

NON COHERENCE DE CERTAINS ANNEAUX DE FONCTIONS HOLOMORPHES

PAR
E. AMAR

Introduction

Soit A un anneau, $u_1, \dots, u_k$, k éléments de A ; on note

$$R(u_1, \dots, u_k) = \left\{ f = (f_1, \dots, f_k) \in A^k \mid \sum_{i=1}^k u_i f_i = 0 \right\}$$

le module des relations de $u_1, \dots, u_k$; on dit que le module $R(u_1, \dots, u_k)$ est de type fini si il est engendré sur A par un nombre fini de ses éléments; on dit que A est un anneau cohérent si, pour tout k dans $\mathbf{N}$ et tout k -uple $(u_1, \dots, u_k)$ d'éléments de A , le module $R(u_1, \dots, u_k)$ est de type fini.

W. McVoy et L. A. Rubel [1] ont montré que l'anneau $H^\infty(\mathbf{D})$ des fonctions holomorphes et bornées dans le disque $\mathbf{D}$ de $\mathbf{C}$ est cohérent; J. P. Rosay [2] a montré qu'il en était de même pour l'anneau des fonctions holomorphes et bornées dans un domaine borné de $\mathbf{C}$ de connectivité finie; on se propose de montrer ici:

THEOREME 1. (i) *L'anneau $H^\infty(\mathbf{B})$ des fonctions holomorphes et bornées dans la boule $\mathbf{B}$ de $\mathbf{C}^n$, pour $n \geq 3$ n'est pas cohérent.*

(ii) *L'anneau $H^\infty(\Delta)$ des fonctions holomorphes et bornées dans le polydisque Δ de $\mathbf{C}^n$, pour $n \geq 3$ n'est pas cohérent.*

Le cas $n = 2$ est encore sans réponse.

De même si l'on note $A^k(\mathbf{B})$ (resp. $A^k(\Delta)$) l'anneau des fonctions holomorphes dans $\mathbf{B}$ et dont les k premières dérivées partielles sont continues dans $\bar{\mathbf{B}}$ (resp. dans $\bar{\Delta}$) on a:

THEOREME 2. *Pour $n \geq 3$ l'anneau $A^k(\mathbf{B})$ (resp. $A^k(\Delta)$) n'est pas cohérent.*

Dans le Théorème 2 on peut remplacer $A^k(\mathbf{B})$ par l'anneau des fonctions holomorphes dans $\mathbf{B}$ et dont les $k - 1$ premières dérivées sont Lipchitz 1, de même pour le polydisque Δ .

En fait, on doit pouvoir montrer le théorème 2 comme W. McVoy et L. A. Rubel [1] l'ont démontré pour $n = 1$ et $k = 0$, ce qui éviterait la restriction $n \geq 3$. Toutefois la preuve pour $n \geq 3$ étant identique à celle du théorème 1, nous la donnons ici.

Received February 27, 1979.

Le cas de A^∞ est également ouvert.

Une propriété équivalente à la cohérence et peut-être plus claire est la suivante [3]:

“L’intersection de deux idéaux ayant un nombre fini de générateurs a un nombre fini de générateurs”.

Le Théorème 1 prouve donc que ce n’est pas le cas pour $H^\infty(\mathbf{B})$ et $H^\infty(\Delta)$ pour $n \geq 3$.

Démonstration du Theoreme 1

1. Cas de la boule $\mathbf{B}$ de $\mathbf{C}^3$. On considère l’idéal engendré par z_1 et z_2 dans $H^\infty(\mathbf{B})$.

Dans le module des relations de z_1 et z_2 on a les vecteurs

$$(1.1) \quad G_\alpha(z) = \begin{bmatrix} \frac{z_2}{(1 - \alpha z_3^2)^{1/2}} \\ -z_1 \\ \frac{z_1}{(1 - \alpha z_3^2)^{1/2}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_\alpha(z) \\ g_\alpha(z) \end{bmatrix}, \quad \forall \alpha \in \mathbf{T},$$

car

$$|f_\alpha(z)| = \frac{|z_2|}{|1 - \alpha z_3^2|^{1/2}} \leq \frac{|z_2|}{(1 - |z_3|^2)^{1/2}} \leq 1$$

dans $\mathbf{B}$ de même $|g_\alpha(z)| \leq 1$; et, bien sûr, $z_1 f_\alpha(z) + z_2 g_\alpha(z) \equiv 0$.

Supposons que le module $R(z_1, z_2)$ soit de type fini sur $H^\infty(\mathbf{B})$; il existerait alors des éléments $H_1, H_2, \dots, H_k$ dans $R(z_1, z_2)$ tels que

$$(1.2) \quad \forall \alpha \in \mathbf{T}, \exists \gamma_\alpha^i \in H^\infty(\mathbf{B}) \text{ avec } G_\alpha = \sum_{i=1}^k \gamma_\alpha^i H_i.$$

Puisque $H_i \in R(z_1, z_2)$ on a

$$(1.3) \quad H_i = \begin{pmatrix} r_i \\ s_i \end{pmatrix} \text{ avec } z_1 r_i(z) + z_2 s_i(z) = 0;$$

donc, sur $z_2 = 0$ on a $r_i(z)z_1 = 0 \Rightarrow r_i(z) = 0$ et donc il existe t_i , holomorphe dans $\mathbf{B}$, telle que

$$(1.4) \quad r_i(z) = z_2 t_i(z), \quad i = 1, 2, \dots, k.$$

De même il existe u_i , holomorphe dans $\mathbf{B}$ telle que

$$(1.5) \quad s_i(z) = z_1 u_i(z), \quad i = 1, 2, \dots, k.$$

On déduit de (1.2), (1.4) et (1.5) que

$$(1.6) \quad \sum_{i=1}^k \gamma_\alpha^i(z) t_i(z) = \frac{1}{(1 - \alpha z_3^2)^{1/2}} = \varepsilon_\alpha(z), \quad \forall \alpha \in \mathbf{T},$$

et la relation analogue en u_i .

Soient alors $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k, \alpha, k+1$ points de $\mathbf{T}$, tous distincts; (1.6) s'interprète comme un système linéaire à k inconnues, les t_i , et à $k+1$ équations; la compatibilité donne alors

$$(1.7) \quad \det \begin{bmatrix} \gamma_{\alpha_1}^1 & \cdots & \gamma_{\alpha_1}^k & \varepsilon_{\alpha_1} \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ \gamma_{\alpha_k}^1 & \cdots & \gamma_{\alpha_k}^k & \varepsilon_{\alpha_k} \\ \gamma_{\alpha}^1 & & \gamma_{\alpha}^k & \varepsilon_{\alpha} \end{bmatrix} = 0.$$

Développant ce déterminant suivant la dernière colonne on a que ε_{α} s'exprime comme combinaison linéaire à coefficients *bornés*, car les $\gamma_{\alpha_j}^i$ sont dans $H^{\infty}(\mathbf{B})$, des ε_{α_j} , i.e.,

$$(1.8) \quad \det \begin{bmatrix} \gamma_{\alpha_1}^1 & \cdots & \gamma_{\alpha_1}^k \\ \vdots & & \vdots \\ \gamma_{\alpha_k}^1 & \cdots & \gamma_{\alpha_k}^k \end{bmatrix} \varepsilon_{\alpha} = \sum_{i=1}^k \lambda_{\alpha}^i \varepsilon_{\alpha_i} \quad \text{avec } \lambda_{\alpha}^i \in H^{\infty}(\mathbf{B}).$$

Si le déterminant devant ε_{α} n'est pas identiquement nul sur $\{z_1 = z_2 = 0\}$, faisant dans (1.8) $z_1 = z_2 = 0$, on a que ce déterminant est une fonction holomorphe et bornée dans $\mathbf{D}$ *indépendante de α* ; il existe donc $\alpha \neq \alpha_j$ dans $\mathbf{T}$ tel que ce déterminant a une limite non nulle lorsque z_3 tend radialement vers l'une des racines carrée de $\bar{\alpha}$.

Faisons tendre z_3^2 vers $\bar{\alpha}$ radialement dans (1.8): le premier membre tend vers l'infini en module alors que le second est borné car les λ_i le sont ainsi que ε_{α_j} car $\alpha_j \neq \alpha$; on obtient donc une contradiction.

Donc on a

$$(1.9) \quad \det \begin{bmatrix} \gamma_{\alpha_1}^1 & \cdots & \gamma_{\alpha_1}^k \\ \vdots & & \vdots \\ \gamma_{\alpha_k}^1 & \cdots & \gamma_{\alpha_k}^k \end{bmatrix} = 0 \quad \text{dans } V = \{z \in \mathbf{B}, z_1 = z_2 = 0\}$$

pour tous les choix de $\alpha_1, \dots, \alpha_k$ dans $\mathbf{T}$.

Soit l le rang de la matrice

$$\begin{bmatrix} \gamma_{\alpha_1}^1 & \cdots & \gamma_{\alpha_1}^k \\ \gamma_{\alpha_k}^1 & \cdots & \gamma_{\alpha_k}^k \end{bmatrix}$$

on a $l < k$ par (1.9) et, quitte à renuméroter les générateurs et les α_i on a

$$(1.10) \quad \det \begin{bmatrix} \gamma_{\alpha_1}^1 & \cdots & \gamma_{\alpha_1}^l \\ \gamma_{\alpha_l}^1 & \cdots & \gamma_{\alpha_l}^l \end{bmatrix} \neq 0 \quad \text{dans } V.$$

Supposons que $l \geq 1$, il vient donc, par définition du rang

$$(1.11) \quad D_{ij} = \det \begin{bmatrix} \gamma_{\alpha_1}^1 & \cdots & \gamma_{\alpha_1}^l & \gamma_{\alpha_1}^i \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ \gamma_{\alpha_l}^1 & & \gamma_{\alpha_l}^l & \gamma_{\alpha_l}^i \\ \gamma_{\alpha_j}^1 & & \gamma_{\alpha_j}^l & \gamma_{\alpha_j}^i \end{bmatrix} \equiv 0 \quad \text{dans } V, \quad \forall i, \forall j \in [1, \dots, k].$$

On en déduit

$$(1.12) \quad 0 \equiv \sum_{i=1}^k t_i D_{ij} = \det \begin{bmatrix} \gamma_{\alpha_1}^1 & \cdots & \gamma_{\alpha_1}^l & \varepsilon_{\alpha_1} \\ \vdots & & \vdots & \\ \gamma_{\alpha_l}^1 & & \gamma_{\alpha_l}^l & \varepsilon_{\alpha_l} \\ \gamma_{\alpha_j}^1 & \cdots & \gamma_{\alpha_j}^l & \varepsilon_{\alpha_j} \end{bmatrix} \text{ sur } V, \quad \forall j \in [1, \dots, k].$$

Donc développant ce déterminant comme en (1.8) il vient

$$\det \begin{bmatrix} \gamma_{\alpha_1}^1 & \cdots & \gamma_{\alpha_1}^l \\ \vdots & & \vdots \\ \gamma_{\alpha_l}^1 & \cdots & \gamma_{\alpha_l}^l \end{bmatrix} \varepsilon_{\alpha_j} = \sum_{i=1}^l \lambda_{\alpha}^i \varepsilon_{\alpha_i} \text{ sur } V$$

prenant $\alpha_j = \alpha_{l+1} = \alpha$ on conclut comme pour (1.9) que

$$\det \begin{bmatrix} \gamma_{\alpha_1}^1 & \cdots & \gamma_{\alpha_1}^l \\ \vdots & & \vdots \\ \gamma_{\alpha_l}^1 & \cdots & \gamma_{\alpha_l}^l \end{bmatrix} \equiv 0 \text{ sur } V$$

ce qui contredit (1.10) donc le rang l est égal à 0 et donc

$$(1.13) \quad l = 0 \Leftrightarrow \gamma_{\alpha_j}^i \equiv 0 \text{ sur } V, \quad \forall i, j \in [1, \dots, k].$$

Mais alors portant (1.13) dans (1.6) on obtient que $\varepsilon_{\alpha_i} \equiv 0$ sur V ce qui est faux donc contradiction qui prouve qu'il ne peut y avoir un nombre fini de générateurs.

2. Cas du polydisque Δ de $\mathbb{C}^3$. On considère l'idéal engendré dans $H^\infty(\Delta)$ par $z_1 - z_3$ et $z_2 - z_3$. Les vecteurs

$$(2.1) \quad G_\alpha(z) = \begin{bmatrix} \frac{z_2 - z_3}{\left[1 - \alpha \left(\frac{z_1 + z_2 + z_3}{3} \right)\right]^{\frac{1}{2}}} \\ -(z_1 - z_3) \\ \frac{-(z_1 - z_3)}{\left[1 - \alpha \left(\frac{z_1 + z_2 + z_3}{3} \right)\right]^{\frac{1}{2}}} \end{bmatrix}, \quad \forall \alpha \in \mathbf{T},$$

appartiennent au module R des relations de $z_1 - z_3$ et de $z_2 - z_3$ car

$$(2.2) \quad \left| \frac{z_2 - z_3}{\left[1 - \alpha \left(\frac{z_1 + z_2 + z_3}{3} \right)\right]^{\frac{1}{2}}} \right| \leq 2\sqrt{3},$$

de même

$$(2.3) \quad \left| \frac{z_1 - z_3}{\left[1 - \alpha \left(\frac{z_1 + z_2 + z_3}{3} \right) \right]^{1/2}} \right| \leq 2\sqrt{3}.$$

Prouvons (2.2). Notons

$$M = \sup_{\mathbf{B}^3} \left| \frac{z_2 - z_3}{\left[1 - \alpha \left(\frac{z_1 + z_2 + z_3}{3} \right) \right]^{1/2}} \right|.$$

Puisque $\alpha \in \mathbf{T}$, on peut le supposer α égal à 1 quitte à poser $z_i = \bar{\alpha} z'_i$. Par le principe du maximum on a

$$(2.4) \quad M^2 = \sup \left| \frac{(e^{i\theta} - e^{i\phi})^2}{1 - \frac{e^{i\theta} + e^{i\phi} + e^{i\psi}}{3}} \right|.$$

Posons $\beta = \phi - \theta$ il vient

$$(2.5) \quad M^2 = \sup \left| \frac{|1 - e^{i\beta}|^2}{e^{-i\theta} - \frac{1 + e^{i\beta} + e^{i(\psi-\theta)}}{3}} \right|$$

et on peut se limiter à $\beta \in [-\pi, \pi]$.

Voyons le dénominateur D de (2.5), $(1 + e^{i\beta})/2 = e^{i\beta/2} \cos \beta/2$, d'où

$$D = \left| e^{-i\theta} - \frac{1}{3} e^{i(\psi-\theta)} - \frac{2}{3} e^{i\beta/2} \cos \frac{\beta}{2} \right| = \frac{2}{3} \left| e^{i\gamma} \left(\frac{3 + e^{i\delta}}{2} \right) - \cos \frac{\beta}{2} \right|,$$

où on a posé $\gamma = -\theta - \beta/2$ et $\delta = \psi + \pi$ comme $\beta/2 \in [-\pi/2, \pi/2]$, $\cos \beta/2 \geq 0$ d'où

$$D \geq \frac{2}{3} \left[1 - \cos \frac{\beta}{2} \right] = \frac{4}{3} \sin^2 \frac{\beta}{4}.$$

D'autre part, $|1 - e^{i\beta}|^2 = |e^{i\beta/2} - e^{-i\beta/2}|^2 = 4 \sin^2 \frac{\beta}{2} = 16 \sin^2 \frac{\beta}{4} \cos^2 \frac{\beta}{4}$.

Portant dans (2.5) il vient

$$M^2 \leq \sup \frac{16 \sin^2 \frac{\beta}{4} \cos^2 \frac{\beta}{4}}{\frac{4}{3} \sin^2 \frac{\beta}{4}} = 12 \sup \cos^2 \frac{\beta}{4} = 12.$$

D'où la borne $M = 2\sqrt{3}$.

Posons alors $V = \{z_1 = z_2 = z_3\}$ on conclut alors de la même manière que pour le A .

3. Preuve du Theoreme 2. La preuve est analogue. On considère, dans $\mathbf{B} \subset \mathbf{C}^3$, le module R de z_1 et z_2 sur $A^k(\mathbf{B})$ et on a, avec $1 > \delta > \frac{1}{2}$,

$$(3.1) \quad G_\alpha(z) = \begin{pmatrix} z_2(1 - \alpha z_3^2)^{k+\delta-1} \\ -z_1(1 - \alpha z_3^2)^{k+\delta-1} \end{pmatrix} \in R, \quad \forall \alpha \in \mathbf{T},$$

en effet, comme $\frac{1}{2} < \delta < 1$ on vérifie sans peine que $z_i(1 - \alpha z_3^2)^{k+\delta-1}$ est dans $A^k(\mathbf{B})$ pour $i = 1, 2$.

Faisant encore l'hypothèse que R est de type fini sur $A^k(\mathbf{B})$, il vient, comme au paragraphe 1, l'équation

$$(3.2) \quad (1 - \alpha z_3^2)^{k+\delta-1} = \sum_{i=1}^l \gamma_\alpha^i t_i \text{ avec } \gamma_\alpha^i \in A^k(\mathbf{B}), \quad \forall \alpha \in \mathbf{T}.$$

Dérivant k fois cette relation par rapport à z_3 il vient

$$(3.3) \quad P_\alpha(z_3) + \frac{cz_3^k}{(1 - \alpha z_3^2)^{\delta-1}} = \sum_{i=1}^m \gamma_\alpha^i t'_i, \quad \forall \alpha \in \mathbf{T},$$

où $P_\alpha(z_3)$ est une fonction uniformément bornée dans $\mathbf{D}$ par rapport à α , où γ_α^i sont bornées (et même continues) dans $\mathbf{B}$ car ce sont des dérivées de γ_α^i et où les t'_i sont des fonctions holomorphes dans $\mathbf{B}$.

Posant

$$e_\alpha(z) = P_\alpha + \frac{cz_3^k}{(1 - \alpha z_3^2)^{\delta-1}}$$

on est ramené au cas du paragraphe 1, avec m générateurs.

Si l'on fait $\delta = \frac{1}{2}$ on traite le cas des classes Lipchitz.

Pour le polydisque la preuve est identique avec le module de $(z_1 - z_3)$ et de $(z_2 - z_3)$ et comme éléments

$$G_\alpha = \begin{bmatrix} (z_2 - z_3) \left[1 - \alpha \left(\frac{z_1 + z_2 + z_3}{3} \right) \right]^{k+\delta-1} \\ -(z_1 - z_3) \left[1 - \alpha \left(\frac{z_1 + z_2 + z_3}{3} \right) \right]^{k+\delta-1} \end{bmatrix}.$$

REFERENCES

1. W. McVOY et L. A. RUBEL, *Coherence of some rings of functions*, J. Functional Analysis, vol. 21 (1976), pp. 76-87.
2. J. P. ROSAY, *Sur la cohérence de certains anneaux de fonctions*, Illinois J. Math., vol. 21 (1977), pp. 895-897.
3. S. U. CHASE, *Direct products of modules*, Trans. Amer. Math. Soc., vol. 97 (1960), pp. 457-473.

UNIVERSITE DE PARIS - SUD
ORSAY, CEDEX, FRANCE