partial f_i}(\cdot)\|)^q \, dh/|h|^n\right\}^{1/q} < \infty & (1/2<\alpha<1). \end{cases}
$$

b) *Es sei* $\mathbf{X}=\mathbf{L}_1(E_n)$, *so sind für ein* $f\in X$ *äquivalent.*

(i) $t^{-1}\ \|u(t, f)-f\| \in \mathbf{L}_*^\infty(0, T)$,

(ii) $t^{-2}\left\|\sum_{i=1}^n (f(\cdot+2te_i)-2f(\cdot+te_i)+f(\cdot))\right\| \in \mathbf{L}_*^\infty(0, T)$,

(iii) $t^{-2}\ \|S(t)f-f\| \in \mathbf{L}_*^\infty(0, \infty)$.

c) *Es sei* $\mathbf{X}=\mathbf{L}_p(E_n)\,(1<p<\infty)$, *so sind für ein* $f\in \mathbf{X}$ *äquivalent*:

(i) $t^{-1}\ \|u(t, f)-f)\| \in \mathbf{L}_*^\infty(0, T)$,

(ii) $\Delta f\in \mathbf{X}$.

d) *Es sei* $\mathbf{X}=\mathbf{C}(E_n)$, *so sind für ein* $f\in \mathbf{X}$ *äquivalent*:

(i) $t^{-1}\ \|u(t, f)-f\| \in \mathbf{L}_*^\infty(0, T)$,

(ii) $t^{-2}\ \|S(t)f-f\| \in \mathbf{L}_*^\infty(0, \infty)$.

BEWEIS. Wegen Lemma 7.1 können wir den Beweis der Existenz und Eindeutigkeit von $u(t, f)$ genauso wie in Satz 6.4 führen. Analog zum Beweis von Satz 6.5 reduzieren sich unsere Approximationsaussagen auf solche für das n-dimensionale Integral von Gauss-Weierstrass, die an den folgenden Stellen zu finden sind. Aussage a), die Äquivalenz (i)$\Longleftrightarrow$(iii) von Aussage b) und Aussage c) in P. L. Butzer-H. Berens [7, chapter 4.3.2]; Aussage d) in W. Köhnen [33], die Äquivalenz (i)$\Longleftrightarrow$(ii) von Aussage b) in P. L. Butzer-W. Trebels [31].

Zum Schluss sei erwähnt, dass sich die Zahl der Beispiele für unsere allgemeine Theorie noch erheblich vermehren lässt; insbesondere können wir Approximationsaussagen der obigen Art für die Lösungen einer Reihe von Integro-Differentialgleichungen gewinnen.

LITERATURVERZEICHNIS

[31] P. L. BUTZER, -W. TREBELS, Operateurs de Gauss-Weierstrass et de Cauchy-Poisson et conditions lipschitziènnes dans $L^1(E_n)$. C, R. Acad. Sci. Paris 268 (1969), 700-703.

[32] K. GUSTAFSON, A note on left multiplication of semi-group generators, Pacific J. Math, 24(1968), 463-465.

[33] W. KÖHNEN, Über die Lösung der Wärmeleitungsgleichung in der Ebene, Staatsarbeit, Aachen 1966.

[34] R. T. MOORE, Duality methods and perturbation of semi-groups, Bull. Amer. Math Soc., 73(1967), 548-553.

[35] A. SOMMERFELD, Vorlesungen über Theoretische Physik, Bd. VI, 5. Aufl. Akad. Verlagsg., Leipzig 1962.

[36] C. T. TAAM, Nonlinear differential equations in Banach spaces and applications, Michigan Math. J., 15(1968), 177-186.

[37] A. N. TYCHONOFF, -A. A. SAMARSKI, Differentialgleichungen der mathematischen Physik. Hochschulb. f. Math. Bd. 39. VEB Deutsch. Verl. d. Wiss., Berlin 1959.

LEHRSTUHL A FÜR MATHEMATIK
TECHNOLOGICAL UNIVERSITY OF AACHEN
AACHEN, WEST GERMANY