

Une remarque sur le problème de Cauchy analytique

Par

Keiichiro KITAGAWA*

1. Introduction

Il s'agit du problème de Cauchy analytique au voisinage de l'origine de $\mathbb{C}^{d+1}$ pour un système d'équations différentielles linéaires aux dérivées partielles:

$$(PC) \quad \begin{cases} P(t, \partial_t, \partial_x)U(t, x) = F(t, x) \\ \text{avec des données initiales sur l'hyperplan } t=0. \end{cases}$$

Où $P(t, \partial_t, \partial_x)$ est une $N \times N$ -matrice d'opérateurs différentiels linéaires aux dérivées partielles à coefficients holomorphes d'une seule variable du "temps" t .

Au cas où les variables sont réelles, il est d'usage d'y associer un problème de Cauchy contenant un paramètre réel ξ :

$$(PC)_\xi \quad \begin{cases} P(t, \partial_t, i\xi)\hat{U}(t, \xi) = F(t) \\ \text{avec des données initiales à l'origine } t=0. \end{cases}$$

Où $P(t, \partial_t, i\xi)$ est une matrice d'opérateurs différentiels linéaires formée de $P(t, \partial_t, \partial_x)$ par un remplacement de ∂_x par $i\xi$. La transformation de Fourier y est un arbitre. Or au cas actuel où les variables sont complexes, celle-ci ne peut plus jouer son rôle, mais le problème $(PC)_\xi$ où ξ est un paramètre complexe, joue son plein rôle. Par exemple, pour montrer le théorème inverse de celui de Cauchy-Kowalevski au cas où les coefficients sont d'une seule variable t , professeur S. Mizohata [8] a en effet montré la propriété suivante: "*Pour que le (PC) pour une seule équation différentielle linéaire ait une et une seule solution holomorphe au voisinage de l'origine pour des données holomorphes, il faut que la solution du $(PC)_\xi$ correspondant ait une croissance d'ordre exponentiel en ξ quand ξ tends vers ∞* ". Une teste par des fonctions de la forme $f(t) \exp(\sum_{i=1}^d x_i \xi_i)$ est fondamentale à cette démonstration.

La solution du (PC) pour $F(t, x) = F(t) \exp(\sum_{i=1}^d x_i \xi_i)$ et des données de la forme $\phi \exp(\sum_{i=1}^d x_i \xi_i)$ ($\phi \in \mathbb{C}$) est de la forme: $U(t, x, \xi) = \hat{U}(t, \xi) \exp(\sum_{i=1}^d x_i \xi_i)$ où $\hat{U}(t, \xi)$

est la solution du $(PC)_\xi$. Ainsi une telle teste nous emmène du (PC) au $(PC)_\xi$. Et ce qui nous amène du $(PC)_\xi$ au (PC) , c'est l'opérateur différentiel linéaire d'ordre infini. On remarquera alors que c'est "la transformation de Fourier-Borel de l'opérateur de convolution" [5] [6] qui y joue un rôle d'un arbitre. C'est juste, mais nous préférons ici la voie plus élémentaire sans demander secours à la transformation de Fourier-Borel. Car, en présence du (PC) , elle est plus simple et adéquate.

Ainsi nous énoncerons, aux sections 3 et 4, trois sortes de correspondance entre le (PC) et le $(PC)_\xi$: Au théorème 1, nous énonçons, en terme du $(PC)_\xi$, une condition nécessaire et suffisante pour que le théorème de Cauchy-Kowalevski subsiste pour le (PC) . Tandis que ce théorème offre une version locale de cette correspondance, nous donnons une version sémi-globale au théorème 2 dans la catégorie de fonctions holomorphes. Nous en donnons une autre au théorème 3 dans la catégorie de fonctions entières.

Pour appliquer ces trois théorèmes, nous envisagerons, aux sections 5 et 6, le problème de Cauchy $(PC)_\xi$ et en estimerons la solution: A la sections 5, nous envisageons un système d'équations (non dégénéré) d'ordre 1 par rapport à ∂_t . Et nous donnons au théorème 4 l'estimation majorante et au théorème 5 celle minorante de solution du $(PC)_\xi$. Le théorème 6, étant un corollaire du théorème 5, donne, grâce au théorème 1, une généralisation d'un résultat du professeur S. Mizohata [8]. Comme application des théorèmes 2 et 3, nous énonçons le théorème 7. [7] Ceci donne un résultat à l'étude de la propagation de régularité étudiée par plusieurs auteurs. [2] [5] [9]. A la section 6, nous considérons une équations fuchsienne au sens de Baouendi-Goulaouic [1]. Nous donnons une estimation majorante de solution du $(PC)_\xi$ au théorème 8. Et par l'application des théorèmes 2 et 3, nous énonçons le théorème 9. Ceci donne aussi un résultat à l'étude de la propagation de régularité. L'estimation minorante de solution du $(PC)_\xi$ nous semble assez délicate et c'est ouverte.

Pour la simplicité de l'écriture, nous nous limitons au cas de dimension $d=1$. Le cas général de dimension d sera remarqué après chaque énoncé.

2. Notations et hypothèse

Soient $P(t, \partial_t, \partial_x)$ une $N \times N$ -matrice d'opérateurs différentiels linéaires aux dérivées partielles à coefficients holomorphes d'une seule variable t au voisinage de l'origine $\{t; |t| < \rho_0\}$, et $P(t, \partial_t, \xi)$ la matrice d'opérateurs différentiels linéaires obtenue par un remplacement formel de ∂_x par un paramètre complexe ξ . Soit A un sous-ensemble fini de $\{1, 2, \dots, N\} \times \{0, 1, 2, \dots\}$.

Nous considérons les problèmes de Cauchy:

$$(PC) \quad \begin{cases} P(t, \partial_t, \partial_x)U(t, x) = F(t, x) \\ \partial_t^k U_j(0, x) = \phi_{jk}(x); \quad (jk) \in A \end{cases}$$

et

$$(PC)_\xi \quad \begin{cases} P(t, \partial_t, \xi) \hat{U}(t, \xi) = F(t) \\ \partial_t^k \hat{U}(0, \xi) = \phi_{jk}; \quad (jk) \in \Lambda \end{cases}$$

pour les données $F(t, x)$, $F(t)$, $\phi_{jk}(x)$ toutes holomorphes au voisinage de l'origine et ϕ_{jk} nombres complexes.

Nous poserons l'hypothèse suivante:

[H] *L'unicité de solution holomorphe du (PC) est assurée.*

Remarque. Cette hypothèse est remplie au cas générique où l'unicité de solution formelle du (PC) est assurée.

Nous désignons par $H(\Omega)$ l'ensemble de fonctions holomorphes dans un domaine Ω et par B_r le cercle de rayon r et de centre à l'origine. Nous posons, pour un vecteur $U(t, x) = (U_1(t, x), \dots, U_N(t, x))$, $|U(t, x)| = \sum_{i=1}^N |U_i(t, x)|$ et $\|U\|_\Omega = \sum_{i=1}^N \sup_{(t,x) \in \Omega} |U_i(t, x)|$.

3. Résultat local

Nous montrons le théorème suivant.

Théorème 1. *Sous l'hypothèse [H] les énoncés suivants sont équivalents.*

[I] *Le (PC) est bien posé au sens de Cauchy-Kowalevski, c'est-à-dire qu'il existe une et une seule solution holomorphe à l'origine pour toutes les données holomorphes à l'origine.*

[II] *Le (PC) $_\xi$ est bien posé au sens suivant: Il existe, pour tous $\tilde{\rho} > 0$ et $\varepsilon > 0$ donnés, un $\rho > 0$ tel que, pour toutes $F(t) \in H^N(B_{\tilde{\rho}})$ et $\phi_{jk} \in C((jk) \in \Lambda)$, il existe une et une seule solution $\hat{U}(t, \xi) \in H^N(B_\rho \times C)$ du (PC) $_\xi$ et que, pour tout δ ($0 < \delta < \rho$) donné, il existe des nombres $\tilde{\delta}$ ($0 < \tilde{\delta} < \tilde{\rho}$) et $C > 0$ tels que l'on ait pour tout ξ ;*

$$\|\hat{U}(\cdot, \xi)\|_{B_\delta} \leq C[\|F\|_{B_{\tilde{\delta}}} + \sum_{(jk) \in \Lambda} |\phi_{jk}|] \exp(\varepsilon|\xi|).$$

Remarque. Au cas général de dimension d , il suffit de remplacer $\xi \in C$ par $(\xi_1, \dots, \xi_d) \in C^d$ et $|\xi|$ par $\sum_{i=1}^d |\xi_i|$.

Préparons quelques lemmes dont le premier est dû au professeur S. Mizohata [9].

Lemma 1 [S. Mizohata]. *Si le (PC) est bien posé au sens de Cauchy-Kowalevski, alors, pour tout $\tilde{\rho} > 0$ donné, il existe un $\rho > 0$ tel que, pour toute $F(t, x) \in H^N(B_{\tilde{\rho}}^2)$ et $\phi_{jk}(x) \in H(B_{\tilde{\rho}})$ ($(jk) \in \Lambda$), il existe une et une seule solution $U(t, x) \in H^N(B_\rho^2)$ et que, pour tout $\delta > 0$ donné ($0 < \delta < \rho$), il existe des nombres $\tilde{\delta}$ ($0 < \tilde{\delta} < \tilde{\rho}$) et $C > 0$ tels que l'on ait:*

$$\|U\|_{B_\delta^2} \leq C[\|F\|_{B_{\tilde{\delta}}^2} + \sum_{(jk) \in \Lambda} \|\phi_{jk}\|_{B_{\tilde{\delta}}}]$$

Preuve. Soit $E_{mn} = \{(F(t, x), \phi_{jk}(x))_{(jk) \in A} : F(t, x) \in H^N(B_{\bar{\rho}}^2), \phi_{jk}(x) \in H(B_{\bar{\rho}}) ((jk) \in A), \text{telles qu'il existe une et une seule solution } U(t, x) \text{ du (PC) telle que } U(t, x) \in H^N(B_{1/m}^2) \text{ et } \|U\|_{B_{1/m}^2} \leq n\}$.

Il est alors aisé de voir :

- i) $E_{mn} \neq \emptyset$, ii) $\bigcup_{m,n} E_{mn} = H^N(B_{\bar{\rho}}^2) \times H^{|A|}(B_{\bar{\rho}})$
- iii) E_{mn} sont fermés dans $H^N(B_{\bar{\rho}}^2) \times H^{|A|}(B_{\bar{\rho}})$
- iv) E_{mn} sont des ensembles convexes et symétriques.

Puisque $H^N(B_{\bar{\rho}}^2) \times H^{|A|}(B_{\bar{\rho}})$ est un espace de Frechet avec une suite de normes :

$$p_h((F(t, x), \phi_{jk}(x))_{(jk) \in A}) = \|F\|_{B_{\bar{\rho}}^{2-\frac{1}{h}}} + \sum_{(jk) \in A} \|\phi_{jk}\|_{B_{\bar{\rho}}^{2-\frac{1}{h}}}$$

il existe, grâce au théorème de Baire, un $E_{m_0 n_0}$ ayant un point intérieur. On choisit alors $\rho_0 = 1/m_0$. Quand on envisage l'application T :

$$T; (F(t, x), \phi_{jk}(x))_{(jk) \in A} \longrightarrow U(t, x)$$

on voit aisément que son graphe est fermé. Grâce au théorème du graphe fermé, T est continue. Ce qui donne l'inégalité au lemme 1. C. Q. F. D.

Lemme 2. Si le (PC) est bien posé au sens de Cauchy-Kowalevski, alors la solution $U(t, x, \xi)$ du (PC) pour les données $F(t, x) = F(t) \exp(x\xi)$, $\phi_{jk}(x) = \phi_{jk} \exp(x\xi)$ où $F(t) \in H^N(B_{\bar{\rho}})$, $\phi_{jk} \in C((jk) \in A)$, elle est de la forme :

$$U(t, x, \xi) = \hat{U}(t, \xi) \exp(x\xi)$$

où $\hat{U}(t, \xi)$ est l'unique solution du $(PC)_{\xi}$ pour les données $F(t)$, ϕ_{jk} $((jk) \in A)$ et $\hat{U}(t, \xi) \in H^N(B_{\bar{\rho}} \times C)$

Preuve. Soit η un nombre complexe non nul. Soient $U(t, x, \xi)$ et $U(t, x, \xi + \eta)$ les solutions du (PC) pour les données $F(t) \exp(x\xi)$, $\phi_{jk} \exp(x\xi)$ $((jk) \in A)$ et $F(t) \exp(x(\xi + \eta))$, $\phi_{jk} \exp(x(\xi + \eta))$ $((jk) \in A)$ respectivement. Alors $\frac{1}{\eta} [U(t, x, \xi + \eta) - U(t, x, \xi)]$ est la solution du (PC) pour les données $F(t) \frac{\exp(x(\xi + \eta)) - \exp(x\xi)}{\eta}$, $\phi_{jk} \frac{\exp(x(\xi + \eta)) - \exp(x\xi)}{\eta}$ $((jk) \in A)$. Or quand on fait tendre η vers zéro, ces données tendent vers $x F(t) \exp(x\xi)$, $x \phi_{jk} \exp(x\xi)$ $((jk) \in A)$. Donc, grâce au lemme 1, $\frac{1}{\eta} [U(t, x, \xi + \eta) - U(t, x, \xi)]$ tends vers la solution $V(t, x, \xi)$ du (PC) pour ces données-ci. Ceci veut dire que $\partial_{\xi} U(t, x, \xi) = V(t, x, \xi)$ et par conséquent que $U(t, x, \xi)$ est entière en ξ : $U(t, x, \xi) \in H^N(B_{\bar{\rho}} \times C)$.

Posons $\hat{U}(t, x, \xi) \equiv U(t, x, \xi) \exp(-x\xi)$. Alors on a :

$$\partial_x \hat{U}(t, x, \xi) \exp(x\xi) = \partial_x U(t, x, \xi) - \xi U(t, x, \xi).$$

Il est alors aisé de voir :

$$P(t, \partial_t, \partial_x)(\partial_x \hat{U}(t, x, \xi) \exp(x\xi)) = 0$$

$$\partial_t^k (\partial_x \hat{U}_j(t, x, \xi) \exp(x\xi))|_{t=0} = 0 \quad (jk) \in A.$$

Grâce à l'unicité de solution du (PC), on a :

$$\partial_x \hat{U}(t, x, \xi) \exp(x\xi) = 0 \quad \text{donc} \quad \partial_x \hat{U}(t, x, \xi) = 0.$$

Ceci veut dire que $\hat{U}(t, x, \xi)$ est indépendante de x :

$$\hat{U}(t, \xi) \equiv \hat{U}(t, x, \xi).$$

On a ainsi :

$$U(t, x, \xi) = \hat{U}(t, \xi) \exp(x\xi).$$

Il est maintenant facile de voir que $\hat{U}(t, \xi)$ est une solution du $(PC)_\xi$ pour les données $F(t)$, $\phi_{jk}((jk) \in A)$: $\hat{U}(t, \xi) \in H^N(B_\rho \times C)$. S'il existe une autre solution $\hat{W}(t, \xi)$ du $(PC)_\xi$ pour ces données-ci, alors $W(t, x, \xi) = \hat{W}(t, \xi) \exp(x\xi)$ est une solution du (PC) pour les mêmes données que celles de $U(t, x, \xi)$. On en conclut, compte tenu de l'unicité de solution du (PC), que $\hat{W}(t, \xi) = \hat{U}(t, \xi)$. C. Q. F. D.

Démonstration du théorème 1. Supposons [I] au théorème 1. Soient $\tilde{\rho} > 0$ et $\varepsilon > 0$ donnés. Envisageons le $(PC)_\xi$ pour les données $F(t) \in H^N(B_{\tilde{\rho}})$, $\phi_{jk} \in C((jk) \in A)$. Alors, d'après le lemme 2, la solution unique $\hat{U}(t, \xi)$ du $(PC)_\xi$ est $\hat{U}(t, \xi) \in H^N(B_\rho \times C)$ et telle que $U(t, x, \xi) = \hat{U}(t, \xi) \exp(x\xi)$ soit la solution du (PC) pour les données $F(t, x, \xi) = F(t) \exp(x\xi)$, $\phi_{jk}(x, \xi) = \phi_{jk} \exp(x\xi)$ $((jk) \in A)$. Appliquons l'inégalité au lemme 1 à $U(t, x, \xi)$. Ayant :

$$\|U(\cdot, \cdot, \xi)\|_{B_\delta^2} \geq \|\hat{U}(\cdot, \xi)\|_{B_\delta}$$

$$\|F(\cdot, \cdot, \xi)\|_{B_\delta^2} \leq \|F\|_{B_{\tilde{\delta}}} \exp(\tilde{\delta}|\xi|)$$

$$\|\phi_{jk}(\cdot, \xi)\|_{B_{\tilde{\delta}}} \leq |\phi_{jk}| \exp(\tilde{\delta}|\xi|)$$

on a, pour tout δ ($0 < \delta < \rho$), avec des $\tilde{\delta}$ ($0 < \tilde{\delta} < \varepsilon$) et $C > 0$,

$$\begin{aligned} \|\hat{U}(\cdot, \xi)\|_{B_\delta} &\leq C[\|F\|_{B_{\tilde{\delta}}} + \sum_{(jk) \in A} |\phi_{jk}|] \exp(\tilde{\delta}|\xi|) \\ &\leq C[\|F\|_{B_{\tilde{\delta}}} + \sum_{(jk) \in A} |\phi_{jk}|] \exp(\varepsilon|\xi|). \end{aligned}$$

Ceci montre [II] au théorème 1.

Inversement supposons [II] au théorème 1. Soient $F(t, x) \in H^N(B_{\tilde{\rho}}^2)$, $\phi_{jk}(x) \in H^N(B_{\tilde{\rho}})$ $((jk) \in A)$ données :

$$F(t, x) = \sum_{n=0}^{\infty} F_n(x) t^n.$$

Soient $\hat{U}_{jk}(t, \xi)$ $((jk) \in A)$ les solutions du $(PC)_\xi$ pour les données $F(t) = 0$, $\phi_{ih} = 1$ $((ih) = (jk))$, $\phi_{ih} = 0$ $((ih) \neq (jk))$ $((ih) \in A)$.

Soient $\hat{U}_{jk}(t, \xi) = (0, \dots, 0, \hat{U}_{jk}(t, \xi), 0, \dots, 0)$ des $N \times N$ -matrices et $\Phi_{jk}(x) = (0, \dots, 0, \hat{\phi}_{jk}(x), 0, \dots, 0)$ des N -vecteurs $((jk) \in A)$. Soient $\hat{U}_n^h(t, \xi)$ les solutions du $(PC)_\xi$ ($h = 1, \dots, N$, $n = 0, 1, 2, \dots$) pour les données $F(t) = (0, \dots, 0, \hat{t}^n, 0, \dots, 0)$,

$\phi_{jk}=0$ ($(jk) \in A$). Soient $\hat{U}_n(t, \xi) = (\hat{U}_n^1(t, \xi), \dots, \hat{U}_n^N(t, \xi))$ des $N \times N$ -matrices ($n=0, 1, \dots$)

Nous voulons montrer par la suite que les opérateurs différentiels d'ordre infini $\hat{U}_{jk}(t, \partial_x)$ et $\hat{U}_n(t, \partial_x)$ sont bien définis et que

$$(*) \quad U(t, x) = \sum_{(jk) \in A} \hat{U}_{jk}(t, \partial_x) \Phi_{jk}(x) + \sum_{n=0}^{\infty} \hat{U}_n(t, \partial_x) F_n(x)$$

étant aussi bien définie, donne une solution du (PC) pour les données $F(t, x)$, $\phi_{jk}(x)$ ($(jk) \in A$). Pour cela nous préparons quelques notions et lemmes.

Nous considérons les fonctions $\phi(t, \xi) \in H^N(B_{\rho_0} \times C)$. Soient

$$\phi(t, \xi) = \sum_{n=0}^{\infty} \phi_n(t) \xi^n, \quad \psi(t, \xi) = \sum_{n=0}^{\infty} \psi_n(t) \xi^n.$$

Définition 1. On dit que $\psi(t, \xi)$ majore $\phi(t, \xi)$ dans Ω ($\Omega \subset B_{\rho_0}$) si l'on a

$$|\phi_n(t)| \leq \psi_n(t); \quad t \in \Omega, \quad n=0, 1, 2, \dots,$$

et l'on la note $\phi(t, \xi) \ll \psi(t, \xi)$.

Remarque. Au cas général de dimension d , on remplace n par un multi-indice $(\alpha_1, \dots, \alpha_d)$.

Soit $s(t)$ une fonction continue à valeur réelle et non négative définie dans B_{ρ_0} .

Définition 2. Une fonction $\phi(t, \xi) \in H^N(B_{\rho_0} \times C)$ est dite d'ordre p et de type $s(t)$ uniformément sur tout compact dans B_{ρ_0} s'il existe, pour tous ρ et ε ($0 < \rho < \rho_0$, $\varepsilon > 0$) donnés, une constante positive $C(\rho, \varepsilon)$ telle que l'on ait:

$$|\phi(t, \xi)| \leq C(\rho, \varepsilon) \exp((s(t) + \varepsilon)|\xi|^p); \quad t \in B_{\rho}, \quad \xi \in C.$$

Remarque. Au cas général de dimension d , on remplace $s(t)$ par un vecteur d -éléments de cette nature $(s_1(t), \dots, s_d(t))$, l'ordre p par ordre $(p_1, \dots, p_d)$ et $(s(t) + \varepsilon) \cdot |\xi|^p$ par $\sum_{i=1}^d (s_i(t) + \varepsilon) |\xi_i|^{p_i}$.

Lemme 3. Pour qu'une fonction $\phi(t, \xi) \in H^N(B_{\rho_0} \times C)$ soit d'ordre p et de type $s(t)$ uniformément sur tout compact dans B_{ρ_0} , il faut et il suffit que, pour tout $\varepsilon > 0$, ρ ($0 < \rho < \rho_0$) donnés, il existe une constante $C(\rho, \varepsilon)$ telle que $C(\rho, \varepsilon) \sum_{n=0}^{\infty} [ep(s(t) + \varepsilon)|\xi|^p/n]^{n/p}$ majore $\phi(t, \xi)$ dans B_{ρ} .

Preuve. Soit $\phi(t, \xi)$ d'ordre p et de type $s(t)$ uniformément sur tout compact dans B_{ρ_0} . Alors pour ρ et ε donnés, on a, avec une constante $C(\rho, \varepsilon)$,

$$|\phi(t, \xi)| \leq C(\rho, \varepsilon) \exp((s(t) + \varepsilon)|\xi|^p); \quad t \in B_{\rho}, \quad \xi \in C.$$

Alors on a pour tout $r > 0$,

$$|\phi_n(t)| \leq C(\rho, \varepsilon) \frac{1}{r^n} \exp((s(t) + \varepsilon)r^p); \quad t \in B_{\rho}, \quad n=0, 1, 2, \dots$$

Nous choisissons r tel que ce deuxième membre prenne son minimum. Alors nous avons:

$$|\phi_n(t)| \leq C(\rho, \varepsilon) \left[\frac{1}{n} e p(s(t) + \varepsilon) \right]^{n/p}; \quad t \in B_\rho, \quad n=0, 1, 2, \dots$$

Donc $C(\rho, \varepsilon) \sum_{n=0}^{\infty} \left[\frac{1}{n} e p(s(t) + \varepsilon) |\xi|^p \right]^{n/p}$ majore $\phi(t, \xi)$ dans B_ρ . Supposons cette fois cette dernière-ci pour tous $\rho < \rho_0$ et $\varepsilon > 0$, et évaluons cette série-là. Soit $n_0 = [2^p e p(s(t) + \varepsilon) |\xi|^p] + 1$ (où $[\]$ est le symbole de Gauss). Alors on a:

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} \left[\frac{1}{n} e p(s(t) + \varepsilon) |\xi|^p \right]^{n/p} &\leq \left[\sum_{n=0}^{n_0-1} + \sum_{n=n_0}^{\infty} \right] \left[\frac{1}{n} e p(s(t) + \varepsilon) |\xi|^p \right]^{n/p} \\ &\leq ([2^p e p(s(t) + \varepsilon) |\xi|^p] + 1) \exp((s(t) + \varepsilon) |\xi|^p) + 1 \\ &\leq C(\varepsilon) \exp((s(t) + 2\varepsilon) |\xi|^p); \quad t \in B_\rho, \quad \xi \in C, \end{aligned}$$

avec une certaine constante $C(\varepsilon)$.

Ainsi nous avons:

$$|\phi(t, \xi)| \leq C(\rho, \varepsilon) C(\varepsilon) \exp((s(t) + 2\varepsilon) |\xi|^p); \quad t \in B_\rho, \quad \xi \in C$$

qui veut dire que $\phi(t, \xi)$ est d'ordre p et de type $s(t)$ uniformément sur tout compact dans B_{ρ_0} . C. Q. F. D.

Soit $D_{\rho r}(s) = \{(t, x) : |t| < \rho, |x| + s(t) < r\}$

Remarque. Au cas de dimension d , r sera remplacé par $(r_1, \dots, r_d)$ et $|x| + s(t) < r$ par $|x_i| + s_i(t) < r_i$ ($i = 1, \dots, d$).

Lemme 4. Soient $\phi(t, \xi) = \sum_{n=0}^{\infty} \phi_n(t) \xi^n \in H^N(B_{\rho_0} \times C)$ ayant l'estimation:

$$|\phi(t, \xi)| \leq C_\phi(\rho) \exp(s(t) |\xi|); \quad t \in B_\rho, \quad \xi \in C$$

avec une constante $C_\phi(\rho)$ pour tout $\rho < \rho_0$ arbitrairement donné, et $f(t, x) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n(t) x^n \in H^N(B_{\rho_0} \times B_r)$ ($r > s(0)$) ayant l'estimation:

$$|f(t, x)| \leq C_f(\rho, \varepsilon); \quad (t, x) \in B_\rho \times B_{r-\varepsilon}$$

avec une constante $C_f(\rho, \varepsilon)$ pour tous $\rho < \rho_0$ et $\varepsilon (0 < \varepsilon < r)$. Alors, pour tous $\rho < \rho_0$ et $\varepsilon > 0$ ($s(0) + 2\varepsilon < r$), la série

$$\sum_{n,m} \frac{(n+m)!}{m!} \phi_n(t) f_{n+m}(t) x^m$$

est majorée par

$$C_\phi(\rho) C_f(\rho, \varepsilon) C(\rho, \varepsilon) \frac{r - \varepsilon}{r - s(t) - |x| - 2\varepsilon}$$

Dans $D_{\rho r-2\varepsilon}(s)$. Où $C(\rho, \varepsilon)$ est une constante dépendante seulement de ρ et ε .

Preuve. Grâce au lemme 3, les coefficients $\phi_n(t)$ ont des estimations

$$|\phi_n(t)| \leq C_\phi(\rho) [es(t)/n]^n; \quad t \in B_\rho.$$

D'autre part, on a, par l'inégalité de Cauchy,

$$|f_n(t)| \leq C_f(\rho, \varepsilon)/(r-\varepsilon)^n; \quad t \in B_\rho.$$

On a alors:

$$\begin{aligned} & \sum_{n,m} \frac{(n+m)!}{m!} \phi_n(t) f_{n+m}(t) x^m \\ & \ll C_\phi(\rho) C_f(\rho, \varepsilon) \sum_{n,m} \frac{(n+m)!}{n!m!} n! (es(t)/n)^n \frac{|x|^m}{(r-\varepsilon)^{n+m}} \\ & = C_\phi(\rho) C_f(\rho, \varepsilon) \sum_{l=0}^{\infty} \frac{1}{(r-\varepsilon)^l} \sum_{n+m=l} \frac{(n+m)!}{n!m!} n! (es(t)/n)^n |x|^m \\ & \leq C_\phi(\rho) C_f(\rho, \varepsilon) C(\rho, \varepsilon) \sum_{l=0}^{\infty} \frac{1}{(r-\varepsilon)^l} \sum_{n+m=l} \frac{(n+m)!}{n!m!} (s(t)+\varepsilon)^n |x|^m \\ & = C_\phi(\rho) C_f(\rho, \varepsilon) C(\rho, \varepsilon) \sum_{l=0}^{\infty} [(s(t)+\varepsilon+|x|)/(r-\varepsilon)]^l \\ & = C_\phi(\rho) C_f(\rho, \varepsilon) C(\rho, \varepsilon) \frac{r-\varepsilon}{r-s(t)-x-2\varepsilon}; \quad (t, x) \in D_{\rho r-2\varepsilon}. \quad \text{C. Q. F. D.} \end{aligned}$$

Définition 5. Soit $\phi(t, \xi) \in H^N(B_{\rho_0} \times C)$ d'ordre 1 et de type $s(t)$ uniformément sur tout compact dans B_{ρ_0} . Un opérateur différentiel linéaire d'ordre infini $\phi(t, \partial_x)$ opérant à $f(t, x) \in H^N(B_{\rho_0} \times B_r)$ avec $r > s(0)$ est défini par:

$$\phi(t, \partial_x) f(t, x) = \sum_{m,n} \frac{(m+n)!}{m!} \phi_n(t) f_{n+m}(t) x^m.$$

Remarque. Au cas général de dimension d , on remplace ordre 1 par ordre $(1, \dots, 1)$.

Compte tenu du lemme 4, nous avons:

Lemme 5. L'opérateur différentiel linéaire d'ordre infini $\phi(t, \partial_x)$ est bien défini et il applique $H^N(B_{\rho_0} \times B_r)$ à $H^N(D_{\rho_0 r})$. Et pour un opérateur différentiel linéaire $L(t, \partial_t, \partial_x)$ à coefficients de $H(B_{\rho_0})$, le produit $L(t, \partial_t, \partial_x) \phi(t, \partial_x)$ est aussi un opérateur différentiel linéaire d'ordre infini défini par $L(t, \partial_t, \xi) \phi(t, \xi)$.

La suite de la démonstration du théorème 1. Ayant ainsi préparé, revenons à (*). $\tilde{\rho}$ étant déjà donné, appliquons [II] avec ε et $\tilde{\rho}/2$ donnés. Il existe alors un ρ ($\rho < \tilde{\rho}/2$). Soient δ et ε ($0 < \delta < \rho$, $0 < 3\varepsilon < \tilde{\rho}$) donnés. (*) s'écrit:

$$U_i(t, x) = \sum_{(j,k) \in A} \hat{U}_{jk,i}(t, \partial_x) \phi_{jk}(x) + \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{h=1}^N \hat{U}_{n,i}^h(t, \partial_x) F_{n,h}(x)$$

et l'on a d'après [II],

$$|\hat{U}_{jk,1}(t, \xi)| \leq C \exp(\varepsilon|\xi|); \quad t \in B_\delta, \quad \xi \in C$$

$$|\hat{U}_{n,i}^h(t, \xi)| \leq C \delta^n \exp(\varepsilon|\xi|); \quad t \in B_\delta \quad \text{avec un } \delta < \tilde{\rho}/2.$$

On a d'autre part $\phi_{jk}(x) \in H(B_{\tilde{\rho}})$ et $F_{n,h}(x) \in H(B_{\tilde{\rho}})$ et en choisissant τ ($\tilde{\delta} < \tau < \tilde{\rho}$) on a :

$$|\phi_{jk}(x)| \leq C(\varepsilon); \quad x \in B_{\tilde{\rho}-\varepsilon}$$

$$|F_{n,h}(x)| \leq C(\tau, \varepsilon)/\tau^n; \quad x \in B_{\tilde{\rho}-\varepsilon}.$$

Alors grâce au lemme 4, on a avec une constante $C > 0$

$$\hat{U}_{jk,1}(t, \partial_x) \phi_{jk}(x) \ll C \frac{\tilde{\rho} - \varepsilon}{\tilde{\rho} - 3\varepsilon - |x|}; \quad t \in B_{\tilde{\delta}}$$

$$\hat{U}_{n,h}^h(t, \partial_x) F_{n,h}(x) \ll C(\tilde{\delta}/\tau)^n \frac{\tilde{\rho} - \varepsilon}{\tilde{\rho} - 3\varepsilon - |x|}; \quad t \in B_{\tilde{\delta}}$$

Ceci montre que $U(t, x)$ est bien défini par une série ayant la majorante convergente. Il est maintenant aisé de vérifier que $U(t, x)$ est une solution du (PC) pour les données $F(t, x)$, $\phi_{jk}(x)$ ($(jk) \in \Lambda$). C. Q. F. D.

4. Résultats sémi-globaux

Rappelons que $s(t)$ est une fonction continue à valeur réelle et non négative définie dans B_{ρ_0} et que $D_{\rho r}(s) = \{(t, x); |t| < \rho, |x| + s(t) < r\}$, Soit $D_{\rho r}^0(s) = \{t; |t| < \rho, s(t) < r\}$.

Théorème 2. Soient ρ, r ($0 < \rho < \rho_0, 0 < r$) fixés. Sous l'hypothèse [H] les énoncés suivants sont équivalents.

[I] Le (PC) est bien posé au sens suivant: Pour toutes les données $F(t, x) \in H^N(B_{\rho} \times B_r)$, $\phi_{jk}(x) \in H(B_r)$ ($(jk) \in \Lambda$), il existe une et une seule solution $U(t, x)$ du (PC): $U(t, x) \in H^N(D_{\rho r}(s))$

[II] Le (PC) $_{\xi}$ est bien posé au sens suivant: Pour toutes les données $F(t) \in H^N(B_{\rho})$, $\phi_{jk} \in C$ ($(jk) \in \Lambda$), il existe une et une seule solution $\hat{U}(t, \xi)$ du (PC) $_{\xi}$: $\hat{U}(t, \xi) \in H^N \cdot (D_{\rho r}^0(s) \times C)$ telle que, pour tous $\delta > 0$ et $\varepsilon > 0$, il existe des $\tilde{\delta} > 0$ et $C > 0$ tels que

$$|\hat{U}(t, \xi)| \leq C[\|F\|_{B_{\rho-\tilde{\delta}}} + \sum_{(jk) \in \Lambda} |\phi_{jk}|] \exp((s(t) + \varepsilon)|\xi|)$$

pour tout $(t, \xi) \in D_{\rho-\tilde{\delta}, r-\varepsilon}^0 \times C$.

Remarque. Au cas général de dimension d , r sera remplacé par $(r_1, \dots, r_d)$ ($r_i > 0$), B_r par $B_{r_1} \times \dots \times B_{r_d}$ et $(s(t) + \varepsilon)|\xi|$ par $\sum_{i=1}^d (s_i(t) + \varepsilon)|\xi_i|$.

La démonstration de ce théorème est tout à fait pareille à celle du théorème 1. En effet, on voit par le théorème du graphe fermé que, si le (PC) est bien posé au sens [I] du théorème 2, alors l'application T :

$$(F(t, x), \phi_{jk}(x))_{(jk) \in \Lambda} \in H^N(B_{\rho} \times B_r) \times H^{|\Lambda|}(B_r) \mapsto U(t, x) \in H^N(D_{\rho r}(s))$$

est continue. Ainsi on a le lemme suivant.

Lemme 6. Si le (PC) est bien posé au sens [I] du théorème 2, alors la so-

lution $U(t, x, \xi)$ du (PC) pour les données $F(t, x, \xi) = F(t) \exp(x\xi)$, $\phi_{jk}(x, \xi) = \phi_{jk} \exp(x\xi)$ où $F(t) \in H^N(B_\rho)$ et $\phi_{jk} \in C((jk) \in \Lambda)$, elle est de la forme:

$$U(t, x, \xi) = \hat{U}(t, \xi) \exp(x\xi)$$

où $\hat{U}(t, \xi)$ est l'unique solution du $(PC)_\xi$ pour les données $F(t)$, $\phi_{jk}((jk) \in \Lambda)$: $\hat{U}(t, \xi) \in H^N(D_{\rho r}(s) \times C)$, et telle que l'on a, pour tous $\delta > 0$, $\varepsilon > 0$ donnés:

$$\|U(\cdot, \cdot, \xi)\|_{D_{\rho-\delta r-\varepsilon}} \leq C[\|F(\cdot, \cdot, \xi)\|_{B_{\rho-\delta} \times B_{r-\delta}} + \sum_{(jk) \in \Lambda} \|\phi_{jk}(\cdot, \xi)\|_{B_{r-\delta}}]$$

avec de certaines constantes $\delta > 0$ et $C > 0$.

Pour montrer $[I] \mapsto [II]$, il suffit d'appliquer le lemme 6, et pour montrer $[II] \mapsto [I]$, on applique le lemme 4.

Soient $p > 1$, $q > 1$, $\frac{1}{q} + \frac{1}{p} = 1$. Soit $s^*(t) = [p^{1/p} q^{1/q} s(t)^{1/p}]^q$

Théorème 3. Soient ρ , r ($0 < \rho < \rho_0$, $0 < r$) fixés. Sous l'hypothèse [H] les énoncés suivants sont équivalents.

[I] Le (PC) est bien posé au sens suivant: pour toutes les données $F(x, x) \in H^N(B_\rho \times C)$, d'ordre q et de type r uniformément sur tout compact dans B_ρ , et $\phi_{jk}(x)$ ($(jk) \in \Lambda$) fonctions entières d'ordre q et de type r , il existe une et une seule solution du (PC): $U(t, x) \in H^N(D_{\rho r-1}^0(s^*) \times C)$ d'ordre q et de type $r/[1 - (rs^*(t))^{p/q}]^{q/p}$ uniformément sur tout compact de $D_{\rho r-1}^0(s^*)$.

[II] Le $(PC)_\xi$ est bien posé au sens suivant: pour toutes les données $F(t) \in H^N(B_\rho)$, $\phi_{jk} \in C((jk) \in \Lambda)$, il existe une et une seule solution $\hat{U}(t, \xi)$ du $(PC)_\xi$; $\hat{U}(t, \xi) \in H^N(B_\rho \times C)$ telle que, pour tous $\delta > 0$ et $\varepsilon > 0$ donnés, il existe des $\delta > 0$ et $C > 0$ tels que l'on ait pour tous $t \in D_{\rho-\delta r-1-\delta}^0(s^*)$ et $\xi \in C$:

$$\|\hat{U}(t, \xi)\| \leq C[\|F\|_{B_{\rho-\delta}} + \sum_{(jk) \in \Lambda} |\phi_{jk}|] \exp((s(t) + \varepsilon)|\xi|^p).$$

Remarque. Au cas général de dimension d , p , q , r , $s^*(t)$ seront remplacés par $(p_1, \dots, p_d)$, $(q_1, \dots, q_d)$, $(r_1, \dots, r_d)$, $(s_1^*(t), \dots, s_d^*(t))$: $\frac{1}{p_i} + \frac{1}{q_i} = 1$ $s_i^*(t) = (p_i^{1/p_i} q_i^{1/q_i} s_i(t)^{1/p_i})^{q_i}$ ($i = 1, \dots, d$) et $r/(1 - (rs^*(t))^{p/q})^{q/p}$ par $(r_1/(1 - (r_1 s_1^*(t))^{p_1/q_1})^{q_1/p_1}, \dots, r_d/(1 - r_d s_d^*(t))^{p_d/q_d})^{q_d/p_d}$.

Soit $k(t)$ une fonction de même espèce que $s(t)$. Soit G_k l'ensemble de toutes les fonctions $f(t, x) \in H(D_{\rho r-1}^0(k) \times C)$ d'ordre q et de type $r/(1 - (rk(t))^{p/q})^{q/p}$ uniformément sur tout compact de $D_{\rho r-1}^0(k)$. Soient, pour $f \in G_k$:

$$h_n^k(f) = \sup_{\substack{x \in C \\ t \in D_{\rho - \frac{1}{n} - \frac{1}{n} - \frac{1}{n}}^0(k)}} |f(t, x)| \exp \left[- \left(r + \frac{1}{n} \right) |x|^q / (1 - (rk(t))^{p/q})^{q/p} \right]$$

($n = 1, 2, \dots$)

On voit aisément le lemme suivant.

Lemme 7. G_k est un espace de Frechet avec une suite de normes $\{h_n^k\}_{n=1,2,\dots}$.

Tout pareillement au lemme 6 on a

Lemme 8. Si le (PC) est bien posé au sens [I] du théorème 3, alors la solution $U(t, x, \xi)$ du (PC) pour les données $F(t, x, \xi) = F(t) \exp(x\xi)$, $\phi_{jk}(x, \xi) = \phi_{jk} \exp(x\xi)$ $((jk) \in A)$ où $F(t) \in H^N(B_\rho)$ et $\phi_{jk} \in C$, elle est de la forme: $U(t, x, \xi) = \hat{U}(t, \xi) \exp(x\xi)$ où $\hat{U}(t, \xi)$ est l'unique solution du $(PC)_\xi$ pour les données $F(t)$ et ϕ_{jk} $((jk) \in A)$: $\hat{U}(t, \xi) \in H^N(B_\rho(S^*) \times C)$ et telle que l'on ait, pour tout n donné,

$$\sum_{j=1}^N h_n(U_j) \leq C \left[\sum_{j=1}^N \overset{0}{h}_m(F_j) + \sum_{(jk) \in A} \overset{0}{h}_m(\phi_{jk}) \right] \quad m \geq m_0$$

avec un m_0 et $C > 0$. Où $h_n = h_n^k$ pour $k(t) = s^*(t)$ et $\overset{0}{h}_n = h_n^k$ pour $k(t) = 0$.

Par un calcul élémentaire on a

Lemme 9.

$$\sup_{x \in C} |\exp(x\xi - a|x|^q)| = \exp((|\xi|/p^{\frac{1}{p}}q^{\frac{1}{q}}a^{\frac{1}{q}})^p) \quad (a > 0).$$

Démonstration du théorème 3. Montrons [I] $\rightarrow$ [II]. Soient $F(t) \in H^N(B_\rho)$ et $\phi_{jk} \in C$ $((jk) \in A)$ données. Grâce au lemme 8, pour tout entier n , il existe de certains entiers m_n et $C_n > 0$ tels que l'on ait

$$\sum_{j=1}^N h_n(U_j) \leq C_n \left[\sum_{j=1}^N \overset{0}{h}_m(F_j) + \sum_{(jk) \in A} \overset{0}{h}_m(\phi_{jk}) \right] \quad (m \geq m_0).$$

Calculons $h_n(U_j)$;

$$h_n(U_j) = \sup_{\substack{x \in C \\ t \in D_{\rho - \frac{1}{n} - \frac{1}{r} - \frac{1}{n}}^0(s^*)}} \left| \hat{U}_j(t, \xi) \exp \left(x\xi - \left(r + \frac{1}{n} \right) |x|^q / [1 - (rs^*(t))^{\frac{p}{q}}] \right)^{\frac{q}{p}} \right|$$

D'après le lemme 9 on a :

$$= \sup_{t \in D_{\rho - \frac{1}{n} - \frac{1}{r} - \frac{1}{n}}^0(s^*)} |\hat{U}_j(t, \xi)| \exp \left[\frac{1}{\left(r + \frac{1}{n} \right)^{p/q} p q^{p/q}} - \left(\frac{r}{r + \frac{1}{n}} \right)^{p/q} \right] |\xi|^p$$

Ainsi on a, pour tous $t \in D_{\rho - \frac{1}{n} - \frac{1}{r} - \frac{1}{n}}^0(s^*)$, $\xi \in C$, $m \geq m_n$ et $n \geq 1$:

$$\sum_{j=1}^N |\hat{U}_j(t, \xi)| \leq C_n [\|F\|_{B_{\rho - \frac{1}{m}}} + \sum_{(jk) \in A} |\phi_{jk}|] \exp(A|\xi|^p)$$

où

$$A = \left(\frac{r}{r + \frac{1}{n}} \right)^{\frac{p}{q}} s(t) + \frac{1}{p q^{p/q}} \left(\left(\frac{1}{r + \frac{1}{m}} \right)^{p/q} - \left(\frac{1}{r + \frac{1}{n}} \right)^{p/q} \right)$$

Choisissons alors, pour tous $\delta > 0$ et $\varepsilon > 0$ donnés, un n suffisamment grand tel que l'on ait pour tout $t \in D_{\rho - \delta - \frac{1}{r} - \delta}^0(s^*)$:

$$A \leq s(t) + \varepsilon.$$

Alors on a l'inégalité voulu avec $\tilde{\delta} = 1/m_n$ et $C = C_n$.

Lemme 10. Soient $\phi(t, \xi) \in H(D_{\rho r-1}^0(s^*) \times C)$ telle que l'on ait avec une constante $C_\phi(\delta, \varepsilon)$ pour chaque $\delta > 0$ et $\varepsilon > 0$ donnés :

$$|\phi(t, \xi)| \leq C_\phi(\delta, \varepsilon) \exp((s(t) + \varepsilon)|\xi|^p); \quad t \in D_{\rho-\delta-\frac{1}{r}-\delta}^0(s^*), \quad \xi \in C.$$

et $f(t, x) \in H(B_\rho \times C)$ telle que l'on ait, avec une constante $C_f(\delta, \varepsilon)$ pour chaque $\delta > 0$ et $\varepsilon > 0$ donnés :

$$|f(t, x)| \leq C_f(\delta, \varepsilon) \exp((r + \varepsilon)|x|^q) \quad t \in B_{\rho-\delta}, \quad x \in C.$$

Alors on a avec une constante $C(\varepsilon)$;

$$\begin{aligned} & \sum_{m,n} \frac{(n+m)!}{m!} \phi_n(t) f_{n+m}(t) x^m \\ & \ll C_\phi(\delta, \varepsilon) C_f(\delta, \varepsilon) C(\delta) \frac{1}{1 - p(s(t) + 2\varepsilon)(q(r + 2\varepsilon))^{p/q}} \\ & \times \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{eq}{n} \frac{r + 2\varepsilon}{[1 - p(s(t) + 2\varepsilon)(q(r + 2\varepsilon))^{p/q}]^{q/p}} \right)^{n/q} |x|^n \end{aligned}$$

et cette série-là est de $H(D_{\rho r-1}^0(s^*) \times C)$, d'ordre q et de type $r/(1 - (rs^*(t))^{p/q})^{q/p}$ uniformément sur tout compact de $D_{\rho r-1}^0(s^*)$.

Preuve. D'après le lemme 3, on a :

$$\phi(t, \xi) \ll C_\phi(\delta, \varepsilon) \sum_{n=0}^{\infty} (ep(s(t) + \varepsilon)/n^{n/p} |\xi|^n); \quad t \in D_{\rho-\delta r-1-\delta}^0(s^*), \quad \xi \in C.$$

et

$$f(t, x) \ll C_f(\delta, \varepsilon) \sum_{n=0}^{\infty} (eq(r + \varepsilon)/n)^{n/q} |x|^n; \quad t \in B_{\rho-\delta}, \quad \xi \in C.$$

Et l'on a la majoration :

$$\begin{aligned} & \sum_{m,n} \frac{(n+m)!}{m!} \phi_n(t) f_{n+m}(t) x^m \ll C_\phi(\delta, \varepsilon) C_f(\delta, \varepsilon) \sum_{m,n} \frac{(n+m)!}{m!} \\ & \times (ep(s(t) + \varepsilon)/n)^{n/p} (eq(r + \varepsilon)/(n + m))^{(n+m)/q} |x|^m \\ & \ll C_\phi(\delta, \varepsilon) C_f(\delta, \varepsilon) \sum_{m=0}^{\infty} [q(r + \varepsilon)]^{m/q} \left(\frac{e}{m}\right)^{m/q} |x|^m \\ & \times \sum_{n=0}^{\infty} \left[\frac{(n+m)!}{n!m!} (p(s(t) + \varepsilon)(q(r + \varepsilon))^{\frac{p}{q}})^n \right]^{\frac{1}{p}} \\ & \times \left((n+m)! \left(\frac{e}{n+m}\right)^{n+m} \right)^{\frac{1}{q}} \left(n! \left(\frac{e}{n}\right)^n \right)^{\frac{1}{n}} \left(m! \left(\frac{e}{m}\right)^m \right)^{-\frac{1}{q}} \\ & \ll C_\phi(\delta, \varepsilon) C_f(\delta, \varepsilon) C(\varepsilon) \sum_{m=0}^{\infty} [q(r + 2\varepsilon)]^{m/q} \left(\frac{e}{m}\right)^{m/q} |x|^m \\ & \times \sum_{n=0}^{\infty} \left[\frac{(u+m)!}{n!m!} (p(s(t) + \varepsilon)(q(r + 2\varepsilon))^{p/q})^n \right]^{\frac{1}{p}} \end{aligned}$$

Remarquons que, pour $\alpha > 1$ donné, il existe un entier m_α tel que, pour tous m, n ($n > m^2, m \geq m_\alpha$), on ait $\frac{(n+m)!}{n!m!} \leq 4\sqrt{\pi}\alpha^n$. Alors, pour tous $m > m_\alpha$ et y ($\alpha y < 1$), on a :

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{(n+m)!}{n!m!} y^n \right)^{1/p} &\leq (1+4\sqrt{\pi}) \sum_{n=0}^{m^2} \left(\frac{(n+m)!}{n!m!} y^n \right)^{1/p} \\ &< (1+4\sqrt{\pi}) m^{\frac{2}{q}} \left[\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n+m)!}{n!m!} y^n \right]^{1/p} = (1+4\sqrt{\pi}) m^{\frac{2}{q}} (1-y)^{-\frac{m+1}{p}} \\ &< C(\alpha) (1-\alpha y)^{-(m+1)/p} \quad \text{avec une certaine constante } C(\alpha). \end{aligned}$$

La même estimation pour $m \leq m_\alpha$ étant claire, on a :

$$\begin{aligned} \sum_{n,m} \frac{(n+m)!}{m!} \phi_n(t) f_{n+m}(t) |x|^m \\ \ll C_\phi(\delta, \varepsilon) C_f(\delta, \varepsilon) C(\varepsilon) \frac{C(\alpha)}{(1-\alpha p(s(t)+2\varepsilon)(q(r+2\varepsilon))^{p/q})^{1/p}} \\ \times \sum_{n=0}^{\infty} \left[\frac{eq}{n} \frac{r+2\varepsilon}{(1-\alpha p(s(t)+2\varepsilon)(q(r+2\varepsilon))^{p/q})^{q/p}} \right]^{n/q} |x|^n \end{aligned}$$

C'est l'inégalité voulue. Et le reste du lemme 10 est clair grâce au lemme 3.

C. Q. F. D.

La suite de la démonstration du théorème 3. Montrons alors $[II] \mapsto [I]$. Grâce au lemme 10, on sait que $\phi(t, \partial_x) f(t, x)$ est de $H(D_{\rho r-1}^0(s^*) \times C)$, d'ordre 1 et de type $r/[1-(rs^*(t))^{p/q}]^{q/p}$ uniformément sur tout compact de $D_{\rho r-1}^0(s^*)$ pourvu que l'on ait $rs^*(0) < 1$. Il suffit donc de procéder pareillement à la démonstration du théorème 1, mais cette fois par l'application du lemme 10 au lieu du lemme 4.

C. Q. F. D.

5. Application I.

Dans cette section nous envisageons un problème de Cauchy :

$$(PC) \quad \begin{cases} [\partial_t I - A(t, \partial_x)] U(t, x) = F(t, x) \\ U(0, x) = \Phi(x) \end{cases}$$

pour les données $F(t, x)$, $\phi(t)$ toutes holomorphes au voisinage de l'origine. Où $A(t, \partial_x) = (a_{ij}(t, \partial_x))_{i,j=1,\dots,N}$. Remarquons que l'hypothèse **[H]** y est satisfaite. Nous allons faire des estimations de la solution du $(PC)_\xi$ et comme application des théorèmes précédents, nous en obtiendrons des résultats voulus sur le (PC) .

Définition 6. Nous appelons le poids formel de $\partial_t I - A(t, \partial_x)$ ou de $\partial_t I - A(t, \xi)$ le nombre rationnel p défini par :

$$p = \sup_{s=1,\dots,N} \sup_{\{i_1,\dots,i_s\} \subset \{1,\dots,N\}} \sup_{\substack{\pi: \text{permutations} \\ \text{de } \{i_1,\dots,i_s\}}} \frac{1}{s} \sum_{k=1}^s \text{ordre}_\xi a_{i_k \pi(i_k)}(t, \xi)$$

où ordre $a(t, \xi)$ pour $a(t, \xi) \equiv 0$ est convenu d'être $-\infty$ et que $-\infty + a = -\infty$ pour tout $a \in \mathbf{R}$.

Alors grâce au lemme de Volevič [10], [3], on a

Lemme 11. Soit $p \geq 0$ le poids formel de $\partial_t I - A(t, \partial_x)$. Alors il existe un système de nombres rationnels $\tau = \{t_i\}_{i=1}^N$ tel que l'on ait:

$$\text{ordre}_{\xi} a_{ij}(t, \xi) \leq t_j - t_i + p; \quad i, j = 1, \dots, N.$$

Définition 6-bis. Nous appelons ce système de nombre rationnels $\tau = \{t_i\}_{i=1}^N$ un système admissible et $\mathring{A}(t, \partial_x) = (\mathring{a}_{ij}(t, \partial_x))_{i,j=1,\dots,N}$ ou $\mathring{A}(t, \xi) = (\mathring{a}_{ij}(t, \xi))_{i,j=1,\dots,N}$ la partie principale de $A(t, \partial_x)$ ou $A(t, \xi)$ respectivement où $\mathring{a}_{ij}(t, \xi)$ sont les parties homoègnes d'ordre $t_j - t_i + p$ de $a_{ij}(t, \xi)$.

Remarque. $\mathring{A}(t, \xi)$ dépend du choix de τ , mais bien qu'il y ait la diversité au choix de τ , le dét $\mathring{A}(t, \xi)$ et la valeur propre de $\mathring{A}(t, \xi)$ sont déterminés indépendamment du choix de τ .

Nous commençons par l'estimation canonique mais moins précise.

Proposition 1. Soit $p > 0$ le poids formel de $\partial_t I - A(t, \xi)$. Alors on a l'estimation majorante suivante sur la solution $\hat{U}(t, \xi)$ du (PC) $_{\xi}$:

Pour tout $\rho > 0$ donné, il existe des constantes C et K telles que l'on ait:

$$|\hat{U}(t, \xi)| \leq C[\|F\|_{B_{\rho}} + |\Phi|] \exp(K|\xi|^{\rho}).$$

Démonstration. Soient $\tau = \{t_i\}_{i=1}^N$ un système admissible et $\mathring{A}(t, \xi)$ la partie principale de $A(t, \xi)$. Soit

$$D(|\xi|; \tau) = \text{diag} [|\xi|^{t_1}, \dots, |\xi|^{t_N}]$$

Et posons:

$$U^1(t, \xi) = D(|\xi|; \tau) \hat{U}(t, \xi)$$

Alors on a

$$[\partial_t I - A^1(t, \xi)] U^1(t, \xi) = F^1(t, \xi) = D(|\xi|; \tau) F(t)$$

$$U^1(0, \xi) = D(|\xi|; \tau) \Phi.$$

où $A^1(t, \xi) = (a_{ij}^1(t, \xi))_{i,j=1,\dots,N}$ satisfait avec une constante K_0 :

$$|a_{ij}^1(t, \xi)| \leq K_0 |\xi|^{\rho}; \quad |t| \leq \rho, \quad \xi \in \mathbf{C}.$$

Soit, pour t_0 ($|t_0| = 1$) fixé,

$$E(r; t_0, \xi) = \sum_{j=1}^N |U_j^1(r t_0, \xi)|^2; \quad r \in \mathbf{R}_+$$

Alors on a

$$\begin{aligned} \partial_r E(r; t_0, \xi) &= \sum_{j=1}^N 2 \operatorname{Re} (U_j^1(r t_0, \xi) \sum_{k=1}^N \overline{t_0 a_{jk}^1(r t_0, \xi) U_k^1(r t_0, \xi)}) \\ &\quad + \sum_{j=1}^N 2 \operatorname{Re} (U_j^1(r t_0, \xi) \overline{t_0 F_j^1(r t_0, \xi)}) \\ &\leq 2(K_0 N |\xi|^p + 1) E(r; t_0, \xi) + \sum_{j=1}^N |F_j^1(r t_0, \xi)|^2 \end{aligned}$$

Par conséquent on a, pour $r \leq \rho$,

$$E(r; t_0, \xi) \leq [E(0; t_0, \xi) + \sum_{j=1}^N r \sup_{r \leq \rho} F_j^1(r t_0, \xi)^2] \exp(2(N K_0 |\xi|^p + 1)r)$$

Et revenant à $\hat{U}(t, \xi)$, on a avec une constante k ,

$$|\hat{U}(t, \xi)| \leq N |\xi|^k [\|F\|_{B_p} + |\Phi|] \exp((N K_0 |\xi|^p + 1)r) \quad |t| \leq \rho, \quad \xi \in C.$$

La proposition 1 est alors claire.

C. Q. F. D.

Pour obtenir l'estimation plus précise, il faut envisager $\hat{A}(t, \xi)$ de plus près. Soient $\lambda_i(t, \xi)$ ($i=1, \dots, N$) les valeurs propres de $\hat{A}(t, \xi)$. Elles sont continues en (t, ξ) et, $\xi_0 \in C$ étant fixé, elles sont des fonctions en t à singularité au plus algébrique: Au voisinage de chaque point t_0 , il existe un entier k tel que $\lambda_i(t_0 + s^k, \xi_0)$ sont holomorphes en s au voisinage de l'origine. Elles sont aussi homogènes d'ordre p : $\lambda_i(t, \zeta \xi_0) = \zeta^p \lambda_i(t, \xi_0)$ ($\zeta \in C$).

Lemme 12. ξ_0 et t_0 étant fixés, il existe un voisinage de t_0 : $\{t; |t - t_0| < \sigma\}$, un entier k , et des matrices $P(t) = (p_{ij}(t))_{i,j=1, \dots, N}$, et $B(t) = (b_{ij}(t))_{i,j=1, \dots, N}$ tels que $p_{ij}(t_0 + s^k)$ et $b_{ij}(t_0 + s^k)$ soient holomorphes dans $\{s; |s| < \sigma^{1/k}\}$, que $\det P(t) \neq 0$ dans $\{t; |t - t_0| < \sigma\}$, que $b_{ii}(t) = \lambda_i(t, \xi_0)$, $b_{ij}(t) = 0$ ($i > j$) ($i, j = 1, \dots, N$), et que $P(t) \hat{A}(t, \xi_0) P^{-1}(t) = B(t)$.

Preuve. Montrons-le pour $t_0 = 0$. Soit, pour la simplicité de l'écriture, $\lambda(t)$ une des valeurs propres $\lambda_i(t, \xi_0)$ de $\hat{A}(t, \xi_0)$ et $f(t)$ le vecteur propre correspondant à $\lambda(t)$. On peut choisir $f(t)$ en sorte que $f_i(s^k)$ soient, avec un entier k , holomorphes dans $\{s; |s| < \sigma^{1/k}\}$ et que $f(t) \neq 0$ dans $\{t; |t| < \sigma\}$. En effet $f_i(t)$ satisfont:

$$\sum_{j=1}^N (\lambda(t) \delta_{ij} - \hat{a}_{ij}(t, \xi_0)) f_j(t) = 0 \quad (i=1, \dots, N)$$

où δ_{ij} est le δ de Kronecker. Or soit m le rang de la matrice $(\lambda(t) \delta_{ij} - \hat{a}_{ij}(t, \xi_0))_{i,j=1, \dots, N}$ au sens suivant: les mineurs d'ordre plus grand que m sont identiquement nuls et il existe un mineur d'ordre m non identiquement nul. On peut supposer sans perdre la généralité que $1 \leq m \leq N-1$. Soit q le minimum de l'ordre de zéro à l'origine des mineurs d'ordre m en fonction holomorphe de s ($t = s^k$ avec un entier k). On peut supposer sans perdre la généralité:

$$\det(\lambda(s^k) \delta_{ij} - \hat{a}_{ij}(s^k, \xi_0))_{i,j=1, \dots, m} = s^q h(s) \quad (h(0) \neq 0).$$

Il suffit alors de résoudre les équations:

$$\sum_{j=1}^m [\lambda(t)\delta_{ij} - \hat{a}_{ij}(s^k, \xi_0)]f_j(t) = \sum_{j=m+1}^N [\lambda(t)\delta_{ij} - a_{ij}(s^k, \xi_0)]f_j(t) \quad (i=1, \dots, m)$$

par donner $f_j(t)$ ($j=m+1, \dots, N$) convenablement.

$f(t)$ n'étant pas nul, on peut supposer $f_1(t) \neq 0$. Posons:

$$P_1(t) = \begin{pmatrix} f_1(t) & 0 \dots 0 \\ \vdots & 1 & 0 \\ \vdots & & \ddots \\ f_N(t) & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1}$$

Alors on a:

$$P_1(t) \hat{A}(t, \xi_0) P_1(t)^{-1} = \begin{pmatrix} \lambda(t) & * \dots * \\ 0 & A_1(t) \\ \vdots & \\ 0 & \end{pmatrix}$$

On voit alors aisément le lemme par récurrence sur l'ordre de matrices. C. Q. F. D.

Théorème 4. Soit $p > 0$ l'ordre formel de $\partial_t I - A(t, \xi)$. La solution $\hat{U}(t, \xi)$ du $(PC)_\xi$ a l'estimation majorante suivante: pour $0 < \rho < \rho_0$ et $\varepsilon > 0$ donnés, il existe une constante $C > 0$ telle que l'on ait:

$$|\hat{U}(t, \xi)| \leq C[\|F\|_{B_\rho} + |\Phi|] \exp((s(t) + \varepsilon)|\xi|^p); \quad |t| \leq \rho, \quad \xi \in C$$

$$\text{où} \quad s(t) = \sup_{|\xi_0|=1} \int_0^r \sup_{i=1, \dots, N} \{\operatorname{Re}(t_0 \lambda_i(st_0, \xi_0)), 0\} ds; \quad t = rt_0 \quad (|t_0| = 1)$$

Remarque. Quand $F(t) = 0$, $s(t)$ peut être remplacée par $\tilde{s}(t)$:

$$\tilde{s}(t) = \sup_{|\xi_0|=1} \int_0^r \sup_{i=1, \dots, N} \operatorname{Re}(t_0 \lambda_i(st_0, \xi_0)) ds; \quad t = rt_0 \quad (|t_0| = 1)$$

Remarque. Au cas général de dimension d , $s(t)$ et $\tilde{s}(t)$ seront remplacées par $(s_1(t), \dots, s_d(t))$ et $(\tilde{s}_1(t), \dots, \tilde{s}_d(t))$ qui satisfont respectivement, pour tout $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_d) \in C^d$,

$$\int_0^r \sup_{i=1, \dots, N} \{\operatorname{Re}(t_0 \lambda_i(st_0, \xi)), 0\} ds \leq \sum_{i=1}^d s_i(t) |\xi_i|^p; \quad t = rt_0 \quad (|t_0| = 1)$$

$$\int_0^r \sup_{i=1, \dots, N} \operatorname{Re}(t_0 \lambda_i(st_0, \xi)) ds \leq \sum_{i=1}^d \tilde{s}_i(t) |\xi_i|^p; \quad t = rt_0 \quad (|t_0| = 1)$$

et $(s(t) + \varepsilon)|\xi|^p$ sera remplacé par $\sum_{i=1}^d (s_i(t) + \varepsilon)|\xi_i|^p$.

Démonstration. Nous montrons cette estimation d'abord pour ρ suffisamment petit. Soient $\tau = \{t_{ij}\}_{i=1}^N$ un système admissible et $\hat{A}(t, \xi) = (\hat{a}_{ij}(t, \xi))_{i,j=1, \dots, N}$ la partie principale de $A(t, \xi)$. Soit:

$$U^1(t, \xi) = D(|\xi|, \tau) \hat{U}(t, \xi).$$

Alors on a:

$$[\partial_t I - A^1(t, \xi)]U^1(t, \xi) = D(|\xi|, \tau)F(t)$$

où
$$A^1(t, \xi) = D(|\xi|, \tau)A(t, \xi)D(|\xi|, \tau)^{-1}$$

$$= |\xi|^p \left[\dot{A}\left(t, \frac{\xi}{|\xi|}\right) + |\xi|^{-h} B(t, \xi) \right] \quad \text{avec un } h > 0.$$

Fixons un ξ_0 ($|\xi_0| = 1$) et soit $P(t)$ la matrice obtenue par le lemme 12 pour ce ξ_0 et $t_0 = 0$ ($|t| < \rho$) Et posons :

$$U^2(t, \xi) = P(t)U^1(t, \xi)$$

Alors on a :

$$[\partial_t I - A^2(t, \xi)]U^2(t, \xi) = P(t)D(|\xi|, \tau)F(t)$$

où
$$A^2(t, \xi) = P(t)A^1(t, \xi)P(t)^{-1} + P(t)\partial_t P(t)^{-1}.$$

Or grâce au choix de $P(t)$, on a

$$P(t)\dot{A}(t, \xi_0)P(t)^{-1} = \begin{pmatrix} \lambda_1(t, \xi_0) & & \tilde{\alpha}_{ij}(t) \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_N(t, \xi_0) \end{pmatrix}$$

et
$$P(t)\partial_t P(t)^{-1} = t^{-\sigma} Q(t) = t^{-\sigma} (q_{ij}(t))_{i,j=1,\dots,N}$$

où $0 \leq \sigma < 1$ et que $q_{ij}(s^k)$ sont holomorphes en s pour un entier k .

Soit :

$$D_\delta = \text{diag} [1, \delta^1, \dots, \delta^{N-1}]$$

et posons :

$$U^3(t, \xi) = D_\delta U^2(t, \xi).$$

Alors on a :

$$[\partial_t I - A^3(t, \xi)]U^3(t, \xi) = D_\delta P(t)D(|\xi|, \tau)F(t)$$

où
$$A^3(t, \xi) = D_\delta A^2(t, \xi)D_\delta^{-1}$$

$$= |\xi|^p \left[\begin{pmatrix} \lambda_1\left(t, \frac{\xi}{|\xi|}\right) & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_N\left(t, \frac{\xi}{|\xi|}\right) \end{pmatrix} + B^1\left(t, \frac{\xi}{|\xi|}\right) + B^2(t, \xi) + B^3(t, \xi) \right]$$

où
$$B^1\left(t, \frac{\xi}{|\xi|}\right) = D_\delta P(t)\dot{A}\left(t, \frac{\xi}{|\xi|}\right)P(t)^{-1}D_\delta^{-1} - \begin{pmatrix} \lambda_1\left(t, \frac{\xi}{|\xi|}\right) & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_N\left(t, \frac{\xi}{|\xi|}\right) \end{pmatrix}$$

$$= \left(b_{ij}^1\left(t, \frac{\xi}{|\xi|}\right) \right)_{i,j=1,\dots,N}$$

est telle que

$$B^1(t, \xi_0) = \begin{pmatrix} 0 & & \tilde{\alpha}_{ij}(t)\delta^{-i} \\ & \ddots & \\ 0 & & 0 \end{pmatrix}$$

et que $B^2(t, \xi) = |\xi|^{-h} D_\delta P(t) B(t, \xi) P(t)^{-1} D_\delta^{-1} = (b_{ij}^2(t, \xi))_{i,j=1,\dots,N}$

$$B^3(t, \xi) = |\xi|^{-p} t^{-\sigma} D_\delta Q(t) D_\delta^{-1} = (b_{ij}^3(t, \xi))_{i,j=1,\dots,N}.$$

$\varepsilon > 0$ étant donné, nous choisissons d'abord $\delta > 0$ en sorte que l'on ait:

$$|\tilde{\alpha}_{ij}(t)\delta^{-i}| \leq \varepsilon/12\rho N; \quad |t| \leq \rho, \quad i, j = 1, \dots, N$$

Et δ étant fixé une fois choisi, nous choisissons $\gamma > 0$ tel que

$$\left| b_{ij}^1\left(t, \frac{\xi}{|\xi|}\right) \right| \leq \varepsilon/6\rho N; \quad \left| \frac{\xi}{|\xi|} - \xi_0 \right| < \gamma \quad t \leq \rho, \quad i, j = 1, \dots, N$$

Nous choisissons finalement R_0 de façon que l'on ait:

$$|b_{ij}^2(t, \xi)| \leq \varepsilon/6\rho N; \quad |t| \leq \rho, \quad |\xi| \geq R_0, \quad i, j = 1, \dots, N$$

$$|b_{ij}^3(t, \xi)| \leq \varepsilon/3Ln; \quad |t| \leq \rho, \quad |\xi| \geq R_0, \quad i, j = 1, \dots, N$$

où $L = \rho^{1-\sigma}/(1-\sigma).$

Ainsi on a:

$$A^3(t, \xi) = |\xi|^p \left[\begin{pmatrix} \lambda_1\left(t, \frac{\xi}{|\xi|}\right) & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_N\left(t, \frac{\xi}{|\xi|}\right) \end{pmatrix} + (c_{ij}(t, \xi) + t^{-\sigma} d_{ij}(t, \xi))_{i,j=1,\dots,N} \right]$$

où $|c_{ij}(t, \xi)| \leq \varepsilon/3\rho N; \quad |t| \leq \rho, \quad \left| \frac{\xi}{|\xi|} - \xi_0 \right| < \gamma, \quad |\xi| \geq R_0, \quad i, j = 1, \dots, N$

$$|d_{ij}(t, \xi)| \leq \varepsilon/3Ln; \quad |t| \leq \rho, \quad \left| \frac{\xi}{|\xi|} - \xi_0 \right| < \gamma, \quad |\xi| \geq R_0, \quad i, j = 1, \dots, N.$$

Fixons un t_0 ($|t_0| = 1$) et posons:

$$G(r, \xi) = D_\delta P(t) D(|\xi|, \tau) F(t) |_{t=rt_0}$$

$$E(r, \xi) = \sum_{i=1}^N |U_i^3(rt_0, \xi)|^2.$$

Alors on a:

$$\begin{aligned} \partial_r E(r, \xi) &= 2\xi^p \left[\sum_{i=1}^N \operatorname{Re} \left(t_0 \lambda_i \left(rt_0, \frac{\xi}{|\xi|} \right) \right) |U_i^3(rt_0, \xi)|^2 \right. \\ &\quad \left. + \sum_{i,j=1}^N \operatorname{Re} (t_0 c_{ij}(rt_0, \xi) U_i^3(rt_0, \xi) \overline{U_j^3(rt_0, \xi)}) \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + r^{-\sigma} \sum_{i,j=1}^N \operatorname{Re} (t_0^{1-\sigma} d_{ij}(rt_0, \xi) U_i^3(tr_0, \xi) \overline{U_j^3(rt_0, \xi)}) \Big] \\
 & + 2 \sum_{i=1}^N \operatorname{Re} (U_i^3(rt_0, \xi) \overline{G_i(r, \xi)}) \\
 & \leq 2|\xi|^p \left[\sup_{i=1, \dots, N} \operatorname{Re} \left(t_0 \lambda_i \left(rt_0, \frac{\xi}{|\xi|} \right) \right) E(r, \xi) + \frac{\varepsilon}{3\rho} E(r, \xi) + r^{-\sigma} \frac{\varepsilon}{3L} E(r, \xi) \right] \\
 & + N \left[\frac{2|\xi|^p \varepsilon}{3N\rho} E(r, \xi) + \frac{3N\rho}{2|\xi|^p \varepsilon} \sum_{i=1}^N |G_i(r, \xi)|^2 \right] \\
 & = 2|\xi|^p \left[\sup_{i=1, \dots, N} \operatorname{Re} \left(t_0 \lambda_i \left(rt_0, \frac{\xi}{|\xi|} \right) \right) + \frac{2\varepsilon}{3\rho} + \frac{\varepsilon}{3L} r^{-\sigma} \right] E(r, \xi) \\
 & + \frac{3N^2\rho}{2|\xi|^p \varepsilon} \sum_{i=1}^N |G_i(r, \xi)|^2.
 \end{aligned}$$

Donc par l'intégrer de 0 à r ($0 \leq r \leq \rho$), on a :

$$\begin{aligned}
 E(r, \xi) & \leq E(0, \xi) \exp \left(2|\xi|^p \left(\int_0^r \Lambda(s) ds + \varepsilon \right) \right) \\
 & + \frac{3N^2\rho}{2|\xi|^p \varepsilon} \int_0^r \sum_{i=1}^N |G_i(s, \xi)|^2 \exp \left(2|\xi|^p \int_s^r \Lambda(\tau) d\tau \right) ds
 \end{aligned}$$

où $\Lambda(r)$ est telle que

$$\sup_{i=1, \dots, N} \operatorname{Re} \left(t_0 \lambda_i \left(rt_0, \frac{\xi}{|\xi|} \right) \right) \leq \Lambda(r).$$

Si l'on a la positivité de $\Lambda(r)$ (qui n'est pas d'ailleurs nécessaire au cas où $G(r, \xi) = 0$), on a :

$$E(r, \xi) \leq \left[E(0, \xi) + \frac{3N^2\rho^2}{2|\xi|^p \varepsilon} \sup_{s \leq r} \sum_{i=1}^N |G_i(s, \xi)|^2 \right] \exp \left(2|\xi|^p \left(\int_0^r \Lambda(s) ds + \varepsilon \right) \right)$$

Revenant à $\hat{U}(t, \xi)$, et compte tenu de la définition de $s(t)$, on a, avec de certaine constantes C et k ,

$$|\hat{U}(t, \xi)| \leq C \xi^k [\|F\|_{B_r} + |\hat{U}(0, \xi)|] \exp ((s(t) + \varepsilon) |\xi|^p);$$

$$t = rt_0, \quad r \leq \rho, \quad \left| \frac{\xi}{|\xi|} - \xi_0 \right| < \gamma, \quad |\xi| \geq R_0.$$

Cette estimation est évidemment uniforme au choix de t_0 ($|t_0| = 1$). Il existe donc une certaine constante C telle que l'on ait :

$$|\hat{U}(t, \xi)| \leq C [\|F\|_{B_r} + |\hat{U}(0, \xi)|] \exp ((s(t) + \varepsilon) |\xi|^p);$$

$$|t| \leq r < \rho, \quad \left| \frac{\xi}{|\xi|} - \xi_0 \right| < \gamma.$$

Par l'application du théorème de Borel-Lebesgue, on a une certaine constante C telle que

$$|\hat{U}(t, \xi)| \leq C[\|F\|_{B_r} + |\hat{U}(0, \xi)|] \exp((s(t) + \varepsilon)|\xi|^p); \quad |t| < r < \rho, \quad \xi \in C.$$

Ainsi quand ρ est suffisamment petit on a eu l'estimation.

Si l'on procède à la même façon autour de t_0 ($|t_0| < \rho < \rho_0$) au lieu de l'origine, on a, avec de certaine constantes C et $\gamma > 0$:

$$|\hat{U}(t, \xi)| \leq C[\|F\|_{B_\rho} + |U(t_0, \xi)|] \exp((s(t) - s(t_0)) + \varepsilon|\xi|^p);$$

$$|t - t_0| \leq \gamma, \quad \xi \in C.$$

Donc grâce encore au théorème de Borel-Lebesgue on a le résultat voulu. C. Q. F. D.

Théorème 5. Soit $p > 0$ le poids formel de $\partial_t I - A(t, \xi)$. Supposons ou'il existe une fonction continue $c(r)$ telle que l'on ait, avec de certaines t_0 ($|t_0| = 0$), ξ_0 ($|\xi_0| = 1$), k ($k \geq 0$), m ($m \geq 1$), r_0 ($0 < r_0 \leq 1$) et C_0 ($C_0 > 0$), :

$$\operatorname{Re}(t_0 \lambda_i(r t_0, \xi_0)) \geq c(r) > 0; \quad 0 < r \leq r_0 \quad i = 1, \dots, m$$

$$\operatorname{Re}(t_0 \lambda_i(r t_0, \xi_0)) \leq c(r) - C_0 r^k; \quad 0 < r \leq r_0 \quad i = m + 1, \dots, N$$

alors, pour tout $\varepsilon > 0$ donné, il existe une solution $\hat{U}(t, \xi)$ de $[\partial_t I - A(t, \xi)] \hat{U}(t, \xi) = 0$ telle que l'on ait, avec une certaine constante $C > 0$:

$$|\hat{U}(r t_0, \zeta \xi_0)| \geq C |\hat{U}(0, \zeta \xi_0)| \exp\left(\left(\int_0^r c(s) ds - \varepsilon\right) \zeta^p\right); \quad 0 \leq r \leq r_0.$$

Démonstration. Reprenons l'écriture précédente. On a :

$$[\partial_t I - A^3(t, \zeta \xi_0)] U^3(t, \zeta \xi_0) = 0$$

où

$$A^3(t, \zeta \xi_0) = \zeta^p \begin{pmatrix} \lambda_1(t, \xi_0) & & & \tilde{\alpha}_{ij}(t) \delta^{-i} \\ & \ddots & & \\ 0 & & \ddots & \\ & & & \lambda_N(t, \xi_0) \end{pmatrix} + B^2(t, \zeta \xi_0) + B^3(t, \zeta \xi_0)$$

Soit $E_k = \operatorname{diag} [1, t^{-k}, \dots, t^{-(N-1)k}]$

Et posons :

$$U^4(t, \zeta) = E_k U^3(t, \zeta \xi_0).$$

Alors on a :

$$[\partial_t I - A^4(t, \zeta)] U^4(t, \zeta) = 0$$

où

$$A^4(t, \zeta) = \zeta^p \begin{pmatrix} \lambda_1(t, \xi_0) & & & \tilde{\alpha}_{ij}(t) \delta^{-i} t^{ik} \\ & \ddots & & \\ 0 & & \ddots & \\ & & & \lambda_N(t, \xi_0) \end{pmatrix} + C^1(t, \zeta) + C^2(t, \zeta) + C^3(t, \zeta)$$

où

$$C^1(t, \zeta) = \zeta^{-h} E_k D_\delta P(t) B(t, \zeta \xi_0) P(t)^{-1} D_\delta^{-1} E_k^{-1}$$

$$C^2(t, \zeta) = \zeta^{-p} t^{-\sigma} E_k D_\delta Q(t) D_\delta^{-1} E_k^{-1}$$

$$C^3(t, \zeta) = \zeta^{-p} t^{-1} \operatorname{diag} [0, -k, \dots, -(N-1)k].$$

Choisissons un θ ($0 < \theta < \min \{h/Nk, p/Nk + 1\}$) et en posant $r_\zeta = \zeta^{-\theta}$, nous

considérons pour $t: r_\zeta \leq |t| \leq r_0$. Ecrivons $A^4(t, \zeta)$:

$$A^4(t, \zeta) = \zeta^p \left[\begin{pmatrix} \lambda_1(t, \xi_0) & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_N(t, \xi_0) \end{pmatrix} + (e_{ij}(t, \zeta))_{i,j=1,\dots,N} \right].$$

Alors, étant donné un $\varepsilon > 0$, nous pouvons choisir d'abord δ et puis R_0 en sorte que l'on a:

$$|e_{ij}(t, \zeta)| \leq \frac{1}{2N} \text{Min} \{ \varepsilon, C_0 \} |t|^k; \quad r_\zeta \leq |t| \leq r_0, \quad \zeta \geq R_0, \quad i, j = 1, \dots, N.$$

Soit

$$E^*(r, \zeta) = \sum_{i=1}^m |U_i^4(rt_0, \zeta)|^2 - \sum_{i=m+1}^N |U_i^4(rt_0, \zeta)|^2.$$

Alors on a:

$$\begin{aligned} \partial_r E^*(r, \zeta) &\geq 2\zeta^p (c(r) - N \text{Sup} |e_{ij}(t, \zeta)|) E^*(r, \zeta) \\ &\quad + 2\zeta^p (C_0 r^k - 2N \text{Sup} |e_{ij}(t, \zeta)|) \sum_{i=m+1}^N |U_i^4(rt_0, \zeta)|^2 \\ &\geq 2\zeta^p \left(c(r) - \frac{\varepsilon}{2} r^k \right) E^*(r, \zeta) \quad r_\zeta \leq r \leq r_0, \quad \zeta \geq R_0. \end{aligned}$$

Par l'intégrer de r_ζ à r on a

$$E^*(r, \zeta) \geq E^*(r_\zeta, \zeta) \exp \left(2\zeta^p \left(\int_{r_\zeta}^r c(s) ds - \frac{\varepsilon}{2} \right) \right)$$

pourvu que l'on ait:

$$E^*(r_\zeta, \zeta) \geq 0.$$

Pour remplir celle-ci nous choisissons $\hat{U}(t, \xi)$ par résoudre un problème homogène de Cauchy (PC) $_\xi$ à données initiales, à $t = r_\zeta t_0$, satisfaisantes aux conditions:

$$U_i^4(r_\zeta t_0, \zeta) = 0; \quad \xi = \zeta \xi_0, \quad \zeta \in \mathbf{R}_+, \quad i = m+1, \dots, N.$$

Ainsi on a avec de certaines constantes $C > 0$ et l ,

$$|\hat{U}(rt_0, \zeta \xi_0)| \geq C \zeta^l |\hat{U}(r_\zeta t_0, \zeta \xi_0)| \exp \left(\zeta^p \left(\int_0^r c(s) ds - \frac{\varepsilon}{2} \right) \right)$$

Compte tenu de la proposition 1 et reprenant C suffisamment grand si l'on a besoin, on a l'inégalité voulue. C. Q. F. D.

Comme un corollaire direct, on a

Théorème 6. Soit $p > 0$ le poids formel de $\partial_t I - A(t, \xi)$. Si sa partie principale $\hat{A}(t, \xi)$ n'est pas nilpotente, alors il existe des t_0 ($t_0 \neq 0$) et ξ_0 ($|\xi_0| = 1$) et une solution $\hat{U}(t, \xi)$ de $[\partial_t I - A(t, \xi)] \hat{U}(t, \xi) = 0$ telle que l'on ait, avec des constantes $k > 0$, $C > 0$:

$$|\hat{U}(t_0, \zeta \xi_0)| \geq C |\hat{U}(0, \zeta \xi_0)| \exp(k \zeta^p); \quad \zeta \in \mathbf{R}_+.$$

Démonstration. Une des $\lambda_i(t, \xi)$ n'étant pas identiquement nulle, il existe alors un nombre rationnel $l \geq 0$ tel que l'on ait :

$$\lambda_i(t, \xi) = t^l \mu_i(t, \xi)$$

où $\mu_i(s^k, \xi)$ sont holomorphes pour un certain entier k et qu'il existe au moins un i_0 tel que $\mu_{i_0}(0, \xi) \neq 0$. Par l'homogénéité en ξ de $\mu_i(t, \xi)$, il existe un ξ_0 tel que $\operatorname{Re}(\mu_{i_0}(0, \xi_0)) > 0$. Par rénumérotage, si l'on a besoin, les $\lambda_i(t, \xi_0)$, on peut bien supposer que l'on ait, avec des $\delta > 0$ et $m \geq 1$,

$$\operatorname{Re}(\mu_i(0, \xi_0)) \geq \delta > 0 \quad (i=1, \dots, m), \quad \operatorname{Re}(\mu_i(0, \xi_0)) \leq 0 \quad (i=m+1, \dots, N).$$

Ainsi l'hypothèse au théorème 5 étant remplie, on a l'inégalité au théorème 6.

C. Q. F. D.

Par l'application des théorèmes aux sections précédentes on a

Théorème 7. Soit $p > 0$ le poids forme de $\partial_t I - A(t, \partial_x)$. Si $p < 1$, alors [I] au théorème 2 est vrai avec $s(t) = 0$. Si $p = 1$, alors [I] au théorème 2 est vrai avec $s(t)$ définie au théorème 4.

Si $p > 1$, alors [I] au théorème 3 est vrai avec $s(t)$ définie au théorème 4.

Et si $p > 1$ et que [I] au théorème 1 est vrai, alors la partie principale $\hat{A}(t, \xi)$ est nilpotente.

Remarque. Si l'on considère le (PC) homogène (c'est-à-dire $F(t, x) = 0$) $s(t)$ peut être remplacée par $\tilde{s}(t)$ définie à la remarque après le théorème 4.

Remarque. Au cas simple où $\sup_{i=1, \dots, N} \operatorname{Re}(t_0 \lambda_i(t_0, \xi_0))$ est réalisé par une seule $\lambda_i(t_0, \xi_0)$, le théorème 5 nous montre que le théorème 7 donne une bonne limite à la propagation de la régularité (tant que l'on la mesure à notre sens).

6. Application II

Dans cette section nous envisageons le problème de Cauchy pour une seule équation fuchsienne.

$$(PC) \quad \begin{cases} [t^m \partial_t^N + \sum_{j=1}^m \alpha_j t^{m-j} \partial_t^{N-j} + \sum_{j=1}^m a_j(t, \partial_x) t^{m+1-j} \partial_t^{N-j} \\ \quad + \sum_{j=m+1}^N a_j(t, \partial_x) \partial_t^{N-j}] u(t, x) = f(t, x) \\ \partial_t^k u(0, x) = \phi_k(x); \quad k=0, 1, \dots, N-m-1. \end{cases}$$

où α_j sont des constantes et que $a_j(t, \partial_x)$ sont des opérateurs différentiels linéaires à coefficients holomorphes dans $\{t; |t| < \rho_0\}$.

Soit $p(\lambda)$ le polynôme déterminant :

$$p(\lambda) = (\lambda - 1) \cdots (\lambda - m + 1) + (\lambda - 1) \cdots (\lambda - m + 2) \alpha_1 + \cdots + \alpha_m.$$

Le poids p est défini par :

$$p = \sup_{j=1, \dots, N} \frac{1}{j} \text{ordre } a_j(t, \xi).$$

Remarquons que si $p \leq 1$, alors c'est une équation fuchsienne au sens de Bauendi-Goulaouic [1].

Soient $\hat{a}_j(t, \xi)$ la partie homogène d'ordre pj de $a_j(t, \xi)$ ($j=1, \dots, N$). Soient $\lambda_i(t, \xi)$ des racines caractéristiques c'est-à-dire des racines de l'équation caractéristique :

$$t^m \lambda^N + \sum_{j=1}^m \hat{a}_j(t, \xi) t^{m+1-j} \lambda^{N-j} + \sum_{j=m+1}^N \hat{a}_j(t, \xi) \lambda^{N-j} = 0 \quad (i=1, \dots, N)$$

$$\text{Soit } s(t) = \sup_{|\xi|=1} \int_0^r \sup_{i=1, \dots, N} \{ \text{Re}(t^0 \lambda_i(\tau t^0, \xi)), 0 \} d\tau; \quad t = r t^0, \quad |t^0| = 1, \quad r = |t|.$$

Le problème de Cauchy $(PC)_\xi$ est le suivant :

$$(PC)_\xi \quad \begin{cases} [t^m \partial_t^N + \sum_{j=1}^m \alpha_j t^{m-j} \partial_t^{N-j} + \sum_{j=1}^m a_j(t, \xi) t^{m+1-j} \partial_t^{N-j} \\ \quad + \sum_{j=m+1}^N a_j(t, \xi) \partial_t^{N-j}] \hat{u}(t, \xi) = f(t) \\ \partial_t^k \hat{u}(0, \xi) = \phi_k; \quad k=0, 1, \dots, N-m-1. \end{cases}$$

Théorème 8. Pour un $\varepsilon > 0$, il existe une constante positive C telle que la solution holomorphe du $(PC)_\xi$ ait l'estimation :

$$|\hat{u}(t, \xi)| \leq C \left[\sum_{k=0}^{N-m-1} |\phi_k| + \sup_{|t| \leq \rho} |f(t)| \right] \exp((s(t) + \varepsilon)|\xi|^p); \quad |t| \leq \rho, \quad \xi \in \mathbb{C}.$$

Remarque. Au problème homogène de $f=0$, $s(t)$ peut être remplacée par

$$\tilde{s}(t) = \sup_{|\xi|=1} \int_0^r \sup_{i=1, \dots, N} \text{Re}(t^0 \lambda_i(\tau t^0, \xi)) d\tau; \quad t = r t^0, \quad |t^0| = 1, \quad r = |t|.$$

Remarque. Au cas général de dimension d , $s(t)$ sera remplacée par $(s_1(t), \dots, s_d(t))$ telles que

$$\int_0^r \sup_{i=1, \dots, N} \{ \text{Re}(t^0 \lambda_i(\tau t^0, \xi)), 0 \} d\tau \leq \sum_{i=1}^d s_i(t) |\xi_i|^p; \quad t = r t^0, \quad |t^0| = 1, \quad \xi \in \mathbb{C},$$

et $\tilde{s}(t)$ par $(\tilde{s}_1(t), \dots, \tilde{s}_d(t))$ telles que

$$\int_0^r \sup_{i=1, \dots, N} \text{Re}(t^0 \lambda_i(\tau t^0, \xi)) d\tau \leq \sum_{i=1}^d \tilde{s}_i(t) |\xi_i|^p; \quad t = r t^0, \quad |t^0| = 1, \quad \xi \in \mathbb{C}.$$

Démonstration. Posons, pour une solution $\hat{u}(t, \xi)$ du $(PC)_\xi$;

$$u_i(t, \xi) = \partial_t^{i-1} \hat{u}(t, \xi); \quad i=1, 2, \dots, N$$

et

$$U(t, \xi) = {}^t(u_1(t, \xi), \dots, u_N(t, \xi)).$$

Alors on a :

$$\partial_t U(t, \xi) = L^1(t, \xi)U(t, \xi) + F(t)$$

où $F(t) = {}^t(0, \dots, 0, f(t))$

et

$$L^1(t, \xi) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & 0 \\ & & \ddots & \\ & 0 & & 0 \\ & & & 1 \\ -a_N t^{-m} \dots - a_{m+1} t^{-m} - (a_m t + \alpha_m) t^{-m} \dots - (a_1 t + \alpha_1) t^{-1} \end{pmatrix}$$

Où $a_j(t, \xi)$ sont abrégées par a_j pour la simplicité de l'écriture.

L'estimation de $U(t, \xi)$ à l'écart de l'origine est pareille à celle au théorème 4. Considérons donc au voisinage de l'origine. Soient $a_j(t, \xi) = \hat{a}_j(t, \xi) + \tilde{a}_j(t, \xi)$ ($j=1, \dots, N$) que nous écrivons par abréviation $a_j = \hat{a}_j + \tilde{a}_j$. Soient $\delta = \frac{1}{m+1}$ et

$$D(|\xi|^{-p} t^{1-\delta}) = \text{diag} [1, |\xi|^{-p} t^{1-\delta}, \dots, (|\xi|^{-p} t^{1-\delta})^{N-1}].$$

Posons:

$$V(t, \xi) = D(|\xi|^{-p} t^{1-\delta}) U(t, \xi)$$

Alors on a:

$$\partial_t V(t, \xi) = |\xi|^p t^{\delta-1} [\hat{L}^2(t, \xi) + \tilde{L}^2(t, \xi)] V(t, \xi) + (|\xi|^{-p} t^{1-\delta})^{N-1} F(t)$$

où

$$\hat{L}^2(t, \xi) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & 0 \\ & & \ddots & \\ & 0 & & 0 \\ & & & 1 \\ -\hat{a}_N t^{-m+N(1-\delta)} |\xi|^{-pN} \dots - \hat{a}_{m+1} t^{1-\delta(m+1)} |\xi|^{-p(m+1)} - \hat{a}_m t^{1-\delta m} |\xi|^{-pm} \dots - \hat{a}_1 t^{1-\delta} |\xi|^{-p} \end{pmatrix}$$

et

$$\tilde{L}^2(t, \xi) = \begin{pmatrix} 0 \\ -\tilde{a}_N t^{-m+N(1-\delta)} |\xi|^{-pN} \dots - \tilde{a}_{m+1} t^{1-\delta(m+1)} |\xi|^{-p(m+1)} \\ \\ -(\tilde{a}_m t + \alpha_m) t^{-\delta m} |\xi|^{-pm} \dots - (\tilde{a}_1 t + \alpha_1) t^{-\delta} |\xi|^{-p} \end{pmatrix}$$

Les valeurs propres de $\hat{L}^2(t, \xi)$, soient $\mu_i(t, \xi)$ ($i=1, \dots, N$), sont homogènes d'ordre 0 en ξ et satisfont:

$$\mu_i(t, \xi) = |\xi|^{-p} t^{1-\delta} \lambda_i(t, \xi) \quad (i=1, \dots, N).$$

D'après le choix de δ , les éléments de la matrice $\hat{L}^2(t, \xi)$ sont des fonctions continues qui admettent l'expansion en série de Puiseux en t . Donc en posant $t = s^{k_0}$ avec un entier k_0 , ils sont des fonctions holomorphes en s . Par conséquent les valeurs propres $\mu_i(t, \xi)$ sont des fonctions continues en (t, ξ) et pour ξ fixé, elles sont des

fonctions à singularité au plus algébrique à l'origine. Et d'après le lemme 12, pour $\xi = |\xi| \xi^0$ ($|\xi|^0 = 1$ fixé), il existe un $\tau^0 > 0$ et pour $\varepsilon > 0$ donné en plus, il existe une matrice $P(t)$ aux éléments de fonctions continues à singularité au plus algébrique à l'origine telle que $\det P(0) = 1$ et que :

$$P(t)L^2(t, \xi^0)P(t)^{-1} = \begin{pmatrix} \mu_1(t, \xi^0) & & 0 \\ & \ddots & \\ \tilde{\alpha}_{ij}(t) & & \mu_N(t, \xi^0) \end{pmatrix}$$

où $\sup_{|t| \leq \tau^0} |\tilde{\alpha}_{ij}(t)| < \varepsilon/2$.

Soit

$$P(t)L^2(t, \xi)P(t)^{-1} = \begin{pmatrix} \mu_1(t, \xi) & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \mu_N(t, \xi) \end{pmatrix} + (\alpha_{ij}(t, \xi))_{i,j=1,\dots,N}.$$

Alors d'après la continuité, il existe un $\delta^0 > 0$ tel que

$$\sup_{|\frac{\xi}{|\xi|} - \xi^0| \leq \delta^0, |t| \leq \tau^0} |\alpha_{ij}(t, \xi)| < \varepsilon.$$

Soit $W(t, \xi) = P(t)V(t, \xi)$.

Alors on a :

$$\partial_t W(t, \xi) = \left[\begin{pmatrix} \lambda_1(t, \xi) & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_N(t, \xi) \end{pmatrix} + |\xi|^p t^{\sigma-1} (\beta_{ij}(t, \xi))_{i,j=1,\dots,N} \right] W(t, \xi) + G(t, \xi)$$

où

$$\begin{aligned} & (\beta_{ij}(t, \xi))_{i,j=1,\dots,N} \\ & = [(\alpha_{ij}(t, \xi))_{i,j=1,\dots,N} + P(t)\tilde{L}^2(t, \xi)P(t)^{-1} + |\xi|^{-p} t^{1-\delta} P'(t)P(t)^{-1}] t^{\delta-\sigma} \end{aligned}$$

et $G(t, \xi) = (|\xi|^{-p} t^{1-\delta})^{N-1} P(t)F(t)$

et que σ est un nombre rationnel tel que

$$0 < \sigma < \min(\delta, \sigma^0)$$

où σ^0 est un nombre rationnel, non négatif et tel que la singularité algébrique à l'origine des éléments de $P'(t)P(t)^{-1}$ soient estimés par t^{σ^0-1} .

Choisissons ici un nombre rationnel q en sorte que l'on ait :

$$\frac{p}{\delta} < q < \min \left[\frac{p}{\delta} \frac{1}{1+\sigma-\delta}, \frac{p}{\sigma} \right]$$

Alors, pour $\varepsilon > 0$ donné, il existe un $R > 0$ tel que :

$$\sup_{|\frac{\xi}{|\xi|} - \xi^0| \leq \delta^0, |\xi|^{-q} \leq |t| \leq \tau^0, |\xi| \geq R} |\beta_{ij}(t, \xi)| < \frac{\sigma \varepsilon}{(\tau^0)^\sigma (2N+1)}.$$

Fixons alors un $t^0(|t|^0 = 1)$ et considérons pour $(t, \xi): t = rt^0, |\xi|^{-q} \leq r \leq \tau^0, |\xi| \geq R$.
Posons:

$$E(r) = \sum_{i=1}^N |W_i(rt^0, \xi)|^2$$

Alors pareillement à la démonstration du théorème 4 on a

$$E(\tau^0) < E(|\xi|^{-q}) \exp 2 \left[\int_{|\xi|^{-q}}^{\tau^0} \sup_{i=1, \dots, N} \{ \operatorname{Re}(t^0 \lambda_i(rt^0, \xi)), 0 \} dr + \frac{\varepsilon}{2} |\xi|^p \right] \\ + \int_{|\xi|^{-q}}^{\tau^0} G(rt^0, \xi) dr \exp 2 \left[\int_r^{\tau^0} \sup_{i=1, \dots, N} \{ \operatorname{Re}(t^0 \lambda_i(rt^0, \xi)), 0 \} dr + \frac{\varepsilon}{2} |\xi|^p \right]$$

Par le même procédé qu'à la démonstration du théorème 4, on a:

$$|u(t)| \leq C[E(|\xi|^{-q})^{1/2} + \sup_{|t| \leq r} |f(t)|] \exp [(s(t) + \varepsilon)|\xi|^p]; |\xi|^{-q} \leq |t| \leq \tau^0$$

Considérons ensuite pour $(t, \xi); t = rt^0, 0 < r < |\xi|^{-q}$. Faisons un changement de variable $s = |\xi|^q t$ et considérons en s . En posant $\tilde{u}(s, \xi) = u(|\xi|^{-q}s, \xi)$, le (PC) $_{\xi}$ s'écrit:

$$(PC)_{\xi}^0 \quad \begin{cases} L^0(s, \partial_s) \tilde{u}(s, \xi) = \tilde{L}(s, \partial_s; \xi) \tilde{u}(s, \xi) + \tilde{f}(s, \xi) \\ \partial_s^k \tilde{u}(0, \xi) = \tilde{\phi}_k(\xi) \end{cases}$$

où

$$L^0(s, \partial_s) = s^m \partial_s^N + \sum_{j=1}^m \alpha_j s^{m-j} \partial_s^{N-j} \\ \tilde{L}(s, \partial_s; \xi) = -|\xi|^{p(m+1)-q} \left[\sum_{j=1}^m |\xi|^{pj-(j-m)q} a_j(|\xi|^{-q}s, \xi) |\xi|^{-pj} s^{m+1-j} \partial_s^{N-j} \right. \\ \left. + \sum_{j=m+1}^N |\xi|^{(p-q)(j-(m+1))} a_j(|\xi|^{-q}s, \xi) |\xi|^{-pj} \partial_s^{N-j} \right] \\ \tilde{f}(s, \xi) = f(|\xi|^{-q}s, \xi) |\xi|^{(m=N)q}$$

et $\tilde{\phi}_k(\xi) = |\xi|^{-qk} \phi_k.$

Or on a:

Lemme 13. Il existe une constante $C > 0$ telle que la solution du problème de Cauchy

$$\begin{cases} L^0(s, \partial_s) v(s) = g(s) \\ \partial_s^k v(0) = 0 \quad j = 0, 1, \dots, N-m-1 \end{cases}$$

a l'estimation

$$\|v\|_{\rho} \leq C \sup_{|s| \leq \rho} g(s)$$

où
$$\|v\|_{\rho} = \sum_{j=1}^m \sup_{|s| \leq \rho} |s^{m-j+1} \partial_s^{N-j} v(s)| + \sum_{j=m+1}^N \sup_{|s| \leq \rho} |\partial_s^{N-j} v(s)|.$$

Preuve. Soit $g(s) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{s^n}{n!} g_n$. Soit $M_\rho = \sup_{|s| \leq \rho} |g(s)|$. Alors on a :

$$|g_n| \leq M_\rho n! / \rho^n, \quad n=0, 1, \dots$$

La solution $v(s)$ est de la forme :

$$v(s) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{g_n}{(n+N-m)! p(n)} t^{n+N-m}$$

où $p(\lambda)$ est le polynôme déterminant.

Ainsi on a :

$$\begin{aligned} \partial_s^{N-j} v(s) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n!}{(n+j-m)! p(n)} \frac{s^{n+j-m}}{n!} g_n; \quad m+1 \leq j \leq N \\ s^{m+1-j} \partial_s^{N-j} v(s) &= \sum_{n=m-j}^{\infty} \frac{n!}{(n+j-m)! p(n)} \frac{t^{n+1}}{n!} g_n; \quad 1 \leq j \leq m \end{aligned}$$

Compte tenu du fait qu'on a une certaine constante $C > 0$ telle que

$$\frac{n!}{(n+j-m)! p(n)} \leq C \frac{1}{(n-m+1) \cdots (n-m+j)}$$

on a, pour $j \geq 2$,

$$\begin{aligned} |\partial_s^{N-j} v(s)| &\leq C \left[\rho^{j-m} \sum_{n=m}^{\infty} \frac{1}{(n-m+1) \cdots (n-m+j)} + 1 \right] M_\rho; \quad \begin{cases} m+1 \leq j \leq N \\ |s| \leq \rho \end{cases} \\ |s^{m+1-j} \partial_s^{N-j} v(s)| &\leq C \left[\rho \sum_{n=m}^{\infty} \frac{1}{(n-m+1) \cdots (n-m+j)} + 1 \right] M_\rho; \quad \begin{cases} 1 \leq j \leq m \\ |s| \leq \rho \end{cases} \end{aligned}$$

Or pour $j=1$, quand $m=0$, on a

$$|\partial_s^{N-1} v(s)| = \left| \int_0^s g(t) dt \right| \leq \rho M_\rho; \quad |s| \leq \rho$$

Pour $m \geq 1$, on a

$$\begin{aligned} s^m \partial_s^{N-1} v(s) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{s^{n+1}}{(n+1)!} g_n - \sum_{n=0}^{m-1} \frac{s^{n+1}}{(n+1)!} g_n + \frac{s^m}{p(m-1)} g_{m-1} \\ &+ \sum_{n=m}^{\infty} \frac{s^{n+1}}{n!} g_n \left[\frac{1}{(n+1-m) \left(1 + \frac{\alpha_1}{n+1-m} + \cdots + \frac{\alpha_m}{n(n-1) \cdots (n-m+1)} \right)} - \frac{1}{n+1} \right] \end{aligned}$$

et donc (avec la notation générique à la constante C) on a :

$$|s^m \partial_s^{N-1} v(s)| \leq \left| \int_0^s g(t) dt \right| + \sum_{n=m}^{\infty} \frac{C}{n^2} \rho M_\rho + C M_\rho \leq C M_\rho; \quad |s| \leq \rho.$$

En les réunissant, on a le résultat voulu.

C. Q. F. D.

Revenant au problème de Cauchy (PC) $_{\xi}^0$, remarquons que $\tilde{L}(s, \partial_s; \xi)$ est de la forme :

$$\tilde{L}(s, \partial_s; \xi) = |\xi|^{-r} \left[\sum_{j=1}^m c_j(s, \xi) s^{m+1-j} \partial_s^{N-j} + \sum_{j=m+1}^N c_j(s, \xi) \partial_s^{N-j} \right]$$

où

$$r = q - p(m+1)$$

et que

$$|c_j(s, \xi)| \leq M \quad (|s| \leq 1) \quad \text{avec une constante } M > 0.$$

Donc la solution $\tilde{u}(s, \xi)$ du $(PC)_\xi^0$ peut être construite, pour $|\xi|$ suffisamment grand, par l'approximation successive:

$$\begin{aligned} u_0(s, \xi): & \begin{cases} L^0(s, \partial_s)u_0(s, \xi) = \tilde{f}(s, \xi) \\ \partial_s^k u_0(0, \xi) = \phi_k(\xi); \quad k=0, 1, \dots, N-m-1 \end{cases} \\ u_n(s, \xi): & \begin{cases} L^0(s, \partial_s)u_n(s, \xi) = \tilde{L}(s, \partial_s; \xi)u_{n-1}(s, \xi) \\ \partial_s^k u_n(0, \xi) = 0; \quad k=0, 1, \dots, N-m-1, \quad n=1, 2, \dots \end{cases} \end{aligned}$$

et

$$\tilde{u}(s, \xi) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n(s, \xi) = u_0(s, \xi) + w(s, \xi)$$

Soit $v(s, \xi)$ la solution du problème de Cauchy

$$\begin{cases} L^0(s, \partial_s)v(s, \xi) = \tilde{f}(s, \xi) \\ \partial_s^k v(0, \xi) = 0; \quad k=0, 1, \dots, N-m-1. \end{cases}$$

Alors on a :

$$u_0(s, \xi) = \sum_{k=0}^{N-m-1} \frac{s^k}{k!} \tilde{\phi}_k(\xi) + v(s, \xi)$$

Par les évaluer, on a

$$\|w\|_\rho \leq \sum_{n=1}^{\infty} \|u_n\|_\rho \leq \left[\sum_{n=1}^{\infty} (C|\xi|^{-r}M)^n \right] \|u_0\|_\rho$$

et

$$\|u_0\|_\rho \leq C \left[\sum_{k=0}^{N-m-1} |\tilde{\phi}_k(\xi)| + \sup_{|s| \leq \rho} |f(s, \xi)| \right]$$

Donc on a :

$$\|\tilde{u}\|_\rho \leq C \left[\sum_{k=0}^{N-m-1} |\tilde{\phi}_k(\xi)| + \sup_{|s| \leq \rho} |f(s, \xi)| \right]$$

Revenant à la variable t , celle-ci donne :

$$E(|\xi|^{-q}) \leq C|\xi|^{2q(N-1)} \left[\sum_{k=0}^{N-m-1} |\phi_k| + \sup_{|t| < r} |f(t)| \right]$$

En combinant celle-ci avec l'inégalité précédente, on a le résultat voulu. C. Q. F. D.

Par combiner ce théorème 8 avec les théorèmes 2 et 3 on a le théorème suivant.

Théorème 9. *Supposons que le polynôme déterminant $p(\lambda)$ ne soit pas nul pour $\lambda=0, 1, 2, \dots$.*

Si $p < 1$, alors [I] au théorème 2 est vrai avec $s(t)=0$. Si $p=1$, alors [I] au théorème 2 est vrai avec $s(t)$ définie au théorème 8. Et si $p > 1$, alors [I] au théorème 3 est vrai avec $s(t)$ définie au théorème 8.

Démonstration. Il suffit de remarquer que l'hypothèse [H] est satisfaite sous l'hypothèse actuelle. C. Q. F. D.

Remarque. Au cas du problème de Cauchy homogène ($f=0$), $s(t)$ peut être remplacée par $\tilde{s}(t)$ définie à la remarque juste après le théorème 8.

DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES
UNIVERSITÉ D'EHIMÉ

Bibliographie

- [1] M. S. Baouendi-C. Goulaouic, Cauchy problems with Characteristic Initial Hyper surface, Comm. pure appl. Math., **26** (1973), 455–475.
- [2] E. Jannelli, Linear kowalevskian system with time dependent coefficients, C.P.D.E., **9**–14 (1984), 1373–1403.
- [3] K. Kitagawa, L'irrégularité en un point singulier d'un système d'équations différentielles linéaires d'ordre 1, J. Math. Kyoto Univ., **23**–3 (1983), 427–440.
- [4] Y. Hamada and A. Takeuchi, Sur le prolongement analytique de la solution du problème de Cauchy, C.R. Acad. Sci. Paris, **295** (1982), 329–332.
- [5] A. Martineau, Sur les fonctionnelles analytiques et la transformation de Fourier-Borel, J. Anal. Math. Jerusalem, **11** (1963), 1–164.
- [6] A. Martineau, Equations différentielles d'ordre infini, Bull. Soc. Math. France, **95** (1967), 109–154.
- [7] M. Miyake, Global and local Goursat problems in a class of holomorphic or partially holomorphic functions, J. Diff. Eq., **39**–3 (1981), 445–463.
- [8] S. Mizohata, Une remarque sur le théorème de Cauchy-Kowalewski, Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa., **5**–3 (1978), 559–566.
- [9] P. C. Rosenbloom, The majorant method, Proc. Symp. Pure Math. 4, Partial Diff. Eq., A.M.S. (1961), 51–72.
- [10] L. R. Volevič, On general systems of differential equations, Dokl. Acad. Nauk SSSR = Soviet Math. Dokl., **1** (1960), 458–461.