UNE CARACTÉRISATION D'UN GROUPE ALGÉBRIQUE SIMPLEMENT CONNEXE

PAR
MASAYOSHI MIYANISHI

Introduction

Notre but de cet article est de montrer le résultat suivant.

THÉORÈME. *Soit G un groupe algébrique connexe défini sur un corps algébriquement clos, k, de caractéristique p quelconque. Alors les assertions suivantes sont équivalentes:*

(i) $H^1_{ét}(G, F) = 0$ *pour tout groupe abélien fini F d'ordre premier à p.*
(ii) $\mathrm{Ext}^1(G, F) = 0$ *pour tout groupe fini F d'ordre premier à p.*
(iii) $\mathrm{Ext}^1(G, F) = 0$ *pour tout groupe abélien fini F d'ordre premier à p.*
(iv) $\mathrm{Hom}_{k-gr}(G, G_m) = \mathrm{Ext}^1(G, G_m) = 0$.
(v) *G est une extension d'un groupe semi-simple simplement connexe (cf.* SGAD, Exp. XXII) *par un groupe unipotent.*

Cettes assertions sont impliquées par

(0) $H^1_{ét}(G, F) = 0$ *pour tout groupe fini F d'ordre premier à p.*

Si la caractéristique p est zero, la condition (0) *est équivalente aux autres.*

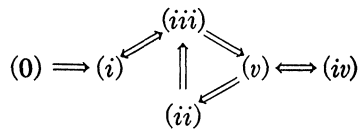
Ce résultat est inspiré par le mémoire de G. Hochschild [4]. Hochschild a traité le cas où la caractéristique p est zero et caractérisé un groupe satisfaisant les conditions du Théorème par son algèbre affine. Si p est zero, la condition (0) du Théorème est équivalente aux autres, car le groupe fondamental d'un groupe algébrique connexe sur le corps de nombres complexes, **C**, est abélien (cf. P. A. Smith, *The fundamental group of a group manifold*, Ann. of Math., vol. 36 (1935).)

Dans ce qui suit, nous fixons un corps algébriquement clos, k, de caractéristique p quelconque et supposons que tous les objets sont définis sur k. Nous suiverons la terminologie de SGAD [1], mais tous les groupes algébriques considérés ici sont réduits. Le lecteur qui n'est pas familier avec des terminologies comme un groupe algébrique simplement connexe, un exposant radiciel, une donnée radicielle et la grosse cellure est envoyé à l'Exposé XXII de SGAD, où on peut entendre les définitions sans grands efforts si on connaît un peu sur la théorie de classification de groupes algébriques. Nous avons rassemblé dans l'appendice les résultats élémentaires de la théorie (non-commutative) des extensions de groupes algébriques.

Received June 4, 1970.

Partie principale: Démonstration du Théorème

1. On démontre le Théorème suivant le schéma suivant;



D'abord, (0) ⇒ (i) et (ii) ⇒ (iii) sont clairs. On va démontrer que (i) implique (iii). Soient G' un groupe algébrique sur k qui est une extension de G par un groupe fini abélien F d'ordre premier à p, G'_0 sa composante neutre et $F_0 = F \cap G'_0$. Alors G'_0 est une extension de G par F_0 et G' est obtenu de G'_0 par changement de groupes, $F_0 \to F$. De plus, G'_0 définit une classe de $H^1_{ét}(G, F_0)$ qui est nul. Donc il existe une section $s : G \to G'_0$ et G'_0 est isomorphe au produit $F_0 \times s(G)$, considéré comme un schéma. Cela implique que G'_0 n'est pas connexe, si $F_0 \neq (1)$. Donc $F_0 = (1)$ et $G'_0 = G$, d'où $G' \cong G \times F$, considéré comme un groupe algébrique.

2. *Démonstration de la flèche* (iii) ⇒ (v). On commence par

LEMME 1. *Sous la condition* (iii), *G est affine.*

Démonstration. Gràce à un Théorème de Chevalley, il existe un sous-groupe L connexe, affine et distingué dans G tel que le groupe-quotient $A = G/L$ est une variété abélienne. Pour tout groupe abélien fini F d'ordre premier à p, on a une suite exacte, notant que

$$\mathrm{Ext}^1(A, F) = \mathrm{Ext}^1_{\mathrm{cent}}(A, F) \quad \text{et} \quad \mathrm{Ext}^1(G, F) = \mathrm{Ext}^1_{\mathrm{cent}}(G, F),$$

$$\mathrm{Hom}_{k-gr}(L, F)^G \to \mathrm{Ext}^1(A, F) \to \mathrm{Ext}^1(G, F),$$

où $\mathrm{Hom}_{k-gr}(L, F)^G = 0$ car L est connexe et où $\mathrm{Ext}^1(G, F) = 0$ en vertu de notre hypothèse. Donc $\mathrm{Ext}^1(A, F) = 0$. Or, si $A \neq 0$, i.e. $d = \dim A > 0$, $\mathrm{Ext}^1(A, F) \neq 0$ pour un groupe abélien fini F d'ordre premier à p. Pour cela, il suffit de prendre $(\mathbf{Z}/n\mathbf{Z})^{2d}$ comme F qui est le noyau de la multiplication par n sur A, n étant premier à p;

$$0 \to (\mathbf{Z}/n\mathbf{Z})^{2d} \to A \xrightarrow{n} A \to 0.$$

Cette extension n'est pas trivial. Cela implique que A = 0, donc G est affine. c.q.f.d.

LEMME 2 [4]. (1) *Soient G un groupe algébrique satisfaisant la condition* (iii) *et $\bar{G}$ un groupe-quotient de G par un sous-groupe connexe de G. Alors $\bar{G}$ satisfait aussi la condition* (iii).

(2) *Si G est un groupe connexe de type multiplicatif, G satisfait la condition* (iii) *si et seulement si G est zero.*

(3) *Soit G un groupe unipotent défini sur k. Alors G satisfait la condition* (ii), *donc la condition* (iii).

Démonstration. Les assertions sont presque triviales sauf (3). Nous démontrons l'assertion (3) par induction sur $\dim G$. Si $\dim G = 1$, G est isomorphe au groupe additif, G_a. Soient G' une extension de G par un groupe fini F d'ordre premier à p, G'_0 sa composante neutre et $F_0 = F \cap G'_0$. G'_0 est une extension de G par F_0. Alors G_0 est un groupe connexe, affine et de dimension 1. Donc G'_0 est isomorphe à G_a où au groupe multiplicatif, G_m. Ici G'_0 doit être isomorphe à G_a. Alors F_0 est commutatif et en effet nul, parce que G_a ne contient qu'un p-groupe abélien. Donc $F_0 = (0)$ et $G' \cong F \times G_a$.

Si $\dim G > 1$, il existe une suite exacte de groupes algébriques,

$$0 \to G_a \to G \to U \to 0,$$

où U est aussi unipotent. Alors pour un groupe fini F d'ordre premier à p, on a une suite exacte

$$\mathrm{Ext}^1(U, F) \to \mathrm{Ext}^1(G, F) \to \mathrm{Ext}^1(G_a, F).$$

Par l'hypothèse d'induction et ce que nous venons de voir, toutes les classes de $\mathrm{Ext}^1(U, F)$ et $\mathrm{Ext}^1(G_a, F)$ sont triviales, donc toutes les classes de $\mathrm{Ext}^1(G, F)$ sont aussi triviales. c.q.f.d.

LEMME 3 [4]. *Soit G un groupe algébrique connexe défini sur k. Pour que G satisfasse la condition* (iii), *il faut et il suffit que le radical $R(G)$ de G soit unipotent et que $\bar{G} = G/R(G)$ satisfasse la condition* (iii).

Démonstration. Démontrons d'abord que si G satisfait la condition (iii), le radical $R(G)$ est unipotent. Soit U le radical unipotent de G. Alors $P = G/U$ est un groupe réductif. Soit $\mathrm{der}(P)$ le groupe dérivé associé à P. Alors on a une isogènie $\mathrm{rad}(P) \times \mathrm{der}(P) \to P$ dont le noyau est isomorphe à $\mathrm{rad}(P) \cap \mathrm{der}(P)$, donc un groupe fini de type multiplicatif (cf. SGAD, Exp. XXII). Grâce à l'hypothèse et l'assertion (1) du lemme précédent, on a en effet que

$$P \times (\mathrm{der}\, P \cap \mathrm{rad}\, P) \cong \mathrm{rad}\, P \times \mathrm{der}\, P.$$

Comme $\mathrm{rad}\, P \times \mathrm{der}\, P$ est connexe, on a $P \cong \mathrm{rad}\, P \times \mathrm{der}\, P$. Donc $\mathrm{rad}(P) \cong P/\mathrm{der}(P)$, qui est zero par les assertions (1) et (2) du lemme précédent, d'où $\mathrm{rad}(P) \cong R(G)/U = 0$. Par consequent, $R(G) = U$.

Démontrons que si $R(G)$ est unipotent et si $\bar{G} = G/R(G)$ satisfait la condition (iii), alors G la satisfait aussi. Pour un groupe abélien fini F d'ordre premier à p, on a une suite exacte

$$\mathrm{Ext}^1(\bar{G}, F) \to \mathrm{Ext}^1(G, F) \to \mathrm{Ext}^1(R(G), F).$$

En vertu de l'hypothèse et de l'assertion (3) du lemme précédent, on a

$$\mathrm{Ext}^1(\bar{G}, F) = \mathrm{Ext}^1(R(G), F) = 0.$$

Donc $\mathrm{Ext}^1(G, F) = 0$. c.q.f.d.

LEMME 4. *Soit G un groupe algébrique linéaire semi-simple défini sur k. Alors G satisfait la condition* (iii) *si et seulement si G est simplement connexe* (*cf.* SGAD, Exp. XXII).

Démonstration. Supposons que G satisfait la condition (iii). Par Chevalley [2, Exp. XXIII], on sait qu'il existe une isogènie $h : G' \to G$ d'un groupe algébrique semi-simple simplement connexe G' sur G telle que les exposants radiciels sont tous égaux à 1. Donc $\mathrm{Ker}\, h$ est un groupe fini discret et distingué dans G', donc central. Alors $\mathrm{Ker}\, h$ est de type multiplicatif, donc son ordre est premier à p (cf. Exp. XXII, p. 26, SGAD). Par l'hypothèse (iii), $G' \cong G$. Donc G est simplement connexe.

Nous allons ensuite démontrer que si G est simplement connexe, G satisfait la condition (iii). Soient G' une extension de G par un groupe abélien fini F d'ordre premier à p, G'_0 sa composante neutre et $F_0 = F \cap G'_0$. G'_0 est une extension de G par F_0 et donne G' par changement de groupes $F_0 \to F$. G'_0 est en effet une isogènie centrale. Donc si $\mathfrak{R}(G)$ et $\mathfrak{R}(G'_0)$ sont les données radicielles de G et G'_0 respectivement, le morphisme de données radicielles $\mathfrak{R}(G) \to \mathfrak{R}(G'_0)$ attaché à l'isogènie $G'_0 \to G$ est une isogènie de données radicielles. Comme G est simplement connexe, $\mathfrak{R}(G)$ est simplement connexe (SGAD, Exp. XXI, (6.2.6) et XXII, (4.3.3)). Donc $\mathfrak{R}(G) \cong \mathfrak{R}(G'_0)$ (SGAD, Exp. XXI, (6.2.9)). Donc $G'_0 \cong G$. Cela signifie que $G' \cong F \times G$. c.q.f.d.

Maintenant, en combinant les lemmes précédents, on conclut que la condition (iii) implique bien la condition (v).

3. *Démonstration de la flèche* (v) $\Rightarrow$ (ii). Par l'assertion (3) de Lemma 2, on sait que la condition (ii) est remplie par un groupe unipotent. De plus, un groupe algébrique semi-simple simplement connexe satisfait la condition (ii) parce que toute isogènie d'un groupe algébrique connexe sur un groupe algébrique semi-simple simplement connexe à noyau fini et discret est centrale et que dans ce cas, la démonstration de Lemma 4 montre que cette isogènie est un isomorphisme.

Si G est une extension d'un groupe algébrique semi-simple simplement connexe $\bar{G}$ par un groupe unipotent U, on a une suite exacte,

$$\mathrm{Ext}^1(\bar{G}, F) \to \mathrm{Ext}^1(G, F) \to \mathrm{Ext}^1(U, F),$$

pour un groupe fini F d'ordre premier à p. Dans cette suite, comme toutes les classes de $\mathrm{Ext}^1(\bar{G}, F)$ et de $\mathrm{Ext}^1(U, F)$ sont triviales, toutes les classes de $\mathrm{Ext}^1(G, F)$ sont aussi triviales.

4. *Démonstration de la flèche* (iii) $\Rightarrow$ (i). On commence par

LEMME 5. *Soit G un groupe algébrique linéaire connexe défini sur k. Désignons par $A(X)$ l'algèbre affine d'un schéma X, par $A(X)^*$ le groupe multiplicatif formé des éléments invertibles, et par $C_n(X)$ le conoyau de la multiplication par n sur $A(X)^*$ pour un entier positif n. Alors $C_n(G)$ est un groupe fini pour tout entier $n > 0$.*

Démonstration. Soient U le radical unipotent de G et $P = G/U$ le groupe réductif associé à G. Soient $T = D_k(M)$ un tore maximal de P, (M étant un groupe abélien libre de type fini) et R un système de racines par rapport à T. Alors choisissant un système de racines positives R_+, on peut trouver un ouvert (Grosse cellure) Ω_{R_+} de P tel que Ω_{R_+} soit l'image d'une immersion ouverte,

$$\prod_{r\in R_-} P_r \times_k T \times_k \prod_{r\in R_+} P_r \to P$$

(cf. SGAD, Exp. XXII, (4.1.2)). Soit W l'image inverse de Ω_{R_+} dans G. Alors U opère sur W et Ω_{R_+} est le schéma-quotient W/U; en outre, U étant unipotent, $W \cong \Omega_{R_+} \times_k U$ comme un schéma. Mais W est un ouvert de G, donc on a

$$A(G)^* \subset A(W)^*$$
$$= (A(U) \otimes A(\prod_{r\in R_-} P_r \times \prod_{r\in R_+} P_r) \otimes A(T))^* = A(T)^*.$$

Si $M = \mathbf{Z}^I$ (I étant fini), alors $A(T)^* \cong k^* \times \mathbf{Z}^I$. Pour tout entier $n > 0$, on a $C_n(G) \subset C_n(T) = (\mathbf{Z}/n\mathbf{Z})^I$. En effet, si un élément f de $A(G)^*$ est écrit en forme g^n pour g de $A(T)^*$, g appartient au corps de fonctions $k(G)$ de G et se définit partout sur G parce que f est defini partout sur G. Donc $g \in A(G)^*$. Par consequent, $C_n(G) \subset C_n(T) = (\mathbf{Z}/n\mathbf{Z})^I$, et $C_n(G)$ est donc un groupe fini. c.q.f.d.

LEMME 6. *Soit G un groupe algébrique, linéaire, connexe défini sur k. Pour tout groupe abélien fini F d'ordre premier à p, $H^1_{ét}(G, F)$ est un groupe fini.*

Démonstration. Il suffit de démontrer Lemme 6 dans le cas où $F = \mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$, n étant premier à p. Dans ce cas, F est immergé dans G_m :

$$0 \to F \to G_m \xrightarrow{n} G_m \to 0.$$

Cette suite donne une suite exacte:

$$A(G)^* \xrightarrow{n} A(G)^* \to H^1_{ét}(G, F) \to \mathrm{Pic}(G) \xrightarrow{n} \mathrm{Pic}(G)$$

d'où suit une suite exacte

$$0 \to C_n(G) \to H^1_{ét}(G, F) \to {}_n\mathrm{Pic}\,(G) \to 0.$$

Or, on sait par [3, Exp. V] que Pic (G) est un groupe fini et par Lemme 5 que $C_n(G)$ l'est aussi. Donc $H^1_{ét}(G, F)$ est un groupe fini. c.q.f.d.

On démontra maintenant la flèche (iii) $\Rightarrow$ (i). Soient $[X]$ une classe de

$H^1_{\acute{e}t}(G, F)$ et $\mathfrak{S} = \{[{}^gX];\ g \in G\}$ l'ensemble des classes obtenues de $[X]$ par changement de base

$$G \xrightarrow{g} G,$$

la translation par g. Comme $H^1_{\acute{e}t}(G, F)$ est un ensemble fini, $\mathfrak{S}$ l'est aussi. Donc $[X]$ doit être invariant par rapport à l'action de G. Soit σ_g le morphisme canonique défini par le diagramme suivant;

$$\begin{array}{ccccc} F \times_k X & \rightrightarrows & X & \longrightarrow & G \\ \uparrow{\scriptstyle \mathrm{id}_F \times \sigma_g} & & \uparrow{\scriptstyle \sigma_g} & & \uparrow{\scriptstyle g} \\ F \times_k X & \rightrightarrows & X & \longrightarrow & G\ . \end{array}$$

Alors si on définit $\tau(g, g')$ par $\sigma_{gg'} = \tau(g, g')\sigma_g \cdot \sigma_{g'}$, $\tau(g, g')$ appartient au groupe $\mathrm{Aut}^F(X/G)$ des G-automorphismes de X qui commutent aux actions des éléments de F.

Montrons que $\mathrm{Aut}^F(X/G) \cong F$. Pour calculer $\mathrm{Aut}^F(X/G)$, considerons un foncteur $Aut^F(X/G)$ sur (Sch/G) défini par

$$Aut^F(X/G)(T) = \mathrm{Aut}^F(X \times_G T/T).$$

On a d'abord que

$$Aut^F(X/G) \times_G X \cong Aut^F(X \times_G X/X) \cong Aut^F(F \times_k X/X)$$
$$\cong Aut^F(F/k) \times_k X \cong F \times_k X = (F \times_k G) \times_G X.$$

Or, F étant commutatif, F est contenu dans $\mathrm{Aut}^F(X \times_G T/T)$. Donc $F \times_k G$ est contenu canoniquement dans $Aut^F(X/G)$. D'autre part, $Aut^F(X/G)$ est représentable. Donc par la (f.p.q.c)-descente, on a $Aut^F(X/G) \cong F \times_k G$. Comme G est connexe, on conclut que $\mathrm{Aut}^F(X/G) \cong F$.

Il est facile à voir que $\tau(g, g')$ satisfait la relation

$$\tau(g, g'g'')(\sigma_g\, \tau(g', g'')\sigma_g^{-1}) = \tau(gg', g'')\tau(g, g').$$

Or, G opère sur F par ${}^gf = \sigma_g f \sigma_g^{-1}$. Pourtant, comme G est connexe, G opère trivialement sur F. Donc $\tau(g, g')$ est un 2-cocycle de G dans F tel que $\tau(1, 1) = 1$, et $\tau(g, g')$ définit une extension de G par F. Par l'hypothèse que $\mathrm{Ext}^1(G, F) = 0$, on a

$$\tau(g, g') = \mu(gg')\mu(g)^{-1}\mu(g')^{-1}$$

pour une application μ de G dans F. Alors, si on pose $\sigma'_g = \mu(g)^{-1}\sigma_g$, σ'_g satisfait $\sigma'_{gg'} = \sigma'_g \sigma'_{g'}$ et $\sigma'_1 = \mathrm{id}_X$. Donc $\sigma' : G \to \mathrm{Aut}(X)$ définit une opération de G sur X. Comme X contient un point x k-rationel, l'orbite Gx est une section de G dans X. Donc X se décompose, et par conséquent, $H^1_{\acute{e}t}(G, F) = 0$. c.q.f.d.

5. *Démonstration de l'équivalence* (iii) *et* (v) $\Leftrightarrow$ (iv). Soit G une extension d'un groupe algébrique semi-simple simplement connexe $\bar{G}$ par un groupe unipotent U,

$$0 \to U \to G \to \bar{G} \to 0.$$

Alors on a une suite exacte

$$0 \to \mathrm{Hom}_{k-gr}(\bar{G}, G_m) \to \mathrm{Hom}_{k-gr}(G, G_m) \to \mathrm{Hom}_{k-gr}(U, G_m)^G \to$$
$$\mathrm{Ext}^1(\bar{G}, G_m) \to \mathrm{Ext}^1(G, G_m) \to \mathrm{Ext}^1(U, G_m),$$

où on note que les extensions de $\mathrm{Ext}^1(\bar{G}, G_m)$, $\mathrm{Ext}^1(G, G_m)$ et $\mathrm{Ext}^1(U, G_m)$ sont centrales, parce que $\mathrm{Aut}_{k-gr}(G_m) \cong \mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$. D'abord $\mathrm{Hom}_{k-gr}(\bar{G}, G_m) = 0$, car $\bar{G}$ est semi-simple. En même temps, $\mathrm{Hom}_{k-gr}(U, G_m) = \mathrm{Ext}^1(U, G_m) = 0$ parce que U est unipotent (cf. SGAD, Exp. XVII, (6.1.1)). Donc $\mathrm{Hom}_{k-gr}(G, G_m) = 0$ et $\mathrm{Ext}^1(G, G_m) \cong \mathrm{Ext}^1(\bar{G}, G_m)$.

Montrons que $\mathrm{Ext}^1(\bar{G}, G_m) = 0$. En effet, soit G' une extension de $\bar{G}$ par G_m. G' est un groupe réductif. Soit $\mathrm{der}(G')$ son sous-groupe dérivé. Alors il existe une isogènie

$$\theta : G_m \times \mathrm{der}(G') \to G'$$

telle que la composition de la réstriction de θ sur $\mathrm{der}(G')$ avec la projection canonique $G' \to \bar{G}$ soit une isogènie. Or, comme $\bar{G}$ est simplement connexe, cette isogènie est un isomorphisme. Donc $\mathrm{der}(G') \cong \bar{G}$ et G' se scinde.

Réciproquement, on démontre que la condition (iv) implique la condition (iii). On utilise la suite exacte suivante:

$$0 \to \mathbf{Z}/n\mathbf{Z} \to G_m \xrightarrow{n} G_m \to 0.$$

La suite

$$0 \to \mathrm{Hom}_{k-gr}(G, G_m) \xrightarrow{n} \mathrm{Hom}_{k-gr}(G, G_m) \to \mathrm{Ext}^1(G, \mathbf{Z}/n\mathbf{Z}) \to$$
$$\mathrm{Ext}^1(G, G_m) \xrightarrow{n} \mathrm{Ext}^1(G, G_m)$$

est exacte; d'où notre assertion. Ici, on note que les extensions de $\mathrm{Ext}^1(G, \mathbf{Z}/n\mathbf{Z})$ et de $\mathrm{Ext}^1(G, G_m)$ sont toutes centrales parce que $\mathrm{Aut}_{k-gr}(\mathbf{Z}/n\mathbf{Z})$ et $\mathrm{Aut}_{k-gr}(G_m)$ sont finis et que G est connexe.

6. Nous ajoutons le résultat suivant.

Soient G un groupe linéaire connexe défini sur k, $R_u(G)$ son radical unipotent, $R(G)$ son radical, $P = G/R_u(G)$ le groupe réductif associé à G, $\bar{G} = G/R(G)$ le groupe semi-simple associé à G. Soit de plus $\theta : \tilde{G} \to \bar{G}$ une isogènie d'un groupe semi-simple simplement connexe sur $\bar{G}$ à noyau $D_k(M_0)$, M_0 étant un groupe abélien fini (cf. [2, Exp. XXIII]).

Alors, on a

PROPOSITION 7. *Avec les notations ci-dessus, on a:*

(i) $\mathrm{Hom}_{k-gr}(G, G_m) = \mathrm{Hom}_{k-gr}(P, G_m)$, $\mathrm{Ext}^1(G, G_m) = \mathrm{Ext}^1(P, G_m)$ *et* $\mathrm{Ext}^1(\tilde{G}, G_m) = M_0$.

(ii) *Il existe une suite exacte de groupe abéliens*:

$$0 \to \mathrm{Hom}_{k-gr}(G, G_m) \to \mathrm{Hom}_{k-gr}(R(G)/R_u(G), G_m) \to M_0 \to \mathrm{Ext}^1(G, G_m) \to 0.$$

Démonstration. On a des suites exactes de groupes algébriques,

$$0 \to R_u(G) \to G \to P \to 0,$$

$$0 \to R(G)/R_u(G) \to P \to \tilde{G} \to 0,$$

$$0 \to D_k(M_0) \to \tilde{G} \to \tilde{G} \to 0,$$

d'où suivent des suites exactes de groupes abéliens,

$$0 \to \mathrm{Hom}_{k-gr}(P, G_m) \to \mathrm{Hom}_{k-gr}(G, G_m) \to \mathrm{Hom}_{k-gr}(R_u(G), G_m)^G \to \mathrm{Ext}^1(P, G_m) \to \mathrm{Ext}^1(G, G_m) \to \mathrm{Ext}^1(R_u(G), G_m),$$

$$0 \to \mathrm{Hom}_{k-gr}(\tilde{G}, G_m) \to \mathrm{Hom}_{k-gr}(P, G_m) \to \mathrm{Hom}_{k-gr}(R(G)/R_u(G), G_m) \to \mathrm{Ext}^1(\tilde{G}, G_m) \to \mathrm{Ext}^1(P, G_m) \to \mathrm{Ext}^1(R(G)/R_u(G), G_m)$$

et

$$0 \to \mathrm{Hom}_{k-gr}(\tilde{G}, G_m) \to \mathrm{Hom}_{k-gr}(\tilde{G}, G_m) \to \mathrm{Hom}_{k-gr}(D_k(M_0), G_m)^{\tilde{G}} \to \mathrm{Ext}^1(\tilde{G}, G_m) \to \mathrm{Ext}^1(\tilde{G}, G_m).$$

En notant que les ensembles des extensions $\mathrm{Ext}^1(\cdot, G_m)$ dans les suites ci-dessus sont tous identiques à $\mathrm{Ext}^1_{\mathrm{cent}}(\cdot, G_m)$, on voit que les résultats énoncés s'en déduisent facilement, tenant compte du Théoremè. c.q.f.d.

COROLLAIRE 8. *Avec les notations de Proposition 7, on a une suite de groupes algébriques de type multiplicatif,*

$$0 \to D_k(\mathrm{Ext}^1(G, G_m)) \to D_k(M_0) \to \mathrm{rad}(P) \to \mathrm{corad}(P) \to 0.$$

(Pour les notions corad (P), etc, voir SGAD, Exp. XXII).

Finalement nous posons la question suivante:

Question. Soit G un groupe algébrique linéaire connexe défini sur un corps algébriquement clos, k, de caractéristique positive. Supposons que G satisfait la condition que

$$\mathrm{Hom}_{k-gr}(G, G_a) = \mathrm{Ext}^1(G, G_a) = 0.$$

Alors, quelle est-elle, la structure de G?

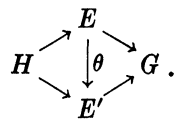
Si G est semi-simple, G satisfait la condition.

Appendice

Soient G et H des groupes algébriques. Un groupe algébrique E est dit une extension de G par H si H est un sous-groupe distingué de E et G est le groupe-quotient de E par H,

$$0 \to H \to E \to G \to 0.$$

E opère sur H par automorphismes intérieurs. Si H est commutatif, cette opération de E sur H se factorise par G. Si cette opération de G sur H est triviale, E est dit une extension centrale de G par H. Deux extensions E et E' sont dites isomorphes s'il existe un isomorphisme $\theta : E \to E'$ tel que le diagramme suivant soit commutatif,



Une extension E est dite triviale si E est isomorphe à l'extension $G \times H$. Une extension isomorphe à une extension centrale est aussi centrale. L'ensemble des classes des extensions de G par H à isomorphismes près est noté par $\mathrm{Ext}^1(G, H)$. Si H est commutatif, l'ensemble des classes des extensions centrales de G par H est noté par $\mathrm{Ext}^1_{\mathrm{cent}}(G, H)$. Ces ensembles sont des foncteurs contravariants en G; si $\phi : G' \to G$ est un homomorphisme de groupes algébriques et si E représente une classe de $\mathrm{Ext}^1(G, H)$, $\phi^*E = E \times_G G'$ est une extension de G' par H et rend le diagramme suivant commutatif,

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & H & \longrightarrow & \phi^*E & \longrightarrow & G' & \longrightarrow & 0 \\ & & \| & & \downarrow & & \downarrow \phi & & \\ 0 & \longrightarrow & H & \longrightarrow & E & \longrightarrow & G & \longrightarrow & 0\,. \end{array}$$

Si E est centrale, ϕ^*E est alors centrale.

Soit E une extension (qui représente une classe) de $\mathrm{Ext}^1(G, H)$:

$$0 \longrightarrow H \xrightarrow{\tau} E \xrightarrow{q} G \longrightarrow 0\,.$$

Supposons que H est commutatif. G opère sur H par automorphismes intérieurs. Soient H' un groupe algébrique commutatif sur lequel G opère et $\psi : H \to H'$ un G-homomorphisme. Alors il existe un homomorphisme (ψ, τ^{-1}) de H dans le produit semi-directe $H'E$, E opérant sur H' via G, dont l'image est un sous-groupe distingué de $H'E$. Le quotient E' de $H'E$ par cet image est une extension de G par H' tel que l'opération de G sur H' s'identifie à l'opération induite par automorphismes intérieurs et que le diagramme

suivant soit commutatif,

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & H & \xrightarrow{\tau} & E' & \xrightarrow{q} & G & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow{\scriptstyle \psi} & & \downarrow & & \| & & \\ 0 & \longrightarrow & H' & \xrightarrow{\tau'} & E' & \xrightarrow{q'} & G & \longrightarrow & 0\,. \end{array}$$

L'extension E' est noté par $\psi_* E$. Si E est une extension centrale, $\psi_* E$ peut être défini pour n'importe quel homomorphisme ψ de H dans un groupe algébrique commutatif H' et $\psi_* E$ est centrale. Alors si H est commutatif, $\mathrm{Ext}^1_{\mathrm{cent}}(G, H)$ est un groupe abélien comme d'habitude et

$$\phi^* : \mathrm{Ext}^1_{\mathrm{cent}}(G, H) \to \mathrm{Ext}^1_{\mathrm{cent}}(G', H)$$

et

$$\psi_* : \mathrm{Ext}^1_{\mathrm{cent}}(G, H) \to \mathrm{Ext}^1_{\mathrm{cent}}(G, H')$$

sont des homomorphismes de groupes. Néanmoins, $\mathrm{Ext}^1(G, H)$ ne possède pas nécessairement d'une structure de groupe.

Donnons quelques résultats que nous avons utilisés.

PROPOSITION 1. *Soient*

$$0 \longrightarrow G_1 \xrightarrow{\tau} G_2 \xrightarrow{\pi} G_3 \longrightarrow 0$$

une suite exacte de groupes algébriques (*i.e.* $G_2 \in \mathrm{Ext}^1(G_3, G_1)$) *et* H *un groupe algébrique tel que* $\mathrm{Hom}_{k-gr}(G_1, H) = (1)$. *Alors dans la suite*

$$\mathrm{Ext}^1(G_3, H) \xrightarrow{\pi^*} \mathrm{Ext}^1(G_2, H) \xrightarrow{\tau^*} \mathrm{Ext}^1(G_1, H)$$

une extension E *de* $\mathrm{Ext}^1(G_2, H)$ *vient de* $\mathrm{Ext}^1(G_3, H)$ *par* π^* *si et seulement si* $\tau^* E$ *est trivial.*

Dans ce cas, on dit par abus de langage que cette suite est exacte.

Démonstration. Il est trivial que si E vient de $\mathrm{Ext}^1(G_3, H)$, $\tau^* E$ est trivial. Quant à l'assertion converse, si $\tau^* E$ est trivial, il existe un homomorphisme $\phi : G_1 \to E$ tel que $q \cdot \phi = \tau$, q étant la projection canonique de E sur G_2. Alors on peut facilement voir que $\phi(G_1)$ est un sous-groupe distingué de E, utilisant l'hypothèse que $\mathrm{Hom}_{k-gr}(G_1, H) = (1)$ et le fait que $\phi(G_1) \subset \mathrm{Cent}_E(H)$. Soit E' le groupe-quotient de E par $\phi(G_1)$. Alors H est un sous-groupe distingué de E car $H \cap \phi(G_1) = (0)$ et le quotient de E' par H est G_3. Le fait que $E \cong \pi^* E'$ résulte immédiatement de l'observation ladite. c.q.f.d.

Remarque 1. La condition que $\mathrm{Hom}_{k-gr}(G_1, H) = (1)$ est remplie dans l'un des cas suivants:

(i) H est fini et G_1 est connexe.

(ii) H est unipotent et G_1 est un tore.

(iii) H est un tore et G_1 est unipotent.

Remarque 2. Si H est commutatif, la même assertion que Proposition 1 est valable pour la suite

$$\mathrm{Ext}^1_{\mathrm{cent}}(G_3, H) \xrightarrow{\pi^*} \mathrm{Ext}^1_{\mathrm{cent}}(G_2, H) \xrightarrow{\tau^*} \mathrm{Ext}^1_{\mathrm{cent}}(G_1, H).$$

Soient

$$0 \to G_1 \xrightarrow{\tau} G_2 \xrightarrow{\pi} G_3 \to 0$$

une suite exacte de groupes algébriques et H un groupe algébrique commutatif. Notons par $\mathrm{Hom}_{k-gr}(G_1, H)^{G_2}$ le sous-groupe de $\mathrm{Hom}_{k-gr}(G_1, H)$ formé des k-homomorphismes $\phi : G_1 \to H$ tel que $\phi([G_1, G_2]) = 0$, $[G_1, G_2]$ étant le groupe des commutateurs de G_1 et G_2. Alors il existe un homomorphisme des groupes

$$d : \mathrm{Hom}_{k-gr}(G_1, H)^{G_2} \to \mathrm{Ext}^1_{\mathrm{cent}}(G_3, H).$$

En effet, soit ϕ un élément de $\mathrm{Hom}_{k-gr}(G_1, H)^{G_2}$. Considérons un homomorphisme $(\phi, \tau^{-1}) : G_1 \to H \times G_2$ (le produit direct). L'image de (ϕ, τ^{-1}) est un sous-groupe distingué de $H \times G_2$ et le quotient de $H \times G_2$ par cet image est une extension centrale de G_3 par H.

Alors on peut démontrer facilement:

PROPOSITION 2. *Soient*

$$0 \longrightarrow G_1 \xrightarrow{\tau} G_2 \xrightarrow{\pi} G_3 \longrightarrow 0$$

une suite exacte de groupes algébriques et H un groupe algébrique commutatif. Alors il existe une suite exacte de groupe abéliens,

$$0 \longrightarrow \mathrm{Hom}_{k-gr}(G_3, H) \xrightarrow{\pi^*} \mathrm{Hom}_{k-gr}(G_2, H) \xrightarrow{\tau^*}$$
$$\mathrm{Hom}_{k-gr}(G_1, H)^{G_2} \xrightarrow{d} \mathrm{Ext}^1_{\mathrm{cent}}(G_3, H) \xrightarrow{\pi^*} \mathrm{Ext}^1_{\mathrm{cent}}(G_2, H)$$
$$\xrightarrow{\tau^*} \mathrm{Ext}^1_{\mathrm{cent}}(G_1, H).$$

Soient

$$0 \longrightarrow H_1 \xrightarrow{\tau'} H_2 \xrightarrow{\pi'} H_3 \longrightarrow 0$$

une suite exacte de groupes algébriques commutatifs et G un groupe algébrique. Alors il existe un homomorphisme de groupes

$$d' : \mathrm{Hom}_{k-gr}(G, H_3) \to \mathrm{Ext}^1_{\mathrm{cent}}(G, H_1)$$

qui associe $\rho^* H_2$ à chaque $\rho \in \mathrm{Hom}_{k-gr}(G, H_3)$.

PROPOSITION 3. *Soient*

$$0 \longrightarrow H_1 \xrightarrow{\tau'} H_2 \xrightarrow{\pi'} H_3 \longrightarrow 0$$

une suite exacte de groupes algébriques commutatifs et G un groupe algébrique.

Alors on a une suite exacte de groupe abéliens,

$$0 \to \mathrm{Hom}_{k-gr}(G, H_1) \xrightarrow{\tau'_*} \mathrm{Hom}_{k-gr}(G, H_2) \xrightarrow{\pi'_*} \mathrm{Hom}_{k-gr}(G, H_3)$$
$$\xrightarrow{d'} \mathrm{Ext}^1_{\mathrm{cent}}(G, H_1) \xrightarrow{\tau'_*} \mathrm{Ext}^1_{\mathrm{cent}}(G, H_2) \xrightarrow{\pi'_*} \mathrm{Ext}^1_{\mathrm{cent}}(G, H_3).$$

Références

1. Séminaire de Géométrie Algébrique, *Schémas en groupes*, dirigé par A. Grothendieck et M. Démazure, cité SGAD, 1963–64, Institut Hautes Etudes Scientifiques. Il a été publié comme n°s 151–153 dans Lecture notes in mathematics, Springer Verlag.
2. Séminaire C. Chevalley, *Classification des groupes de Lie algébriques*, Fascicule 2, Secrétariat mathématique, Paris, 1958.
3. Séminaire C. Chevalley, *Anneaux de Chow et applications*, Secrétariat mathématique, Paris, 1958.
4. G. Hochschild, *Algebraic groups and Hopf algebras*, Illinois J. Math., vol. 14 (1970), pp. 52–65.

Université de Montréal
Montréal, Canada
Université de Kyoto
Kyoto, Japan