

INDICE DE VÉRITÉ, FONCTIONS IMPLICATIONNELLES ACCESSIBLES, RECENSEMENT DES THÈSES

ALBERT SADE

*It is with regret that the Editor learned of the death
 of Professor Albert Sade on 10 February 1973.
 This paper was under composition at the time.*

I. GÉNÉRALITÉS.

1 Définition. Il sera uniquement question de formules implicationnelles dans la logique bivalente, ces formules ne se réduisant pas nécessairement à des thèses. Le seul connectif sera l'implication

$$(1) \quad f = (x \Rightarrow y) = Cxy = x(y + 1) + 1,$$

sur le corps $\{0, 1\}$. ([28], p. 21; [29], p. 82; [30], p. 325). On écrira xy pour $x \Rightarrow y$ et $xy.z$ pour $(x \Rightarrow y) \Rightarrow z$. L'ensemble des atomes de f sera noté (f) .

2 Indice de vérité. Soit μ un ensemble d'atomes. Si c est le cardinal de μ , 2^c sera le cardinal de l'ensemble des systèmes de valeurs de ces atomes, ou *points*. Soit a le cardinal de l'ensemble des points pour lesquels $f = 1$; alors $a/2^c = IVf$ est l'indice de vérité de f .

3 Sous-implication. Toute formule, f , est un atome ou une implication

$$f = a \Rightarrow b$$

entre deux autres formules, $a =$ protasis et $b =$ apodosis; a et b , à leur tour, se décomposent en deux parties. Toutes ces formules partielles, non réduites à un atome, sont des *sous-implications* de f . Elles sont *incluses* dans f , $a \subset f$. Elles forment un arbre. Toute fonction, f , est sous-implication *impropre* d'elle-même.

4 Ordre d'une formule. L'ordre de f est le nombre des symboles $\Rightarrow$ (ou C) dans f . On voit sans peine que *l'ordre de f est égal au nombre de ses sous-implications (propres ou non) et au nombre de ses atomes (distincts ou non), diminué d'une unité.*

5 Formules identiques. Deux formules, f et g , sont identiques ($f \equiv g$) si chacune est la transcription littérale de l'autre.

6 Formules isomorphes. f et g sont isomorphes ($f \cong g$) s'il existe une application 1-1 de (f) sur (g) , $\pi = (f) \rightarrow (g)$ telle que

$$g = f\pi.$$

7 Sous-implications disjointes. Deux sous-implications d'une même formule sont disjointes si aucune des deux n'est incluse dans l'autre

$$f \cap g = \emptyset \Rightarrow g \not\subset f \not\subset g.$$

Quand la même sous-implication apparaît à deux places différentes dans la même formule, le terme "sous-implication disjointe" n'a de sens que si l'on précise de laquelle des deux il s'agit.

8 Sous-implication isolée. Une sous-implication, $g \subset f$, est isolée dans f si les atomes de g ne figurent nulle autre part dans f , sauf dans les sous-implications identiques à g , s'il en existe.

9 Formules équivalentes. Deux formules, f et g , sur le même ensemble d'atomes, $(f) = (g)$, sont équivalentes, ce qui se note $f \sim g$, si f prend la même valeur que g en tout point.

10 Formules semblables. f et g sont semblables si l'on passe de l'une à l'autre par substitution à une ou plusieurs sous-implications propres de sous-implications équivalentes.

II. QUELQUES PROPRIÉTÉS DES FONCTIONS.

11 Contradiction. On voit par descente infinie qu'il n'existe aucune formule identiquement fausse.

12 Réduction. Si, dans une thèse f , on remplace une sous-implication isolée, g , non tautologique, et toutes celles qui lui sont identiques s'il en existe, par un simple atome, la nouvelle formule est encore une thèse. Exemple, $\models z(yx.z)$ devient $\models z.yz$. La proposition résulte du fait que g n'est identique ni à 1 (hypothèse) ni à 0, (11).

13 Indices comparés d'une formule et de son conséquent. L'indice de vérité d'une formule est au moins égal à celui de son conséquent. Car, si $f = Cab$, ($b = 1$) $\Rightarrow$ ($f = 1$). Il en résulte que toute formule a son indice de vérité dans l'intervalle $[1/2, 1]$ et qu'elle se réduit à une thèse en même temps que son apodosis.

14 Formules dont les deux membres n'ont aucun atome commun. Si l'intersection $(a) \cap (b)$ est vide et si les formules a et b ont respectivement i et j pour indices de vérité, alors

$$(2) \quad IV(ab) = 1 - i + ij.$$

Preuve. Soit $\text{Card}(a) = p$ et $\text{Card}(b) = q$. Si, parmi les 2^p points, on a $a = 1$, u fois, alors on aura $a = 0$, $2^p - u$ fois. De même, parmi les 2^q points, si $b = 1$, v fois, alors $b = 0$, $2^q - v$ fois. Pour que $ab = 0$ il faut et il suffit que $a = 1$ et $b = 0$. On a $a = 1$ pour $u2^q$ points parmi les 2^{p+q} points possibles. Parmi ces $u2^q$ points, il y en a $u(2^q - v)$ qui font acquérir à b la valeur 0.

Donc $f = ab$ est fausse en $u(2^q - v)$ points. L'indice de f est donc

$$(2) \quad \begin{aligned} \text{IV}f &= 1 - u(2^q - v)/2^{b+q} = 1 - 2^b i(2^q - 2^q j)/2^{b+q}. \\ \text{IV}f &= 1 - i(1 - j). \end{aligned}$$

15 Formules sur un seul atome. *Toute formule sur un seul atome, x , est tautologique, ou est équivalente à x .* Cela est vrai pour les formules d'ordre 0, 1, 2 et la propriété se généralise par induction. On peut construire toutes les thèses sur un seul atome par récurrence de la façon suivante. D'après la définition de l'implication, pour que $ab \sim x$, il faut et il suffit que $a \sim 1$, $b \sim x$. Soit f_h une tautologie quelconque d'ordre $h - 1$ sur le seul atome x et g_k une formule d'ordre $k - 1$ et d'indice $1/2$ sur x . On aura

$$f_h g_k = g_{h+k}.$$

En faisant parcourir à h toutes les valeurs 0, 1, 2, ..., m et en prenant $k = m - h$, on obtiendra toutes les g_m .

Catalan, [4], a calculé le nombre, $t(m)$, des manières de former un produit avec une suite donnée de $m + 1$ lettres,

$$(3) \quad t(m) = (\overline{2m!}) / (m! \overline{m+1!}).$$

Le complément de $\{g_m\}$ dans l'ensemble des formules d'ordre m sera l'ensemble $\{f_m\}$ des thèses d'ordre m .

Table des formules d'ordre m , sur x .

m	$g_m \sim x$	$\models f_m$
0	x	---
1	---	xx
2	$xx.x$	$x.xx$
3	$(x.xx)x$	$(xx.x)x; xx.xx; x(x.xx); x(xx.x).$

D'après le mode de construction précédent, on a

$$(4) \quad g(m) = \text{Card}\{g_m\} = \sum f(h)g(k), \quad h + k = m - 1,$$

$$(5) \quad f(m) + g(m) = t(m),$$

ce qui permet de calculer les valeurs de f et de g . En posant

$$(6) \quad g'(m+1) = \sum g(v)g(m-v), \quad (v = 0, 1, \dots, m),$$

$$(7) \quad f'(m+1) = \sum f(v)f(m-v), \quad (v = 0, 1, \dots, m),$$

on obtient facilement

$$(8) \quad f(m) = g(m) + g'(m) + f'(m).$$

On a

$$(9) \quad s(m+1) = \sum g(u)t(m-u), \quad (u = 0, 1, \dots, m)$$

en posant

$$(10) \quad s(m) = g(m) + g'(m)$$

Enfin t peut se calculer par

$$(11) \quad t(m+1) = t(m)(4m+2)/(m+2).$$

On trouve pour les premières valeurs du quotient f/t , à partir de $m = 9$:

$$f(m)/t(m) = 1,395; 1,406; 1,397; 1,403; 1,396; \dots$$

La question: *trouver la limite de f/t quand m augmente indéfiniment* reste ouverte.

16 Table des valeurs de $g(m)$, $f(m)$, ...

k	$g(k)$	$f(k)$	t	$g'(k)$	$f'(k)$	$s(k)$
0	1	0	1	---	---	---
1	0	1	1	1	0	1
2	1	1	2	0	0	1
3	1	4	5	2	1	3
4	5	9	14	2	2	7
5	11	31	42	11	9	22
6	41	91	132	24	26	65
7	120	309	429	93	96	213
8	421	1009	1430	272	316	693
9	1381	3481	4862	971	1129	2352
10	4840	11956	16796	3194	3922	8034
11	16721	42065	58786	11293	14051	28014
12	59357	148655	208012	39148	50150	98505
13	210861	532039	742900	139687	181491	350548
14	759071	1915369	2674440	497756	658542	1256827
15	2744393	6950452	9694845	1798002	2408057	4542395
16	10000437	25357233	35357670	6517194	8839602	16517631

17 Dénombrement des formules d'ordre k , faisant intervenir n atomes distincts. Toute formule est définie, (i) par la répartition des opérateurs C dans celle-ci, (ij) par le sous-ensemble de μ qu'elle utilise. Le nombre des manières de distribuer l'opérateur C est $t(k)$, $[(3), N^{\circ}15]$. (ij) Le nombre de choix du sous-ensemble $(f) \subset \mu$, avec $\text{Card}(f) = n$, dépend de la réponse à la question:

Etant donnés n éléments distincts, quel est le nombre $X(n, m)$ des suites ordonnées de m termes ($m \geq n$), contenant chacune ces n éléments, sans omission?

On trouve

$$(12) \quad X(n, m) = \sum (-1)^u \binom{n}{u} (n-u)^m, \quad (u = 0, 1, \dots, n).$$

Comme il y a $n!$ formules isomorphes, le nombre $Y(n, m)$ des formules distinctes, f , d'ordre k , non isomorphes, d'une structure connective donnée, avec $\text{Card}(f) = n$, est

$$(13) \quad Y(n, m) = (1/n!) \sum (-1)^u \binom{n}{u} (n-u)^m, \quad (m = k+1, u = 0, \dots, n).$$

Le nombre total des formules distinctes, non isomorphes, d'ordre $k = m - 1$, et d'une structure connective donnée est

$$(14) \quad s(m) = \sum Y(n, m), (n = 1, \dots, m),$$

où les Y peuvent être calculés par la loi de récurrence

$$(15) \quad Y(n, m + 1) = Y(n - 1, m) + nY(n, m).$$

Le nombre total des formules distinctes, non isomorphes, d'ordre $k = m - 1$, est $t(k)s(m)$.

18 Table de $Y(n, m)$.

$n \backslash m$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
2		1	3	7	15	31	63	127	255	511	1023
3			1	6	25	90	301	966	3025	9330	28501
4				1	10	65	350	1701	7770	34105	145750
5					1	15	140	1050	6951	42525	246730
6						1	21	266	2646	22827	179487
7							1	28	462	5880	63987
8								1	36	750	11880
9									1	45	1155
10										1	55
11											1
$s(m) =$	1	2	5	15	52	203	877	4140	21147	115975	678570

19 Propriété. (i) Toute formule a un IV plus grand que $1/2$, ou est équivalente à un atome.

(ii) Toute formule dans laquelle aucun atome ne figure plus d'une fois a un indice inférieur à 1. Dans toute thèse il y a au moins un atome qui apparaît plus d'une fois.

La proposition est vraie pour les premiers ordres et se généralise aisément par induction.

20 Atomes inégaux. La condition nécessaire et suffisante pour qu'une formule d'ordre $k - 1$ ait tous ses atomes distincts est que son indice de vérité soit une fraction irréductible de dénominateur 2^k .

Preuve. Soit $c = \text{Card}(f)$ le nombre des atomes distincts de la formule f , ($k \geq c$). Le nombre des points sur (f) est 2^c . Soit n le nombre de ceux qui rendent f vraie; alors

$$\text{IV}f = n/2^c.$$

(i) Si $k > c$, c'est-à-dire si f contient certains atomes plus d'une fois, l'indice de f n'est donc pas une fraction irréductible de dénominateur 2^k .

(ii) Si $k = c$, alors $\text{IV}f = n/2^k$ et on va prouver que n est impair. Soit

donc $f = ab$ une formule d'ordre $k - 1$ dont tous les atomes sont distincts ($k = c$). L'affirmation est exacte pour $k = 1, 2$, car

$$IVx = 1/2 \text{ et } IVxy = 3/4.$$

La supposant vraie pour tous les ordres inférieurs à $k - 1$, on aura, par application à a et b , dont l'ordre est plus petit que $k - 1$,

$$IVa = i = m/2^h; IVb = j = p/2^{k-h}; (m, p \text{ impairs}).$$

D'après (2), N°14, comme $(a) \cap (b) = \emptyset$, on a

$$IVf = 1 - i(1 - j) = 1 - m(2^{k-h} - p)/2^k,$$

avec $1/2 \leq i < 1$ et $1/2 \leq j < 1$, (N°19).

L'entier h ne peut être égal à k , car alors on aurait

$$IVb = p/1 = p;$$

or il n'existe aucun entier dans l'intervalle $[1/2, 1]$. Donc 2^{k-h} est un entier pair et $m(2^{k-h} - p)$ est un entier impair. Par suite, IVf est une fraction irréductible de dénominateur 2^k . La réciproque découle du théorème direct.

21 Formules d'indice maximum et minimum. Mises à part les thèses, dont l'indice est 1, et les formules équivalentes à un atome, parmi toutes les formules d'ordre $k - 1$, et aux isomorphismes près,

(i) *il existe une formule et une seule, f_k , dont l'indice de vérité est $1 - (1/2^k)$. On a*

$$(16) \quad f_k = (x \Rightarrow f_{k-1}), x \notin (f_{k-1}).$$

(ii) *à partir de $k = 2$, il existe une et une seule g_k , dont l'indice de vérité est $1/2 + 1/2^k$; on a*

$$(17) \quad g_k = (f_{k-1} \Rightarrow x), (x \notin (f_{k-1})).$$

La propriété se démontre par induction à l'aide des résultats des N°13, 14 (2), 19 (ii) et 20. La suite illimitée des f_k est

$$x; Cxy; CxCyz; \dots; CxCyCz \dots Cuv, (\text{Card } \{x, \dots, v\} = k).$$

Celle des g_k est

$$Cxy; CCxyz; \dots; CCxCyCz \dots Cuvw, (\text{Card } \{x, \dots, w\} = k).$$

III. FONCTIONS ACCESSIBLES.

22 Matrices; définitions. Toute fonction sur l'ensemble μ d'atomes peut être représentée, soit par sa matrice ([30], N°2, p. 231), soit par le polynôme correspondant ([30], N°7, p. 236; [26], N°3, p. 206; [27], N°1, p. 123; [28], N°2, p. 20; [29], p. 81). Connaissant la formule qui définit une fonction, on construit sa matrice comme une table de vérité et on en déduit le polynôme représentatif. L'inverse n'est pas toujours possible.

I. Une fonction est dite accessible si elle peut être définie au moyen d'une formule implicationnelle.

II. On dit que la fonction a couvre la fonction b si a est vraie toutes les fois que b est vraie. On note

$$(18) \quad a \varepsilon b; [(b = 1) \Rightarrow (a = 1)] \leftrightarrow a \varepsilon b.$$

23 Lemme. Sur tout ensemble, μ , d'atomes, il existe une fonction accessible, qui est égale à 1 en tous points, excepté en un seul, pouvant être arbitrairement choisi, pourvu que toutes ses coordonnées ne soient pas égales à 1.

Preuve. (i) La proposition est vraie sur $\mu = \{x\}$ et sur $\mu = \{x, y\}$.

(ii) La supposant vérifiée sur tout sous-ensemble propre de μ , soit, (sur l'ensemble μ), le point P pour lequel la fonction f est égale à zéro; soit x l'une des coordonnées de P , si elle existe, qui n'est pas nulle. Sur l'ensemble complément, $\mu = \mu/x$, on peut construire, par hypothèse, une formule f' qui est égale à 1 en tout point, sauf au point P' , projection de P sur μ' , qui a les mêmes coordonnées que P , mais avec x en moins.

Alors, pour tous les points de μ qui rendent f' vraie, on a

$$x \Rightarrow f' = x \Rightarrow 1 = 1,$$

puisque f' est toujours vraie, sauf en P' . En ce point,

$$\text{si } x = 0, \text{ on a } x \Rightarrow f' = 0 \Rightarrow 0 = 1,$$

$$\text{si } x = 1, \text{ on a } x \Rightarrow f' = 1 \Rightarrow 0 = 0.$$

C'est donc au point $P(x = 1, f' = 0)$ et en ce point seul, que la fonction $x \Rightarrow f'$ est nulle. La fonction f est donc accessible et représentée par la formule

$$(19) \quad x \Rightarrow f'.$$

(iii) Si maintenant f est égale à 1, sauf au seul point Q dont toutes les coordonnées sont nulles, soit x une variable quelconque. Par hypothèse, il existe sur $\mu' = \mu/x$ une fonction f' , qui est nulle si toutes ses coordonnées sont nulles et qui prend la valeur 1 en tout autre point.

Si $x = 1$, la formule $(f' \Rightarrow x) \Rightarrow x$ prend la valeur 1 quelles que soient les valeurs des autres coordonnées. Si $x = 0$, et $f' = 1$, cette formule prend la valeur 1, encore,

$$(1 \Rightarrow 0) \Rightarrow 0 = 0 \Rightarrow 0 = 1.$$

Elle acquiert la valeur 0 une seule fois, à savoir pour $f' = 0, x = 0$

$$(0 \Rightarrow 0) \Rightarrow 0 = 1 \Rightarrow 0 = 0,$$

c'est-à-dire au seul point P . Donc la fonction f est accessible et représentée par la formule

$$(20) \quad f = (f' \Rightarrow x) \Rightarrow x.$$

Note. On peut aussi représenter f par la formule

$$(21) \quad f = (x \Rightarrow y) \Rightarrow f',$$

où $x \neq y$, x et f' ayant la même signification que dans (20).

24 Théorème fondamental. (i) *Toute fonction accessible, f , est équivalente à une implication $a \Rightarrow b$ dont le conséquent, b , est couvert par f .*

(ii) *La condition nécessaire et suffisante pour qu'une fonction soit accessible est qu'elle couvre au moins un atome.*

(iii) *Soit $\mathfrak{M}$ une matrice couvrant l'atome z ; soit P_0 l'ensemble des points nuls de $\mathfrak{M}$, et H l'ensemble des points 1 de $\mathfrak{M}$ pour lesquels $z = 0$. Soient $a_1, a_2, \dots, a_j$ les formules construites comme dans le lemme et qui ont respectivement pour point nul unique chacun des éléments de H . Alors, la formule*

$$(22) \quad f = Ca_j C, \dots, Ca_2 Ca_1 z,$$

où l'ordre de succession des a est indifférent, a précisément pour matrice la matrice $\mathfrak{M}$.

(iv) *Soient $b_1, b_2, \dots, b_i$ les formules définies dans le lemme et qui ont respectivement pour point nul unique chacun des éléments de P_0 ; alors, la formule*

$$(23) \quad f = CCC \dots (2i - 2 \text{ fois}) \dots Cb_1 Cb_2 z z Cb_3 z z C \dots Cb_i z z,$$

où l'ordre de rangement des b est indifférent, a $\mathfrak{M}$ pour matrice.

Preuve. (i) Si $f = a \Rightarrow b$, on voit, (18), que

$$[(b = 1) \Rightarrow (f = 1)] \leftrightarrow (f \varepsilon b).$$

(ii) On reconnaît par descente infinie que la condition (ij) est nécessaire. On voit en (iii) et (iv) qu'elle est suffisante.

(iii) Par hypothèse, $f \varepsilon z$. Si $z = 1$, alors $f = 1$, comme $\mathfrak{M}$. Si $z = 0$ et si tous les a sont égaux à 1, (ce qui arrive en chacun des points de P_0 et seulement en ces points, d'après la définition de H), on a $f = C1C1 \dots C1C0 = 0$, comme $\mathfrak{M}$.

Enfin, si $z = 0$ et si l'un quelconque des a est nul (ce qui caractérise les points de H), on a

$$\forall m, C0m = 1, \forall a, Ca1 = 1, \text{ d'où } f = 1, \text{ comme } \mathfrak{M}.$$

Ainsi, f prend la même valeur que $\mathfrak{M}$ en tous points.

(iv) Si $z = 1$, $f = 1$; or $\mathfrak{M} = 1$ puisque $\mathfrak{M} \varepsilon z$, donc $f = \mathfrak{M}$. Si $z = 0$ et si tous les b sont égaux à 1, le point considéré n'appartient pas à P_0 , et donc $\mathfrak{M} = 1$. D'autre part

$$\begin{aligned} f_1 &= b_1 = 1, \\ f_2 &= (b_1, b_2 z)z = (1.10)0 = 10.0 = 1 \\ &\dots \dots \dots \\ f_i &= (f_{i-1}, b_i z)z = (1.10)0 = 1 \end{aligned}$$

donc $f = 1$, comme $\mathfrak{M}$.

Enfin, si $z = 0$ et si le point considéré appartient à P_0 , c'est-à-dire si

l'un des b est nul, la fonction f ne dépendant visiblement pas de l'ordre des b , on peut supposer $b_i = 0$, $b_h = 1$, $h \neq i$; alors $f_{i-1} = 1$ et $f_i = (1.00)0 = 10 = 0$, et comme d'autre part le point considéré est l'un des points nuls ($\in P_0$) de $\mathfrak{M}$, on a

$$f = 0, \mathfrak{M} = 0.$$

Ainsi f prend toujours la même valeur que $\mathfrak{M}$ et $f \sim \mathfrak{M}$; la condition (ii) est suffisante.

25 Dénombrement des formules accessibles. Le nombre des fonctions accessibles qui couvrent un atome donne sur μ ($\text{Card } \mu = c$) est $2 \exp 2^{c-1}$. Par inclusion et exclusion, on trouve que l'ensemble, $\mathcal{L}$, de toutes les fonctions accessibles sur μ a pour cardinal.

$$(24) \quad \text{Card } \mathcal{L} = \sum (-1)^{u+1} \binom{c}{u} 2 \exp 2^{c-u}, \quad (u = 1, 2, \dots, c).$$

Pour $c = 2, 3, 4$, on trouve

$$(25) \quad \text{Card } \mathcal{L} = 6, 38, 942.$$

Les autres fonctions sont inaccessibles. Mais on ne pourra échapper, en étudiant les propriétés des fonctions strictement implicationnelles, à l'apparition des autres, comme la copule Kxy , définie par

$$(26) \quad CKxyz = CxCyz,$$

et la négation, Nx , imparfaitement définie par

$$(27) \quad CxNy = NKxy.$$

Il est clair que $\mathcal{L}$ est un système fermé.

26 Table $\mathcal{L}$ des 38 fonctions sur $\{x, y, z\}$. Les 38 éléments, f_i , de $\mathcal{L}$ sont classés par ordre de grandeur croissante de leur matrice $\mathfrak{M}_i$, regardée comme un nombre dyadique. Dans la deuxième partie, les formules sont rangées par ordre alphabétique. Deux f_i peuvent être isomorphes, ($f_1 \cong f_4$), mais ne sont jamais équivalentes. Il aurait fallu trop de place pour présenter la table de cayley du groupoïde $\mathcal{L}$.

ENSEMBLE, $\mathcal{L}$, des 38 FONCTIONS sur $\mu = \{x, y, z\}$

i	f_i		$\mathfrak{M}_i$	$\text{IV}f_i$
0	z	<i>zero</i>	0000 1111	1/2
1	$(x.yz)z$	<i>CCxCyzz</i>	0001 1111	5/8
2	$yx.z$	<i>CCyxz</i>	0010 1111	5/8
3	y	<i>y</i>	0011 0011	1/2
4	$(x.zy)y$	<i>CCxCzyy</i>	0011 0111	5/8
5	$zx.y$	<i>CCzxy</i>	0011 1011	5/8
6	$yz.z$	<i>CCyzz</i>	0011 1111	3/4
7	$xy.z$	<i>CCxyz</i>	0100 1111	5/8
8	x	<i>x</i>	0101 0101	1/2
9	$(y.zx)x$	<i>CCyCzxx</i>	0101 0111	5/8

10	$zy.x$	$CCzyx$	0101 1101	5/8
11	$xz.z$	$CCxzz$	0101 1111	3/4
12	$xy(yx.z)$	$CCxyCCyxz$	0110 1111	3/4
13	$xz.y$	$CCxzy$	0111 0011	5/8
14	$yz.x$	$CCyzx$	0111 0101	5/8
15	$xy.y$	$CCxyy$	0111 0111	3/4
16	$xz(zx.y)$	$CCxzCCzxy$	0111 1011	3/4
17	$yz(zy.x)$	$CCyzCCzyx$	0111 1101	3/4
18	$xz(yz.z)$	$CCxzCCyzz$	0111 1111	7/8
19	$(xz.y)z$	$CCCxzyz$	1000 1111	5/8
20	$[xy(yx.z)]z$	$CCCxyCCyxzz$	1001 1111	3/4
21	xz	Cxz	1010 1111	3/4
22	$(xz.z)y$	$CCCxzzzy$	1011 0011	5/8
23	$[xz(zx.y)]y$	$CCCxzCCzxyy$	1011 0111	3/4
24	xy	Cxy	1011 1011	3/4
25	$yz.xz$	$CCyzCxz$	1011 1111	7/8
26	yz	Cyz	1100 1111	3/4
27	$(yz.z)x$	$CCyzzx$	1101 0101	5/8
28	$[yz(zy.x)]x$	$CCyzzCCzyxx$	1101 0111	3/4
29	yx	Cyx	1101 1101	3/4
30	$xz.yz$	$CCxzCyz$	1101 1111	7/8
31	$x.yz$	$CxCyz$	1110 1111	7/8
32	zy	Czy	1111 0011	3/4
33	zx	Czx	1111 0101	3/4
34	$xy.zy$	$CCxyCzy$	1111 0111	7/8
35	$x.zy$	$CxCzy$	1111 1011	7/8
36	$y.zx$	$CyCzx$	1111 1101	7/8
37	$thèse$	----	1111 1111	1

f_i	i	f_i	i	f_i	i
x	8	$xz.yz$	30	$yz.x$	14
xy	24	$(xz.y)z$	19	$(y.zx)x$	9
$x.yx$	37	$xz(yz.z)$	18	$yz.xz$	25
$xy.y$	15	$xz.z$	11	$yz.z$	6
$xy(yx.z)$	12	$xz(zx.y)$	16	$(yz.z)x$	27
$[xy(yx.z)]z$	20	$[xz(zx.y)]y$	23	$yz(zy.x)$	17
$xy.z$	7	$(xz.z)y$	22	$[yz(zy.x)]x$	28
$x.yz$	31				
$xy.zy$	34				
$(x.yz)z$	1	y	3	z	0
xz	21	yx	29	zx	33
$xz.y$	13	$yx.z$	2	$zx.y$	5
$x.zy$	35	yz	26	zy	32
$(x.zy)y$	4	$y.zx$	36	$zy.x$	10

IV. FORMULES ÉQUIVALENTES. THÈSES.

27 Implications équivalentes à une fonction donnée de $\mathcal{L}$. Tables $\mathfrak{E}$. La relation d'équivalence, $ab \sim cd$, définit sur l'ensemble $\mathcal{L} \times \mathcal{L}$ une partition dont le groupoïde quotient est isomorphe à $\mathcal{L}$ lui-même. Les éléments d'un même bloc sont équivalents à l'élément de $\mathcal{L}$ qui les représente et fournissent toutes les implications $f_i f_j$ équivalentes à ce représentant.

Exemple. Le bloc $f28$,

17.8 $\sim$ 2.9 $\sim$ 5.9 $\sim$ 6.9 $\sim$ 12.9 $\sim$ 16.9 $\sim$ 17.9 $\sim$ 18.9 $\sim$ 17.27 $\sim$ 36.27 $\sim$
2.28 $\sim$ 5.28 $\sim$ 6.28 $\sim$ 12.28 $\sim$ 16.28 $\sim$ 17.28 $\sim$ 18.28 $\sim$ 21.28 $\sim$ 24.28 $\sim$
25.28 $\sim$ 31.28 $\sim$ 35.28 $\sim$ 36.28 $\sim$ 37.28,

où l'on écrit i pour f_i , contient toutes les implications $f_i \Rightarrow f_j$ équivalentes à $f28$. Il serait trop long de donner la table d'équivalence, $\mathfrak{E}$, pour chacun des 38 blocs.

28 Thèses. (i) L'ensemble des fonctions qui couvrent un élément, a , de $\mathcal{L}$ est $\mathcal{L}a$.

(ii) Toute thèse, sur μ , est une implication ab , dont l'antécédent, a , est une fonction quelconque dans $\mathcal{L}$ et l'apodosis, b , l'une quelconque des fonctions qui couvrent a .

$$\models ab \leftrightarrow b \varepsilon a \leftrightarrow b \in \mathcal{L}a.$$

(iii) Le nombre des thèses ab , où a est donné, est $\text{Card } \mathcal{L}a = \text{Card } \mathcal{B}a_0$, où a_0 est l'ensemble des points nuls de a . L'ensemble de toutes les thèses sur μ , aux isomorphismes près, a pour cardinal $\sum \text{Card } \mathcal{B}a_0$, où a décrit $\mathcal{L}$.

Preuve. (i) $\forall b \in \mathcal{L}, ba \varepsilon a$ (N°24 i).

Réciproquement, l'identité

$$\forall a, c \in \mathcal{L}, c \varepsilon a \Rightarrow c = ca.a$$

montre que

$$\forall c \in \mathcal{L}, c \varepsilon a \Rightarrow \exists b, ba = c.$$

(ii) $\forall g \in \mathcal{L} \models a.ga$.

(iii) Si a_0 est l'ensemble des points nuls de a ,

$$m = \text{Card } a_0 = (1 - \text{IV } a) 2^c$$

et

$$\text{Card } \{b \mid b \varepsilon a\} = \text{Card } \mathcal{B}a_0 = 2^m.$$

Si $\mu = \{x, y, z\}$, on trouve $\sum 2^m = 219$. Si l'on extrait de là les 38 tautologies banales $f_i \Rightarrow f_i$ et, parmi les autres, les 37 implications $f_i \Rightarrow f37$, il reste 144 thèses, d'où il convient d'écarter les thèses isomorphes.

29 Table des tP_m . Les 31 thèses sont désignées par $t1, t2, \dots, t31$.

30 TABLE DES THÈSES sur $\mu = \{x, y, z\}$

t	$f_i \Rightarrow f_j$		$\models$
t1	z	$(x.yz)z$	$CzCCxCyzz$
t2	z	$yx.z$	$CzCCyxz$
t3	z	$yz.z$	$CzCCyzz$
t4	$(x.yz)z$	$yz.z$	$CCCxCyzzCCyzz$
t5	$yx.z$	$yz.z$	$CCCyxzCCyzz$
t6	$zero$	$xy(yx.z)$	$CzCCxyCCyxz$
t7	$yx.z$	$xy(yx.z)$	$CCCyxzCCxyCCyxz$
t8	z	$xz(yz.z)$	$CzCCxzCCyzz$
t9	$(x.yz)z$	$xz(yz.z)$	$CCCxCyzzCCxzCCyzz$
t10	$yx.z$	$xz(yz.z)$	$CCCyxzCCxzCCyzz$
t11	$yz.z$	$xz(yz.z)$	$CCCyzzCCxzCCyzz$
t12	$xy(yx.z)$	$xz(yz.z)$	$CCCxyCCyxzCCxzCCyzz$
t13	z	$(xz.y)z$	$CzCCCxzyz$
t14	z	$[xy(yx.z)]z$	$CzCCCxyCCyxzz$
t15	$(x.yz)z$	$[xy(yx.z)]z$	$CCCxCyzzCCCxyCCyxzz$
t16	$(xz.y)z$	$[xy(yx.z)]z$	$CCCCxzyzCCCxyCCyxzz$
t17	z	xz	$CzCxz$
t18	$yx.z$	xz	$CCCyxzCxz$
t19	$(xz.y)z$	xz	$CCCCxzyzCxz$
t20	z	$yz.xz$	$CzCCyzCxz$
t21	$(x.yz)z$	$yz.xz$	$CCCxCyzzCCyzCxz$
t22	$yx.z$	$yz.xz$	$CCCyxzCCyzCxz$
t23	$yz.z$	$yz.xz$	$CCCyzzCCyzCxz$
t24	$(xz.y)z$	$yz.xz$	$CCCCxzyzCCyzCxz$
t25	$[xy(yx.z)]z$	$yz.xz$	$CCCCxyCCyxzzCCyzCxz$
t26	xz	$yz.xz$	$CCxzCCyzCxz$
t27	z	$x.yz$	$CzCxCyz$
t28	$yx.z$	$x.yz$	$CCCyxzCxCyz$
t29	$xy(yx.z)$	$x.yz$	$CCCxyCCyxzCxCyz$
t30	$(xz.y)z$	$x.yz$	$CCCCxzyzCxCyz$
t31	xz	$x.yz$	$CCxzCxCyz$
t32	f_i	f_i	Cxx
t33	f_i	f_{37}	Cxt_i

31 Univers des thèses sur $\{x, y, z\}$. Les quatre tables, $\mathcal{L}$, N°26; $\mathcal{E}$, N°27; tP , N°29; t , N°30, permettent de construire toutes les thèses sur $\{x, y, z\}$ au moyen des règles suivantes:

(i) *thèses semblables*. De toute thèse, t , on en déduit une autre en remplaçant dans t n'importe quelle sous-formule de t , appartenant à $\mathcal{L}$, par une formule équivalente, (Table $\mathcal{E}$);

(ii) *thèses isomorphes*. De toute thèse on en déduit une autre par permutation arbitraire des atomes.

Ce processus peut être poursuivi à l'infini. Il permet de résoudre le

double problème (i) *étant donnée une thèse quelconque ab , trouver la t_i dont elle est déduite*, (ii) *donner explicitement les calculs qui conduisent de t_i à ab .*

Exemple. Sobociński [32], N°108, p. 28 =

$$CCrCCpqpCqCrp \sim t31.$$

$$t31 = CCxzCxCyz,$$

Table $\mathfrak{E}$, $z = f_0 = f32.f_0 = CCzyz$,

donc $xz = CxCCzyz$,

Table $\mathfrak{E}$, $CxCyz = f31 = f3.f21 = y.xz$,

donc $t31 = CCxCCzyzCyCxx$,

par l'isomorphisme $(x, y, z) \rightarrow (r, q, p)$

$$t31 = [32] 108.$$

32 Correspondance avec les tautologies apparaissant dans la littérature. Il semble qu'une partie seulement (18 sur 33) des éléments de la table t , N°30, figure dans les ouvrages cités dans la bibliographie.

Dans des écrits ultérieurs on se propose, en appliquant les méthodes de [24], d'étudier les propriétés du groupoïde $\mathcal{L}$: lois respectées par les éléments du groupoïde, automorphismes, endomorphismes, unités d'un côté, transitivité, quotients et inverses, sous-groupoïdes, idéaux, relation d'ordre de couverture, implications et normalité partielles, thèses considérées comme axiomes.

RECENSEMENT DES THÈSES SUR TROIS ATOMES DANS LA LITTÉRATURE.

Les nombres entre crochets renvoient à la bibliographie. Les chiffres après les crochets sont les N° des thèses dans l'ouvrage cité. L'auteur n'avait pas le moyen d'effectuer une prospection exhaustive; néanmoins, l'échantillon examiné a été assez large pour permettre de conclure que presque toutes les thèses rencontrées sont du type banal $f \Rightarrow f$, ou $f \Rightarrow t$, (t étant une tautologie). Les 15 thèses $t1, t2, t4, t6, t7, t9, t10, t13, t14, t15, t16, t21, t23, t25, t30$, qui ne sont pas représentées, sont peut-être nouvelles.

t3. [1] 9. [9] 2BCI. [10] 5. [16] 24. [17] 17; 20. [18] b10; c1; c9; d1.[19] p. 173, 5 N°3; p. 174, 13; p. 176, 8; p. 177, A13; p. 181, 9. [20] p. 211, en bas, 8. [37] 21. [38] 3; 8; 10. [39] 6.

t5. [1] 17, 20. [2] 44; 59. [16] 23. [17] 26; 29. [19] p. 171, 14; p. 175, 2 N°6; p. 177, A26. [32] 135. [33] T3; F56. [35] 30; 31.

t8. [18] III9.

t11. [33] T1.

t12. [21] 30.

t17. [1] 10. [2] 1. [3] 1. [5] 1, p. 29. [6] a. [7] 1F; 1R; 1H; 1L₂. [8] 1. [10] 1. [11] 1; 7. [12] 1. [13] 1. [14] 1. [16] 4; 27. [17] 18; 18₂. [18] 1. [19] p. 171, 2; 19; p. 174, 16; 17. [22] AC1. [32] 107. [34] 15. [35] 1. [36] 1. [37] 1). [38] 12. [39] 14.

- t18. [1] 11. [2] 52. [7] $2L_2$. [16] 8. [17] 19. [19] p. 171, 3. [21] 4. [32] 49. [33] F55. [34] 26. [36] 22.
- t19. [18] III 10. [19] p. 174, 4; p. 179, 3 N°7. [20] p. 204, 2. [38] 7.
- t20. [16] 9. [19] p. 171, 4; p. 175, 13 N°5; p. 179, 7 N°8. [34] 8.
- t22. [39] 8.
- t24. [18] 3.
- t26. [1] 1. [2] 12; 14; 15. [3] 10; 14. [6] c. [7] $1L_1$; 2R. [8] 1'. [9] 1BCI. [10] 4. [11] 2; 10. [12] 5. [13] 2. [16] 25; 29. [18] 2; a16; b2; d2; III 11; III 14. [19] p. 171, 16; 17; p. 174, 18; 19; p. 175, 18 N°5; p. 177, A20; 27; p. 179, 27 N°8; p. 180, 12. [20] p. 204, 1; p. 211, 9 en bas. [21] 18; 25; 27; 37. [31]. [32] 136. [33] P1; F24. [34] 9. [35] 2. [36] 8; 10. [37] 20. [38] 1. [39] 15.
- t27. [2] 67. [7] $2S_1$; $2S_2$. [19] p. 172, 11. [22] C1''. [33] F22. [34] 2. [35] 28. [36] 24.
- t28. [32] 47.
- t29. [21] 32.
- t31. [1] 25. [2] 11. [3] 5. [7] 3H. [8] a. [9] 2WPI. [10] 10. [12] 6. [13] 10. [14] 3. [17] 22. [18] a2; b6; c2. [19] p. 172, 7; p. 173, 3 N°4; p. 174, 2; 15; p. 178, 4; p. 183, 11. [20] p. 205, 10; 23; p. 211, 15. [21] 10; 19. [32] 12; 108; 134. [33] P7; F25. [34] 5; 10; 12. [35] 9. [36] 7. [37] 19.
- t32. [1] 13; 15; 18; 26; 30. [2] 2; 17; 19; 20; 22; 23; 42. [3] 2; 7; 8; 9; 11; 12; 13. [5] 2; 3 p. 29. [6] b). [7] 2F; 3R; 2H; $2L_2$. [8] 2; b. [9] 3BCI; 1; 3WPI. [10] 2; 6; 9; 11. [11] 3; 8; 9; 11; 15. [12] 2; 4; 7; 8. [14] 2; 8. [15] b. [16] 21; 22; 26; 28. [17] 16; 21; 24; 27; 30; 35. [18] 5; 7; a1; a13; a14; b1; b9; b12; b13; d5; III6; III8; III15; III17; III18; III19. [19] p. 171, 18; p. 172, 15; p. 173, $3N^{\circ}3$; $6N^{\circ}3$; $7N^{\circ}3$; $5N^{\circ}4$; p. 174, 1; 9; 14; p. 177, A14; 15; 17; 24; 25; B8; p. 178, 5; C; p. 179, $9N^{\circ}8$; 26; p. 181, 7. [20] p. 205, 6; 27; p. 211, 18; 7 en bas. [21] 7; 17; 21; 22; 23; 24; 29; 34; 42. [22] AC2; AC3. [23]. [32] 11; 28; 56; 57; 133. [33] P2; F39. [34] 4; 7; 11; 13; 14; 16. [35] 3; 7; 29. [36] 2. [37] 2; 6; 16; 24; 28. [38] 2; 9. [39] 2; 4; 5; 9; 16; 17; 18; 19. [13] 3; 8.
- t33. [1] 27. [2] 10; 13; 16; 18; 21; 66. [3] 4; 6; 15. [13] 7. [14] 7. [17] 18_1 ; 18_3 ; 18_4 . [18] a9; a10; a17; b14; b15. [19] p. 172, 6; p. 173, $4N^{\circ}4$; p. 174, 10; 11; 12. p. 175, $8N^{\circ}6$; $9N^{\circ}6$; p. 177, B14; C9. [21] 20; 28; 31; 33; 35; 36; 38; 39; 44. [32] 48; 50; 51; 52; 54; 98; 99. [33] T2. [36] 6; 9. [37] 10; 23. [39] 7; 10; 11; 12; 13.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] Arai, Yoshinari, "On axiom systems of propositional calculi. II," *Proceedings of the Japan Academy*, vol. 41 (1965), pp. 440-442..
- [2] Arai, Yoshinari, "On axiom systems of propositional calculi. III," *Proceedings of the Japan Academy*, vol. 41 (1965), pp. 570-574.
- [3] Arai, Yoshinari, and Kiyoshi Iséki, "On axiom systems of propositional calculi. VII," *Proceedings of the Japan Academy*, vol. 41 (1965), pp. 667-669.

- [4] Catalan, E., "Addition à la note sur une équation aux différences finies," *Journal de Mathématiques Pures et Appliquées*, vol. 4 (1839), pp. 95-99.
- [5] Hilbert, D., and W. Ackermann, *Grundzüge der theoretischen Logik*, Berlin (1959).
- [6] Hilbert, D., and P. Bernays, *Grundlagen der Mathematik*, Berlin (1934); also, J. Dopp, *Notions de Logique formelle*, Louvain (1965), p. 261.
- [7] Imai, Yasuyuki, and Kiyoshi Iséki, "On axiom systems of propositional calculi. I," *Proceedings of the Japan Academy*, vol. 41 (1965), pp. 436-439, esp. p. 437.
- [8] Iséki, Kiyoshi, "On axiom systems of propositional calculi. IV," *Proceedings of the Japan Academy*, vol. 41 (1965), pp. 575-577, esp. p. 575.
- [9] Iséki, Kiyoshi, "An algebra related with a propositional calculus," *Proceedings of the Japan Academy*, vol. 42 (1966), pp. 26-29, esp. p. 26.
- [10] Iséki, Kiyoshi, "A characterization of the NB-system," *Proceedings of the Japan Academy*, vol. 42 (1966), pp. 871-872.
- [11] Iséki, Kiyoshi, "On axiom systems of propositional calculi. XXIII," *Proceedings of the Japan Academy*, vol. 42 (1966), pp. 875-877, esp. p. 875.
- [12] Iséki, Kiyoshi, "On axiom systems of propositional calculi. XXIV," *Proceedings of the Japan Academy*, vol. 42 (1966), pp. 878-879.
- [13] Iséki, Kiyoshi, and Shôtarô Tanaka, "On axiom systems of propositional calculi. V," *Proceedings of the Japan Academy*, vol. 41 (1965), pp. 661-662, esp. p. 661.
- [14] Iséki, Kiyoshi, and Shôtarô Tanaka, "On axiom systems of propositional calculi. X," *Proceedings of the Japan Academy*, vol. 41 (1965), pp. 801-802.
- [15] Kanger, S. G., "A note on partial postulate-sets for propositional logic," *Theoria*, vol. 21 (1955), pp. 99-104; also, J. Dopp, *Notions de Logique formelle*, Louvain (1965), p. 265, b.
- [16] Łukasiewicz, J., "The shortest axiom of the implicational calculus of propositions," *Proceedings of the Royal Irish Academy. Section A*, vol. 52 (1948), pp. 25-33, esp. pp. 28-29.
- [17] Łukasiewicz, J., *Elements of Mathematical Logic*, Warszawa (1963).
- [18] Meredith, C. A., "Postulates for implicational calculi," *The Journal of Symbolic Logic*, vol. 31 (1966), pp. 7-9.
- [19] Meredith, C. A., and A. N. Prior, "Notes on the axiomatics of the propositional calculus," *Notre Dame Journal of Formal Logic*, vol. IV (1963), pp. 171-187.
- [20] Meredith, C. A., and A. N. Prior, "Investigations into implicational S5," *Zeitschrift für mathematische Logik und Grundlagen der Mathematik*, vol. 10 (1964), pp. 203-220.
- [21] Mihăilescu, Eugen, "Recherches sur les formes normales," *Annales scientifiques de l'Université de Jassy*, vol. 24 (1938), pp. 1-81, esp. pp. 4-5.
- [22] Moh, Shaw-Kwei, "Some axiom systems for propositional calculus," *Acta Mathematica Sinica*, vol. 5 (1955), pp. 117-135; also *Mathematical Reviews*, vol. 17 (1956), p. 225.

- [23] Russell, B., "The theory of implication," *American Journal of Mathematics*, vol. 28 (1906), pp. 159-202; also J. Dopp, *Notions de Logique formelle*, Louvain (1965), p. 267, 1^o, d.
- [24] Sade, A. J. V., "Autotopies des quasigroupes et des systèmes associatifs," *Archivum Mathematicum*, vol. 4 (1968), pp. 1-23.
- [25] Sade, A. J. V., "Sur le premier système de Łukasiewicz," *Archivum Mathematicum*, vol. 5 (1969), pp. 207-214; *Notices of the American Mathematical Society*, vol. 16 (1969), p. 978, 69T-E66.
- [26] Sade, A. J. V., "Fonctions propositionnelles monadiques dans la logique trivalente," *Annales de la Société scientifique de Bruxelles*, vol. 83 (1969), pp. 203-214.
- [27] Sade, A. J. V., "Algèbre de Łukasiewicz dans la logique trivalente," *Publikacije Elektrotehnički fakultet, Univerzitet u Beogradu* (1969), no. 265, pp. 123-130.
- [28] Sade, A. J. V., "Morphismes sur le groupoïde ternaire des opérateurs propositionnels," *Annales de la Société scientifique de Bruxelles*, vol. 83 (1969), pp. 19-33.
- [29] Sade, A. J. V., "Sur les axiomes de Götlind," *Notre Dame Journal of Formal Logic*, vol. XI (1970), pp. 81-88.
- [30] Sade, A. J. V., "Morphismes sur le système des opérateurs propositionnels," *Mathematische Nachrichten*, vol. 44 (1970), pp. 231-251.
- [31] Schütte, K. (1960); also J. Dopp, *Notions de Logique formelle*, Louvain (1965), p. 274, 1^o, a).
- [32] Sobociński, Bolesław, "Axiomatization of a partial system of three-value calculus of propositions," *The Journal of Computing Systems*, vol. 1 (1952), pp. 23-55.
- [33] Sobociński, Bolesław, "On the propositional system $\mathbf{A}$ of Vučković and its extension, I," *Notre Dame Journal of Formal Logic*, vol. 5 (1964), pp. 141-153.
- [34] Tanaka, Kashiko, "On axiom systems of propositional calculi. XI," *Proceedings of the Japan Academy*, vol. 41 (1965), pp. 898-900.
- [35] Tanaka, Shōtarō, "On axiom systems of propositional calculi. VIII," *Proceedings of the Japan Academy*, vol. 41 (1965), pp. 795-797.
- [36] Tanaka, Shōtarō, "On axiom systems of propositional calculi, IX," *Proceedings of the Japan Academy*, vol. 41 (1965), pp. 798-800.
- [37] Tanaka, Shōtarō, "On the propositional calculus with a variable functor, $C\delta pC\delta Np\delta q$," *Proceedings of the Japan Academy*, vol. 42 (1966), pp. 1161-1163.
- [38] Tanaka, Shōtarō, "On axiom systems of propositional calculi. XXV," *Proceedings of the Japan Academy*, vol. 43 (1967), pp. 192-193.
- [39] Tanaka, Shōtarō, "On the proposition $C\delta CpqC\delta p\delta q$ with a variable functor," *Proceedings of the Japan Academy*, vol. 45 (1969), pp. 95-96.

Pertuis, Vaucluse, France