Hokkaido Mathematical Journal Vol. 23 (1994) p. 355-360

Voisinage d'une feuille compacte dans un feuilletage Lagrangien : Le problème de linéarisation symplectique

Carlos CURRAS-BOSCH(*) et Pierre MOLINO
(Received July 8, 1993)

Soient $(M, \omega, \mathscr{L})$ une $2n$-variété symplectique munie d'un feuilletage Lagrangien, et L une feuille compacte de $\mathscr{L}$. On sait [Wei] que L est munie d'une connexion affine plate ∇, et que d'autre part un voisinage ouvert $\mathscr{U}$ de L dans (M, ω) s'identifie symplectiquement à un voisinage ouvert $\mathscr{U}_0$ de la section nulle $L \hookrightarrow \left(T^*L, \omega_0\right)$. La connexion plate ∇ définit à son tour dans T^*L un feuilletage Lagrangien $\mathscr{L}_0$ qui sera regardé comme *le linéarisé de* $\mathscr{L}$ *le long de la feuille* L. On remarque que la connexion de Weinstein définie sur L par le feuilletage linéarisé est encore ∇. Comme la dualité symplectique identifie la connexion de Weinstein à celle de Bott [Da], ceci implique en particulier que l'holonomie infinitésimale de L dans les deux feuilletages est la même. On dira que $\mathscr{L}$ est *symplectiquement linéarisable au voisinage de* L si l'on peut (quitte à restreindre $\mathscr{U}$ et $\mathscr{U}_0$) trouver un difféomorphisme symplectique Φ : $(\mathscr{U}, \omega) \to (\mathscr{U}_0, \omega_0)$ respectant L et transportant $\mathscr{L}$ sur $\mathscr{L}_0$. D'après la remarque précédente, ceci suppose que l'holonomie de L dans $\mathscr{L}$ soit linéarisable, car la même propriété est trivialement vraie pour $\mathscr{L}_0$.

Ceci étant, il est naturel de s'intéresser au problème suivant :

Problème de linéarisation symplectique : *Si l'holonomie de* L *dans* $\mathscr{L}$ *est linéarisable,* $\mathscr{L}$ *est-il symplectiquement linéarisable au voisinage de* L ? On remarque que, si L n'a pas d'holonomie dans $\mathscr{L}$, la réponse est affirmative en vertu du théorème d'Arnold-Liouville [Ar].

Dans [Mo] on a observé que la réponse est affirmative pour $n=1$ (c'est élémentaire) et proposé comme étape suivante d'étudier le cas où $n=2$, L étant le tore $\boldsymbol{T}^2$ et ∇ la connexion affine plate complète non triviale ∇_{NY} construite par N. Kuiper [Ku] et T. Nagano-K. Yagi [Na-Ya]. Dans cette situation, un premier exemple a été décrit dans [Cur] où la réponse est négative.

Dans le présent article on construit une famille - paramétrée par une

(*) Avec le support DGIGYT PB 90-0686

fonction arbitraire d'une variable w - de feuilletages Lagrangiens admettant $\left(\boldsymbol{T}^2, \nabla_{\mathrm{NY}}\right)$ comme feuille, et qui ne sont pas symplectiquement équivalents au voisinage de cette feuille.

Pour cela, on fait varier la forme symplectique naturelle ω_0 sur $T^*\boldsymbol{T}^2$ sans changer les feuilles du feuilletage Lagrangien linéaire $\mathscr{L}_0$ défini par ∇_{XY}. Plus précisément, on travaille sur la variété de Poisson $(P, \wedge)$ des orbites de l'action hamiltonienne naturelle de S^1 qui respecte les feuilles de $\mathscr{L}_0$. Sur la feuille symplectique de $(P, \wedge)$ qui contient la projection de la section nulle, on obtient un feuilletage Lagrangien réduit sans holonomie, qui est donc muni d'un paramétrage " action " naturel w transverse aux feuilles. En faisant varier le tenseur $\wedge$, on fait apparaître une fonction arbitraire de w.

La signification de ces résultats est la suivante : on sait [Ree] [Hae] que l'holonomie d'une feuille compacte dans un feuilletage détermine, à équivalence différentiable près, un voisinage de cette feuille muni du feuilletage induit. Ici, pour reconstituer *à équivalence symplectique près* un voisinage feuilleté de (L, ∇) dans un feuilletage Lagrangien, il faut une donnée plus précise que l'holonomie, qu'on pourrait appeler *glissement Lagrangien* le long de la feuille. Si l'on veut, notre construction met en évidence une variation de ce glissement Lagrangien pour un feuilletage dont l'holonomie reste fixe.

On voit qu'il s'agit seulement d'un exemple significatif dans le cadre d'une étude systématique - à faire - du voisinage feuilleté d'une feuille compacte dans un feuilletage Lagrangien.

1. Construction de la famille de feuilletages Lagrangiens.

a) *On considère sur* $\boldsymbol{R}^4$, les relations d'équivalence

$$\begin{cases}(x, y, u, v)\sim(x+1, y, u, v)\\ (x, y, u, v)\sim(x+y, y+1, u, v-u)\end{cases}$$

L'espace quotient, dont les points seront notés comme des classes d'équivalence $[x, y, u, v]$, est muni par la 2-forme $dx\wedge du+dy\wedge dv$ d'une structure symplectique affine.

En identifiant $\left(\boldsymbol{T}^2, \nabla_{\mathrm{NY}}\right)$ au quotient de $\boldsymbol{R}^2$ par la relation d'équivalence $\begin{cases}(x, y)\sim(x+1, y)\\ (x, y)\sim(x+y, y+1)\end{cases}$ on identifie la variété précédente à $T^*\boldsymbol{T}^2$, muni de sa forme symplectique standard ω_0 et de la structure affine associée à ∇_{NY}. Le feuilletage Lagrangien linéaire $\mathscr{L}_0$ est défini par $du=dv=0$.

b) *Le groupe* $S^1=\boldsymbol{R}/\boldsymbol{Z}$ agit de façon hamiltonienne sur $T^*\boldsymbol{T}^2$ par :

$$\theta^1\cdot[x, y, u, v]=[x+\theta^1, y, u, v]$$

Le moment de cette action est la fonction u.

L'espace des orbites est une variété de Poisson $(P, \wedge)$, qui s'identifie à $\boldsymbol{S}^1\times\boldsymbol{R}^2$, paramétrée par (θ^2, u, w), la projection $\pi: T^*\boldsymbol{T}^2\to P$ étant donnée par :

$$\pi([x, y, u, v])=(y \bmod 1, u, v+uy)$$

Les feuilles symplectiques de $(P, \wedge)$ sont définies par $du=0$, et leur structure symplectique est induite par la 2-forme

$$\bar{\omega}_0=d\theta^2\wedge dw$$

Le feuilletage Lagrangien $\mathscr{L}_0$ se projette sur P suivant le feuilletage $\bar{\mathscr{L}}_0$ de dimension 1 défini par $\begin{cases}du=0\\ dw-u\ d\theta^2=0\end{cases}$.

En particulier, la section nulle L_0 de $T^*\boldsymbol{T}^2$ se projette sur P suivant la feuille $\bar{L}_0$ de $\bar{\mathscr{L}}_0$ d'équations $u=w=0$.

Observons pour terminer que la correspondance :

$$[x, y, u, v]\mapsto\left[x-\frac{1}{2}(y^2+y) \bmod 1,\ y \bmod 1,\ u, v+uy\right]$$

permet d'identifier $T^*\boldsymbol{T}^2$ à $\boldsymbol{T}^2\times\boldsymbol{R}^2$, muni des coordonnées $(\theta^1, \theta^2, u, w)$, de manière que, dans ces coordonnées, ω_0 se met sous la forme :

$$\omega_0=d\theta^1\wedge du+d\theta^2\wedge\left[dw+\frac{1}{2}du\right]$$

La projection $\pi: T^*\boldsymbol{T}^2\to P$ s'écrivant simplement $(\theta^1, \theta^2, u, w)\mapsto(\theta^2, u, w)$.

c) *Donnons-nous une fonction différentiable* $\varphi: \boldsymbol{R}\to\boldsymbol{R}^*$, astreinte à la seule condition $\varphi(0)=1$ et considérons sur $T^*\boldsymbol{T}^2$ la 2-forme définie, dans les coordonnées globales $(\theta^1, \theta^2, u, w)$, par

$$\omega_\varphi=d\theta^1\wedge du+d\theta^2\wedge\left[\varphi(w)dw+\frac{1}{2}du\right]$$

Elle est fermée, et, comme φ ne s'annule pas, de rang maximum. Pour la structure symplectique correspondante, le feuilletage $\mathscr{L}_0$, défini par $\begin{cases}du=0\\ dw-ud\theta^2=0,\end{cases}$ est encore Lagrangien.

On a construit ainsi une famille de structures symplectiques pour lesquelles $\mathscr{L}_0$ est Lagrangien. En outre, sur la feuille L_0 de $\mathscr{L}_0$, on a $u=w=0$. *La forme symplectique ω_φ coïncide donc avec ω_0 en tout point de L_0.* D'où il résulte que la connexion de Weinstein définie sur L_0 par ω_φ coïncide avec ∇_{NY}.

2. Démonstration de la non-équivalence symplectique.

a) *Toutes les formes symplectiques ω_φ* sont invariantes par l'action de S^1, et le moment de cette action reste égal à la fonction u. Donc ω_φ définit un tenseur de Poisson $\wedge_\varphi$ sur P.

S'il existe un difféomorphisme symplectique $\phi:(\mathscr{U},\omega_\varphi)\to\left(\mathscr{U}_1,\omega_{\varphi_1}\right)$ respectant le feuilletage $\mathscr{L}_0$ et la feuille L_0, où $\mathscr{U}$ et $\mathscr{U}_1$ sont deux voisinages ouverts de L_0 dans $T^*\boldsymbol{T}^2$, on peut (quitte à restreindre ce voisinage) supposer que $\mathscr{U}$ est S^1-invariant. Mais alors ϕ transportera l'action hamiltonienne de S^1 sur $(\mathscr{U},\omega_\varphi)$ sur une action hamiltonienne de S^1 sur $\left(\mathscr{U}_1,\omega_{\varphi_1}\right)$. Comme cette action hamiltonienne est unique, ceci implique que ϕ respecte l'action de S^1, et se projette donc en un difféomorphisme

$$\bar{\phi}:\bar{\mathscr{U}}=\mathscr{U}/S^1\to\bar{\mathscr{U}}_1=\mathscr{U}_1/S^1$$

transportant $\wedge_\varphi$ sur $\wedge_{\varphi_1}$, et respectant le feuilletage projeté $\bar{\mathscr{L}}_0$.

b) *L'application projetée $\bar{\phi}$* devra respecter la coordonnée u (le moment de l'action de S^1 n'a pas changé), le feuilletage $\bar{\mathscr{L}}_0$ et la feuille $\bar{L}_0$. En coordonnées (θ^2,u,w), on aura donc :

$$\bar{\phi}(\theta^2,u,w)=(\Theta^2(\theta^2,u,w),\ u,\ W(\theta^2,u,w))$$

avec $W(\theta^2,0,0)=0$.

Le fait que $\bar{\phi}$ respecte $\bar{\mathscr{L}}_0$ se traduit par l'équation :

$$\frac{\partial W}{\partial\theta^2}(\theta^2,u,w)+u\frac{\partial W}{\partial w}(\theta^2,u,w)=u\frac{\partial\Theta^2}{\partial\theta^2}(\theta^2,u,w)+u^2\frac{\partial\Theta^2}{\partial w}(\theta^2,u,w)\tag{1}$$

Si l'on développe W et Θ^2 suivant les puissances de u au voisinage de $u=0$, soit

$$\begin{cases}W=W_0(\theta^2,w)+uW_1(\theta^2,u,w)\\ \Theta^2=\Theta_0^2(\theta^2,w)+u\Theta_1^2(\theta^2,u,w),\ \text{où } \Theta_0^2 \text{ est défini modulo } \boldsymbol{Z},\end{cases}\tag{2}$$

il vient, en faisant $u=0$, $\dfrac{\partial W_0}{\partial\theta^2}=0$, c. à. d. $W_0=W_0(w)$. Ceci étant, on réécrit (1) :

$$u\frac{\partial W_1}{\partial\theta^2}+uW_0'+u^2\frac{\partial W_1}{\partial w}=u\frac{\partial\Theta_0^2}{\partial\theta^2}+u^2\frac{\partial\Theta_1^2}{\partial\theta^2}+u^2\frac{\partial\Theta_0^2}{\partial w}+u^3\frac{\partial\Theta_1^2}{\partial w}$$

On divise par u, et en faisant $u=0$ il vient :

(3) $$\frac{\partial\left(\Theta_0^2-W_1\right)}{\partial\theta^2}(\theta^2, 0, w)=W_0'(w)$$

Mais, quand θ^2 augmente de 1 (avec w fixé), $\Theta_0^2-W_1$ augmente de ± 1, d'où $W_0'(w)=\pm 1$ et par suite $W_0(w)=\pm w$. On a donc :

(4) $$\bar{\phi}(\theta^2, 0, w)=\left(\Theta_0^2(\theta^2, w), 0, \pm w\right)$$

Ecrivons maintenant que $\bar{\phi}$ induit sur la surface $u=0$ une transformation respectant les formes symplectiques définies par $\wedge_\varphi$ et $\wedge_{\varphi_1}$, soit :

(5) $$\pm d\Theta_0^2\wedge\varphi_1(w)dw=d\theta^2\wedge\varphi(w)dw$$

d'où la relation :

(6) $$\pm\frac{\partial\Theta_0^2}{\partial\theta^2}(\theta^2, w)\varphi_1(w)=\varphi(w)$$

Ceci signifie que Θ_0^2 est affine en θ^2 ; comme $\left|\Theta_0^2(\theta^2+1, w)-\Theta_0^2(\theta^2, w)\right|=1$ et $\varphi_1(0)=\varphi(0)=1$, il en résulte $\frac{\partial\Theta_0^2}{\partial\theta^2}=\pm 1$, d'où :

(7) $$\varphi_1(w)=\varphi(w)$$

ce qui est bien le résultat annoncé.

REMARQUE : La relation (4) provient du fait que $\bar{\phi}$ respecte l'holonomie du feuilletage $\mathscr{L}_0'$. La relation (5) provient du fait que $\bar{\phi}$ doit respecter la coordonnée " action " sur le feuilletage Lagrangien réduit, c. à. d. le feuilletage $\bar{\mathscr{L}}_0$ restreint à la surface $u=0$.

Bibliographie

[Ar] V. ARNOLD, " Méthodes mathématiques de la mécanique " Editions Mir, Moscou (1974).

[Cur] C. CURRAS-BOSCH, " Sur la linéarisation de l'holonomie pour les feuilletages Lagrangiens " Preprint (1993).

[Da] P. DAZORD, " Sur la géométrie des sous-fibrés et des feuilletages Lagrangiens " Ann. Sc. Ec. Norm. Sup, (4) 13 (1981), pp. 465-480.

[Ha] A. HAEFLIGER, " Variétés feuilletées " Ann. Sc. Norm. Sup, Pisa, 16 (1962), pp. 367-397.

[Ku] N. KUIPER, " Sur les surfaces localement affines " Colloque de Géométrie Différentielle, Strasbourg (1953).

[Mo] P. MOLINO, " Exposés au Séminaire Sud-Rhodanien " Avignon, (Mars 1990).

[Na-Ya] T. NAGANO-K. YAGI, " The affine structures on the real two-torus (I)" Osaka Jour. of Math., 11 (1974), pp. 181-210.

[Ree] G. REEB, " Sur certaines propriétés topologiques des variétés feuilletées " Hermann, Paris (1952).

[Wei] A. WEINSTEIN, " Symplectic manifolds and their Lagrangian submanifolds " Advances in Math. 6 (1971), pp. 329-346.

Départament d'Algebra i Geometria
Facultat de Matematiques,
Universitat de Barcelona
Gran Via 585
08007 BARCELONA, España

GETODIM-CNRS, UA 1407, GDR 144
Département de Mathématiques
Université Montpellier II
Place E. Bataillon,
34095 Montpellier Cedex 5, FRANCE