SUR QUELQUES PROCÉDÉS D'EXTRAPOLATION

PAR

PAUL MALLIAVIN

Introduction

Le but de ce travail est l'étude de divers problèmes d'unicité, relevant de la théorie des moments, de la quasi-analyticité, du prolongement analytique des séries de Dirichlet.

Ces problèmes d'aspects divers, ont été réunis par M. Mandelbrojt, dans une même étude grâce au « *principe des séries adhérentes* » [14].

On se propose de reprendre l'étude de ces problèmes en se plaçant à un point de vue dual. Le principe des séries adhérentes, qui affirme l'unicité du développement en série asymptotique d'une fonction dans une bande, sera remplacé par un résultat sur les ensembles de détermination d'une fonction méromorphe dans le demi-plan.

Ce résultat sera appliqué aux divers problèmes d'unicité étudiés à l'aide d'un procédé unique : on construira à priori une fonction méromorphe dans le demi-plan extrapolar la suite de nombres dont on étudie les propriétés asymptotiques. Les majorations à priori que l'on pourra obtenir sur la fonction extrapolante conduiront aux propriétés asymptotiques des suites étudiées.

Le domaine naturel de ce procédé d'extrapolation est l'algèbre des opérateurs sur un espace de Banach. Ceci permettra d'énoncer la théorie de quasi-analyticité pour ces opérateurs, en englobant dans un même énoncé le théorème d'unicité du type de Denjoy-Carleman, et les inégalités de convexité du type de celles de Hadamard, Gorny, H. Cartan, Kolmogoroff.

Dans le premier chapitre, nous étudions le problème de la caractérisation des ensembles de détermination d'une classe de fonctions méromorphes définies dans le demi-plan.

Ce problème sera une extension du problème d'unicité correspondant pour les fonctions holomorphes posé par Mandelbrojt-Wiener dans [15]. Il sera abordé par une

méthode de dualité inaugurée par Fuchs [6]. Cette méthode de dualité remplacera les problèmes d'unicité par des problèmes d'existence pour l'espace dual. Ces problèmes d'existence ne présenteront pas de difficulté et seront traités en utilisant des méthodes de S. Mandelbrojt [14].

Il conviendra après de traduire les conditions obtenues dans l'espace dual par une condition unique dans l'espace étudié. Ce passage sera réalisé par les méthodes d'analyse fonctionnelle, classiques depuis Banach, utilisant la propriété de Baire. Le résultat d'unicité que l'on obtiendra à la fin du Chapitre I donnera une solution complète du problème de Mandelbrojt-Wiener et une solution partielle du problème plus général qui était posé.

Le résultat obtenu, s'il contiendra dans le cas du problème de Mandelbrojt-Wiener les résultats contenus dans la 3^{ème} partie de la thèse de J. P. Kahane [9], sera difficilement comparable avec ceux-ci dans le cas général.

Dans le Chapitre II on précisera le lien existant entre les différents problèmes d'unicité réunis par S. Mandelbrojt dans [14]. On montrera que ces problèmes de moments, de quasi-analyticité généralisée sur la droite entière et sur la demi-droite, d'approximation uniforme par des polynômes avec une fonction de poids sur la droite entière, d'existence de fonctions holomorphes bornées dans une bande et de développement asymptotique donné sont tous équivalents à un même problème de Watson posé pour le demi-plan.

Cette équivalence entraînera les théorèmes de composition de S. Mandelbrojt. D'autre part, le problème de Watson envisagé sera équivalent au problème d'unicité étudié dans le Chapitre I, et l'application du résultat obtenu dans le Chapitre I donnera des conditions nécessaires et suffisantes résolvant complètement le problème de la quasi-analyticité généralisée sur la droite entière, le problème d'unicité des moments de Stieljes et un énoncé sur l'approximation polynomiale uniforme par rapport à une fonction de poids contenant la condition nécessaire et suffisante de Fuchs [5] sur la fermeture de $\{e^{-t} t^n\}$. Appliqué au problème de la quasi-analyticité sur la demi-droite on obtiendra seulement une condition nécessaire et suffisante sous les hypothèses dans lesquelles s'énonçaient les conditions nécessaires obtenues précédemment avec la méthode des séries adhérentes [14].

Dans le Chapitre III, on se pose le problème suivant : détermination du comportement asymptotique d'une fonction méromorphe à partir de la connaissance de celui-ci sur un ensemble d'unicité. Ce problème qui est une extension de questions traitées par Levinson ([12] chapitre 7) ne sera abordé que dans un cas particulier, dont la solution, après une dualité, conduira à un résultat donnant une majoration

des coefficients d'une série de Dirichlet asymptotique et du même type, quoique beaucoup moins précise que l'inégalité fondamentale de S. Mandelbrojt.

Cette majoration appliquée à l'étude des séries de Dirichlet convergentes permettra d'obtenir le théorème d'Ostrowski [17] sur la détection des singularités au voisinage de l'axe de convergence absolue, et le théorème de S. Mandelbrojt [14] sur le rapport entre l'ordre au sens de Ritt dans une bande et l'ordre dans tout le plan. Ces résultats seront énoncés en substituant à la densité classique de la suite des exposants une densité logarithmique.

Dans le Chapitre IV, on se propose de montrer que les propriétés de quasi-analyticité d'un opérateur opérant sur un espace de Banach dépendent essentiellement de la localisation de son spectre dans le plan complexe.

Le calcul symbolique de Jean Leray [11] permettra d'obtenir facilement des résultats de quasi-analyticité pour les opérateurs elliptiques et hyperboliques à plusieurs variables, à coefficients constants.

Les inégalités de convexité seront énoncées de façon générale pour les normes hilbertiennes. Dans le cas particulier de la demi-droite une étude sera entreprise dans $L_\infty(0, +\infty)$ qui permettra d'améliorer dans certains cas les inégalités de Gorny et H. Cartan [3], [9].

En terminant, je suis heureux de pouvoir exprimer ici ma profonde gratitude à M. Mandelbrojt pour les conseils qu'il m'a prodigués pendant la rédaction de cette thèse, à M. Jean Leray sans les encouragements de qui ce travail n'eut pas été entrepris, à M. Arnaud Denjoy pour le bienveillant intérêt qu'il m'a toujours manifesté.

Ma reconnaissance va également à M. Jean Favard qui m'a fait l'honneur d'accepter de faire partie du jury.

CHAPITRE I

Ensemble d'unicité pour une fonction méromorphe dans le demi-plan

1. Etant donné une fonction $f(z)$ holomorphe dans le demi-plan $x > 0$ ($z = x + iy$), bornée sur les parallèles à l'axe imaginaire, le problème de Mandelbrojt-Wiener, posé dans [15], consiste à majorer la répartition des zéros de $f(z)$ sur l'axe réel connaissant la croissance du maximum du module de $f(z)$ sur les parallèles à oy . Le problème correspondant dans la théorie de fonctions entières peut être traité par la formule de Poisson-Jensen-Nevalinna [16] qui, donnant des résultats très précis, ne conduit pas

à des conditions nécessaires et suffisantes dès que des directions privilégiées de croissance se trouvent fixées. Le problème de Mandelbrojt-Wiener comporte une indétermination qui n'existe pas dans le cas des fonctions entières : en multipliant $f(z)$ par une fonction $g(z)$, méromorphe dans le demi-plan, bornée sur l'axe imaginaire, et de type exponentiel, on obtient un énoncé du problème de Mandelbrojt-Wiener équivalent. Si bien qu'il conviendra de déterminer le comportement asymptotique de $\log |f(z)|$ modulo une expression de la forme $\log |g(z)|$ alors que la résolution du problème correspondant dans la théorie des fonctions entières nécessiterait la détermination exacte du développement asymptotique de $\log |f(z)|$.

2. Notations et énoncé du théorème principal

Nous considérons des suites de nombres réels positifs Λ vérifiant la condition

$$2.01. \quad \underline{\text{borne}} \quad |\lambda - \lambda'| = h > 0 \quad \lambda, \lambda' \in \Lambda, \lambda \neq \lambda'.$$

Nous associons à une telle suite sa *fonction caractéristique* $\lambda(r)$ définie par

$$2.02. \quad \lambda(r) = 2 \sum_{\Lambda_r} \frac{1}{\lambda} \quad \Lambda_r = \{\lambda \in \Lambda; \lambda < r\}.$$

Nous noterons par Ω_A le domaine complémentaire de la réunion des cercles de centre λ et de rayon $\frac{h}{4}$ ($\lambda \in \Lambda$). 2.01. entraîne que

$$\lambda(r) - \lambda(r') < \frac{2}{h} \log \frac{r}{r'} + o(1) \quad (r > r').$$

2.03. Etant donné une fonction $f(z)$ méromorphe dans le demi-plan $x > 0$, nous noterons par $f^{-1}(a) = \{z; f(z) = a\}$. En particulier, $f^{-1}(\infty)$ désignera l'ensemble des pôles de $f(z)$. D'autre part, $f(\Lambda)$ désignera l'ensemble des valeurs de $f(z)$ sur Λ .

2.04. Etant donné une fonction $k(r)$ définie sur $(0, +\infty)$, à valeur réelle, nous lui associons les deux fonctions croissantes

$$2.04.1. \quad k^{\cdot}(r) = \overline{\text{borne}}_{r' \leq r} k(r')$$

$$2.04.2. \quad k_{\cdot}(r) = \underline{\text{borne}}_{r' \geq r} k(r').$$

On a

$$+\infty > k^{\cdot}(r) \geq k(r) \geq k_{\cdot}(r) \geq -\infty.$$

$k.(r)$ est la plus grande de toutes les fonctions croissantes qui sont inférieures à $k(r)$. La fonction $k(r)$ sera dite asymptotiquement croissante si

$$2.04.3. \quad \overline{\text{borne}}_r (k(r) - k.(r)) = D < +\infty.$$

2.05. Etant donné une suite $\{M_n\}$ de nombres positifs, nous lui associerons sa *fonction de trace* définie par

$$2.05.1. \quad M(\sigma) = \overline{\text{borne}}_n \{n\sigma - \log M_n\} \quad (+\infty > \sigma > -\infty).$$

$M(\sigma)$ est une fonction croissante de σ , si $M_n > 1$ alors $M(\sigma) \leq 0$ lorsque $\sigma \leq 0$.

Si on a

$$2.05.2. \quad \log M_n = \log M'_n + O(n) \quad |O(n)| \leq An,$$

alors

$$2.05.3. \quad M(\sigma - A) \leq M'(\sigma) \leq M(\sigma + A).$$

Nous définirons la base convexe de la suite $\{\log M_n\}$ comme la plus grande fonction convexe $q(x)$ vérifiant

$$q(n) \leq \log M_n.$$

Nous noterons

$$q(x) = \text{base convexe } \{\log M_n\}.$$

Nous noterons $M_n^c = e^{q(n)}$ la régularisée logarithmique convexe de la suite M_n . Alors 2.05.2. entraîne que

$$2.05.4. \quad q'(x) = q(x) + O(x) \quad |O(x)| \leq Ax.$$

En effet $q(x) - Ax$ est une fonction convexe vérifiant

$$q(n) - An \leq \log M_n - An \leq \log M'_n$$

ce qui entraîne 2.05.4.

Enfin la relation 2.05.1. de définition de $M(\sigma)$ est réciproque dans le sens qu'elle entraîne ([14] page 7)

$$2.05.5. \quad q(x) = \overline{\text{borne}}_\sigma [\sigma x - M(\sigma)].$$

Ces notations étant fixées, énonçons le théorème principal de ce chapitre:

2.1. Soit $f(z)$ une fonction méromorphe dans le demi-plan $x > 0$ et Λ_1, Λ_2 deux suites de nombres réels positifs satisfaisant à 2.01. $\{M_n\}$ une suite de nombres positifs; supposons que

$$2.1.1. \quad f(\Lambda_1) = \{0\}$$

$$2.1.2. \quad f^{-1}(\infty) \subset \Lambda_2$$

$$2.1.3. \quad |f(z)| < M_n \quad \text{avec } z \in \Omega_A, \quad n = [x].$$

Posons

$$2.1.4. \quad k(r) = \lambda_1(r) - \lambda_2(r).$$

2.1.5. *Alors la divergence quelle que soit la constante a de l'intégrale*

$$\int_0^{+\infty} M(k(r) - a) \frac{dr}{r^2} = +\infty$$

entraîne que $f(z) \equiv 0$.

Au contraire, la convergence pour une valeur de b de l'intégrale

$$2.1.6. \quad \int_0^{+\infty} M[k(r) - b] \frac{dr}{r^2} < +\infty$$

entraîne que l'on peut construire une fonction f(z) non identiquement nulle vérifiant 2.1.1., 2.1.2., 2.1.3.

2.1.7. **Corollaire.** *Si k(r) est asymptotiquement croissante, la condition 2.1.5. constitue une condition nécessaire et suffisante d'existence d'une fonction non identiquement nulle satisfaisant à 2.1.1., 2.1.2., et 2.1.3. En particulier tel est le cas lorsque Λ_2 est vide.*

Preuve. La preuve de 2.1.5. se composera de deux parties d'inspiration différente. On commencera d'abord par établir le résultat dans un cas très particulier, puis en s'inspirant d'un travail de Fuchs [6] on caractérisera les multiplicateurs qui permettent de ramener le cas général au cas particulier envisagé précédemment. Cette méthode de dualité conduira à une condition dépendant d'une fonction arbitraire.

On éliminera ensuite cette fonction arbitraire à l'aide d'un lemme taubérien qui sera démontré en utilisant le principe de Baire appliqué à une fonctionnelle définie sur un espace de Banach convenablement choisi.

La preuve de 2.1.6. et du corollaire 2.1.7. ensuite abordée sera très facilement traitée.

Démontrons d'abord le cas très particulier suivant du théorème 2.1.

3. *Soit f(z) une fonction satisfaisant aux hypothèses du théorème 2. Supposons de plus qu'avec les notations de ce théorème on ait*

$$3.1.1. \quad \Lambda_1 = \{2nh\}, \quad n \text{ parcourant la suite des entiers positifs.}$$

$$3.1.2. \quad \Lambda_2 \text{ est vide.}$$

Alors, si 2.1.5. a lieu, f(z) $\equiv$ 0.

Preuve. 3.1.1. et 3.1.2. impliquent que la fonction

$$g(z) = \frac{f(z)}{\sin\left(\frac{\pi}{2h}z\right)}$$

est holomorphe dans le demi-plan. De plus, 2.1.3. entraîne que

3.1.3. $|g(z)| < M_n e^{-\frac{\pi}{2h}|y|} \quad n = [x].$

Posons

$$h(u) = \int_{-i\infty}^{+i\infty} \frac{g(z)}{(z+1)^2} e^{-zu} dz.$$

Alors 3.1.3. implique que $h(u)$ est une fonction holomorphe dans la bande

$$|w| < \frac{\pi}{2h} \quad (u = v + iw).$$

On a d'autre part

$$|h(v + iw)| = \left| \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{g^{(n+iy)}}{(n+iy+1)^2} e^{-(n+iy)(v+iw)} dy \right| < M_n e^{-nv} \quad (n = 1, 2, \dots).$$

$h(u)$ satisfait ainsi dans une bande de largeur $\frac{\pi}{2h}$ aux inégalités du problème de Watson. La divergence de

3.1.4.
$$\int_0^{+\infty} M\left(\frac{\sigma}{h}\right) e^{-\sigma} d\sigma = +\infty$$

entraînerait ([14] page 28) que $h(u)$ et par suite $g(z)$, transformée de Laplace de $h(u)$, soient identiquement nulles, ainsi que $f(z)$.

Comparons 3.1.4. et 2.1.5. On a $k(r) = \frac{1}{h} \log r + O(1)$. 2.1.5. s'écrit alors

$$\int_0^{+\infty} M\left(\frac{1}{h} \log r - a\right) \frac{dr}{r^2} = +\infty$$

le changement de variable $r = e^{\sigma+h a}$ nous fait obtenir 3.1.4. La proposition 3.1. est ainsi établie.

Nous allons examiner maintenant le cas où Λ_1 est toujours donné par 3.1.1. mais où Λ_2 est non vide. On se ramènera au cas envisagé dans la proposition 3.1. en multipliant $f(z)$ par des fonctions nulles sur Λ_2 . Il sera utile de commencer par énoncer certains lemmes d'existence de tels multiplicateurs.

3.2. Soit Λ une suite de nombres positifs vérifiant 2.01. alors il existe une fonction $L(z)$, holomorphe dans le demi-plan $x > 0$, telle que

$$3.2.1. \quad L(\Lambda) = \{0\}$$

$$3.2.2. \quad \log |L(z)| = x \lambda(r) + O(x) \quad z \in \Omega_\Lambda.$$

Preuve. Posons

$$3.2.3. \quad L(z) = \prod_{\lambda \in \Lambda} \frac{(1 - z/\lambda)}{(1 + z/\lambda)} e^{2z/\lambda}.$$

3.2.1. est immédiatement vérifié. 3.2.2. se trouve démontré dans [14] page 126.

Pour passer d'une majoration donnée sur les demi-cercles de centre O et de rayon r à une majoration sur les parallèles à l'axe imaginaire, on utilisera le lemme suivant :

3.3. Soit $\{B_n\}$ une suite de nombres positifs, $B(\sigma)$ la fonction de trace de cette suite, Λ une suite de nombres positifs vérifiant 2.01., alors si

$$3.3.1. \quad \int_0^{+\infty} B[\lambda(r)] \frac{dr}{r^2} < +\infty$$

il existe une fonction $G(z)$ non identiquement nulle, holomorphe dans le demi-plan $x > 0$, telle que

$$3.3.2. \quad G(\Lambda) = \{0\}$$

$$3.3.3. \quad |G(n + iy)| < B_n$$

$$3.3.4. \quad \frac{1}{r} \log |G(r e^{i\Theta})| = \cos \Theta \lambda(r) + O(1) \quad z \in \Omega_\Lambda$$

dans tout angle $|\Theta| \leq \Theta_0 < \frac{\pi}{2}$.

Preuve. [14] page 129.

Nous sommes maintenant en mesure d'appliquer la méthode des multiplicateurs. On a la proposition suivante :

3.4. Soit $f(z)$ une fonction méromorphe dans le demi-plan $x > 0$ non identiquement nulle, satisfaisant aux hypothèses du théorème 2. Supposons de plus que Λ_1 soit donné par 3.1.1., alors, quelle que soit la suite de nombres positifs $\{B_n\}$ vérifiant 3.3.1. avec $\lambda(r) = \lambda_2(r)$, on a

$$3.4.1. \quad \int_0^{+\infty} \frac{1}{\text{borne}} \left[\frac{n}{h} \log r - \log M_n B_n \right] \frac{dr}{r^2} < +\infty.$$

Preuve. Soit $G(z)$ la fonction associée par le lemme 3.3. à la suite $\{B_n\}$. $f(z)G(z)$ est une fonction holomorphe satisfaisant aux conditions de la proposition 3.1. et non identiquement nulle. Alors en vertu de 3.1.4. la suite $\{M_n B_n\}$ vérifie 3.4.1.

La proposition 3.4. ramène par une sorte de dualité l'étude des propriétés asymptotiques de $f(z)$ à l'étude des propriétés asymptotiques de certaines suites $\{B_n\}$ de nombres positifs. Il sera plus commode dans la suite de remplacer la suite arbitraire $\{B_n\}$ par une « fonction d'indice » arbitraire, ce sera l'objet du lemme d'existence suivant :

3.5. Soit $n(r)$ une fonction définie sur $(1, +\infty)$, à valeurs positives, entières, croissantes, telle que

$$3.5.1. \quad \int_1^{+\infty} n(r) \frac{dr}{r^2} < +\infty.$$

Soit $\lambda(r)$ la fonction croissante définie par 2.02. Alors il existe une suite $\{B_n\}$ de nombres positifs telle que l'on ait, sauf sur un ensemble dénombrable,

$$3.5.2. \quad \overline{\text{borne}}_p [p \lambda(r) - \log B_p] = n(r) \lambda(r) - \log B_{n(r)} = B(\lambda(r)).$$

et telle que 3.3.1. soit vérifié.

Preuve. L'existence d'une suite $\{B_n\}$ vérifiant 3.5.2. résulterait par le changement de variable $\sigma = \lambda(r)$ de [14] page 18. 3.3.1. serait ensuite obtenu en appliquant [14] page 29.

Pour faciliter la lecture de ce travail, nous allons toutefois donner une démonstration directe de ce lemme, nous inspirant des résultats ci-dessus rappelés.

Soit $n^*(r)$, la fonction continue à droite égale à $n(r)$ sauf peut-être sur un ensemble dénombrable. Posons

$$3.5.3. \quad \log B_{n^*(r)} = \int_0^r \lambda(\xi) d n^*(\xi).$$

Deux valeurs r et r' telles que $n^*(r) = n^*(r')$ conduiront à la même valeur de $B_{n^*(r)}$ en vertu de la continuité à droite de $n^*(r)$. S'il n'existe aucune valeur de r telle $n = n^*(r)$, nous poserons $\log B_n = +\infty$.

Evaluons la différence

$$D = n^*(r) \lambda(r) - \log B_{n^*(r)} - [n^*(r') \lambda(r) - \log B_{n^*(r')}]$$

et montrons qu'elle est positive ou nulle quel que soit r' . On a, en effet, en vertu de 3.5.3.,

$$D = \lambda(r) [n(r) - n(r')] - \int_{r'}^r \lambda(\xi) dn(\xi)$$

ou, par l'application de la formule de la moyenne en tenant compte que $\lambda(r)$ est croissante,

$$D = [\lambda(r) - \Theta] [n(r) - n(r')] \quad \Theta \in (\lambda(r), \lambda(r'))$$

ce qui entraîne que $D \geq 0$ quel que soit r' .

On a donc

$$\overline{\lim}_p [p\lambda(r) - \log B_p] = n(r)\lambda(r) - \log B_{n(r)}$$

Or $n(r) = n(r)$ sauf sur un ensemble dénombrable, 3.5.2. est ainsi établi. Enfin on a

$$B[\lambda(r)] = n(r)\lambda(r) - \log B_{n(r)} = n(r)\lambda(r) - \int_0^r \lambda(\xi) dn(\xi) = \int_0^r n(\xi) d\lambda(\xi).$$

Calculons

$$I = \int_0^{+\infty} B[\lambda(r)] \frac{dr}{r^2} = \int_0^{+\infty} \frac{dr}{r^2} \int_0^r n(\xi) d\lambda(\xi).$$

En intégrant par parties on obtient

$$I < \int_0^{+\infty} n(t) \frac{d\lambda(t)}{t} < \sum_p \frac{n(p+1)}{p} \int_p^{p+1} d\lambda(t).$$

Or d'après 2.01 la seconde intégrale est inférieure à $\frac{1}{p} \left(\left[\frac{1}{h} \right] + 1 \right)$. On obtient

$$I < \left(\left[\frac{1}{h} \right] + 1 \right) \sum_p \frac{n(p+1)}{p^2} < \left(\left[\frac{1}{h} \right] + 1 \right) \int_1^{+\infty} \frac{n(t+2)}{t^2} dt$$

intégrale convergente d'après 3.5.1. et 3.3.1. est ainsi établi.

Ce lemme d'existence étant établi on peut transformer la proposition 3.4. en :

3.6. Soit $f(z)$ une fonction méromorphe, non identiquement nulle satisfaisant aux hypothèses du théorème 2 et supposons de plus que Λ_1 soit donné par 3.1.1. Alors quelle que soit la fonction $n(r)$, définie sur $(1, +\infty)$, à valeurs positives entières, croissantes, vérifiant 3.5.1., $k(r)$ étant donné par 2.1.4.

3.6.1. $\lim_{R \rightarrow \infty} \int_1^R (n(r)k(r) - \log M_{n(r)}) \frac{dr}{r^2}$ existe et est inférieure à $+\infty$.

Preuve. Soit $\{B_n\}$ la suite de nombres positifs associée aux fonctions $n(r)$ et $\lambda_2(r)$ par le lemme 3.5. $\{B_n\}$ vérifiera les hypothèses de la proposition 3.4. et l'on aura, d'après 3.4.1., si

$$P(r) = \overline{\text{borne}} \left[\frac{n}{h} \log r - \log M_n - \log B_n \right],$$

3.6.2.

$$\int P(r) \frac{dr}{r^2} < +\infty.$$

D'autre part, étant donné le choix de Λ_1 par 3.1.1. on a

$$k(r) = \frac{1}{h} \log r - \lambda_2(r) + O(1)$$

$$\frac{n(r)}{h} \log r - \log M_{n(r)} - \log B_{n(r)} \geq n(r) k(r) - \log M_{n(r)} + [n(r) \lambda_2(r) - \log B_{n(r)} - A n(r)]$$

ou, en tenant compte de 3.6.2. et de 3.5.2.,

$$n(r) k(r) - \log M_{n(r)} \leq P(r) - B[\lambda(r)] + A n(r).$$

Les trois fonctions intervenant dans le second membre sont sommables sur $(1, +\infty)$ par rapport à la mesure $\frac{dr}{r^2}$. Il en résulte que 3.6.1. converge vers une limite inférieure à $+\infty$ qui peut être éventuellement $-\infty$.

Il conviendra, avant d'aborder la partie taubérienne, de démontrer les inégalités de convexité suivantes pour la suite $\{M_n\}$:

3.7.1. Si $k(r)$ est asymptotiquement croissante, il existe une suite $\Lambda' \subset \Lambda_1$ telle que

3.7.2.
$$k'(r) = \lambda'(r) - \lambda_2(r) = O(1).$$

Preuve. Si $k(r)$ restait bornée supérieurement sur $(1, +\infty)$ il serait alors borné inférieurement et en prenant

$$\Lambda' = \Lambda_1$$

on satisfait à 3.7.2.

Nous construirons, dans le cas où $k(r) \rightarrow \infty$, la suite $\Lambda' \subset \Lambda_1$ de la manière suivante.

Rangeons la suite Λ_1 en ordre croissant $\lambda_1, \lambda_2, \dots$, soit λ_p , le plus petit élément de Λ_1 qui soit supérieur à 1. Nous prendrons λ_{p+1} comme premier élément de la suite Λ' . Celle-ci sera ensuite construite par le procédé récurrent que voici:

Posons
$$\Lambda'_n = \{\lambda \in \Lambda'; \lambda < \lambda_n\}.$$

Supposons Λ'_n construite.

Alors si

$$2 \sum_{\lambda \in \Lambda'_n} \frac{1}{\lambda} - \lambda_2(\lambda_n) < 2 - \frac{2}{\lambda_n} + D,$$

où D est la constante que définit 2.04.3.,

nous prendrons $\Lambda'_{n+1} = \lambda_n \cup \Lambda'_n$;

sinon nous poserons $\Lambda'_{n+1} = \Lambda'_n$.

La suite Λ' étant ainsi construite sans ambiguïtés et $k'(r)$ étant défini par 3.7.2., on a

$$k'(r) < 2 + D.$$

Désignons par $\lambda_{q(r)}$ le plus grand des éléments de la suite Λ_1 , au plus égal à r et n'appartenant pas à Λ' .

On a alors

$$k'(\lambda_{q(r)}) > D + 2 - \frac{2}{\lambda_{q(r)}} > D.$$

Dans l'intervalle $(\lambda_{q(r)}, r)$ tous les éléments de la suite Λ_1 appartiennent à Λ' .

On a par suite

$$k(r) - k(\lambda_{q(r)} + 0) = k'(r) - k'(\lambda_{q(r)} + 0).$$

Si

$$k'(r) < 0$$

on aurait

$$k(r) - k(\lambda_{q(r)} + 0) < -D,$$

or

$$k. [\lambda_{q(r)}] = \frac{\text{borne}}{r' \geq r} k(r') < k(r)$$

d'où

$$k(\lambda_{q(r)}) - k.(\lambda_{q(r)}) > D$$

ce qui contredirait 2.04.3. $k'(r)$ vérifie 3.7.2. et le lemme est démontré.

3.7.3. Si $k(r)$ est asymptotiquement croissante et si Ω_{Λ_1} contient toutes les droites $x = n$ ($n = 1, 2, \dots$) alors, en désignant par M_n^c la régularisée logarithmique convexe de la suite $\{M_n\}$, il existe une constante B , ne dépendant que des suites Λ_1 et Λ_2 telles que les inégalités 2.1.3. entraînent

$$|f(z)| < B^n M_{n+1}^c \quad z \in \Omega_{\Lambda_1} \quad n = [x]$$

Preuve. Soit Λ' la suite construite par le lemme 3.7.1., $L'(z)$ et $L_2(z)$ les fonctions associées à ces deux suites par 3.2., $g(z) = \frac{L_2(z)}{L'(z)} f(z)$ est une fonction holomorphe dans le demi-plan. D'autre part, d'après 3.2.2. et 3.7.2.,

$$3.7.3.1. \quad \frac{L_2(z)}{L'(z)} < B^z \quad z \in \Omega_{\Lambda}, \quad h \leq 1$$

$$3.7.3.2. \quad \frac{L_2(z)}{L'(z)} > B^{-z} \quad z \in \Omega_{\Lambda}.$$

3.7.3.1. et 2.1.3. entraînent que $g(z)$ est borné dans toute bande verticale. Posons

$$\begin{aligned} \beta_n &= \overline{\text{borne}} \log |g(z)| \quad [x] = n \\ \beta'_n &= \overline{\text{borne}} \log |g(z)| \quad [x] = n \text{ et } z \in \Omega_{\Lambda}, \\ \beta''_n &= \overline{\text{borne}} \log |g(z)| \quad [x] = n, \quad z \in \Omega_{\Lambda}, \text{ et } z \in \Omega_{\Lambda}. \end{aligned}$$

Du théorème des trois cercles d'Hadamard il résulte que β_n est une fonction convexe de n . De l'hypothèse contenue sur Ω_{Λ} dans 3.7.3. résulte que $\beta'_n = \beta_n$.

D'autre part on a

$$\begin{aligned} \beta''_n &\leq \beta'_n \leq \sup [\beta''_n; \max |g(z)|, \quad z \in \Omega_{\Lambda}, \quad [x] = n, \quad |z - n| < \frac{1}{4}, \text{ ou } |z - n - 1| < \frac{1}{4}] \\ \beta''_n &\leq \beta'_n \leq \sup [\beta''_{n-1}; \beta''_n; \beta''_{n+1}] \end{aligned}$$

ou, en prenant les régularisées convexes,

$$3.7.3.3. \quad \beta''_n{}^c \leq \beta'_n \leq \beta''_{n+1}{}^c.$$

Posons maintenant

$$\gamma_n = \overline{\text{borne}} \log |f(z)| \quad z \in \Omega_{\Lambda}, \quad [x] = n.$$

3.7.3.1. et 3.7.3.2. impliquent que

$$3.7.3.4. \quad \beta'_n + n \log B \geq \gamma_n \geq \beta''_n - n \log B.$$

La seconde inégalité donne

$$\gamma_n^c \geq \beta''_n{}^c - n \log B.$$

En tenant compte de 3.7.3.3.

$$\gamma_n^c > \beta'_{n-1} - n \log B.$$

Puis, en appliquant la première inégalité de 3.7.3.4.,

$$\gamma_n^c > \gamma_{n-1} - 2n \log B.$$

D'autre part 2.1.3. entraîne que $\log M_n \geq \gamma_n$ d'où $\log M_n^c + 2n \log B \geq \gamma_{n-1}$ ce qui établit 3.7.3.

Nous allons utiliser le lemme de convexité pour démontrer la proposition suivante :

3.8. *Les hypothèses étant celles de la proposition 3.6., étant supposé de plus que $k(r)$ est asymptotiquement croissante et que Ω_{Λ_1} contienne toutes les droites $x=n$, 3.6.1. vaut encore lorsque l'on remplace M_n par sa régularisée convexe logarithmique M_n^c .*

Preuve. D'après 3.7.4. les inégalités 2.1.3. valent, la suite M_n étant remplacée par $M_n^c B^n$. Considérons la fonction méromorphe

$$f_1(z) = B^{-z-1} f(z+1).$$

Elle satisfait aux hypothèses du théorème 2.

$$|f_1(z)| < M_n^c \quad z \in \Omega_{\Lambda_1-1} \quad n = [x].$$

En appliquant à $f_1(z)$ la proposition 3.6. on obtient que 3.6.1. vaut lorsque M_n est remplacé par M_n^c .

Nous sommes maintenant en mesure d'aborder la deuxième partie de la démonstration du théorème 2 fondée sur le lemme taubérien suivant:

4. Soit $\log M_n$ une suite convexe croissante, $k(r)$ une fonction asymptotiquement croissante, telle que

$$4.01. \quad k(r) = O(\log r).$$

Supposons que quelle que soit la fonction $n(r)$ à valeurs entières croissante, vérifiant

$$4.02. \quad \int_1^{+\infty} n(r) \frac{dr}{r^2} < +\infty,$$

$$4.03. \quad \lim_{R \rightarrow \infty} \int_1^R [n(r)k(r) - \log M_{n(r)}] \frac{dr}{r^2}$$

existe et soit inférieure à $+\infty$, alors il existe une constante $a > 0$ telle que

$$4.04. \quad \int_1^{+\infty} M[k(r) - a] \frac{dr}{r^2} < +\infty$$

où $M(\sigma)$ est donnée par 2.05.

Preuve. On commencera par montrer que la convergence de l'intégrale 4.03. a lieu, en quelque sorte, de façon uniforme, lorsque la fonction $n(r)$ varie, en vérifiant 4.02. Pour préciser cette notion, il conviendra d'introduire un espace de Banach pour les fonctions d'indice et de donner à cette fonction d'indice toute valeur réelle. On aura le lemme suivant:

4.1. Les hypothèses étant celles du lemme 4, désignons par $q(x)$ la base convexe définie en 2.05. de la suite $\log M_n$. Soit $x(r)$ une fonction positive, croissante, telle que

$$4.1.1. \quad \int_1^{+\infty} x(r) \frac{dr}{r^2} < +\infty.$$

Alors

$$4.1.2. \quad \lim_{R \rightarrow \infty} \int_1^R [x(r)k(r) - q[x(r)]] \frac{dr}{r^2} = I$$

existe et est inférieure à $+\infty$.

Preuve. Posons $n(r) = [x(r)]$, on a, en vertu de la convexité de $q(x)$,

$$I < \int_1^{+\infty} [n(r)k(r) - q[n(r)]] \frac{dr}{r^2} + \int_1^{+\infty} k(r) \frac{dr}{r^2}.$$

La première intégrale du dernier membre converge, d'après 4.03., la seconde en vertu de 4.01. - 4.1.2. est ainsi établi.

L'espace de Banach des indices sera introduit par le lemme suivant:

4.2. E désignera l'espace de Banach réel constitué par les mesures de Radon μ dont le support est contenu sur la demi-droite ouverte $(1, +\infty)$ et qui vérifient

$$4.2.1. \quad \|\mu\| = \int_1^{+\infty} \frac{|d\mu(t)|}{t} < +\infty.$$

E_+ désignera la partie de E constituée par les mesures positives. Au tout point $\mu \in E_+$ on associe la fonction croissante

$$x(r) = \int_1^r d\mu(t)$$

et le nombre réel

$$4.2.2. \quad l(\mu) = \int_1^{+\infty} [x(r)k(r) - q[x(r)]] \frac{dr}{r^2}.$$

On a alors

$$4.2.3. \quad x(r) = o(r)$$

$$4.2.4. \quad \int_1^{+\infty} x(r) \frac{dr}{r^2} = \int_1^{+\infty} \frac{d\mu(t)}{t} = \|\mu\|$$

$$4.2.5. \quad l(\mu) < +\infty \text{ pour tout } \mu \in E_+.$$

4.2.6. *Il existe une suite de fonctionnelles définies sur E_+ et continues pour la topologie induite sur E_+ par la norme 4.2.1. telle que*

$$\lim_p l_p(\mu) = l(\mu) \quad \mu \in E_+.$$

Preuve. Evaluons

$$\frac{x(r)}{r} = \frac{1}{r} \int_1^r d\mu(t) < \frac{r'}{r} \int_1^{r'} \frac{d\mu(t)}{t} + \int_{r'}^r \frac{d\mu(t)}{t} < \frac{r'}{r} \|\mu\| + \int_{r'}^{+\infty} \frac{d\mu(t)}{t}.$$

r étant choisi assez grand on peut choisir r' de telle sorte que $\frac{r'}{r} < \varepsilon$ et que

$$\int_{r'}^{+\infty} \frac{d\mu(t)}{t} < \varepsilon$$

ce qui établit 4.2.3.

Intégrons par parties le premier membre de 4.2.4.

$$\int_1^R x(r) \frac{dr}{r^2} = -\frac{x(r)}{r} \Big|_1^R + \int_1^R \frac{d\mu(t)}{t}.$$

Comme $\frac{x(r)}{r} \rightarrow 0$, en vertu de 4.2.3., on obtient 4.2.4. 4.2.5. résulte de 4.1.2. et de 4.2.4.

Pour démontrer 4.2.6. posons

$$l_p(\mu) = \int_1^p [x(r)k(r) - q[x(r)]] \frac{dr}{r^2}.$$

Lorsque $\|\mu_n - \mu\| \rightarrow 0$ on a uniformément sur tout intervalle borné $|x_n(r) - x(r)| \rightarrow 0$ et $q(x)$ étant une fonction continue de x , $l_p(\mu_n) \rightarrow l_p(\mu)$, $l_p(\mu)$ est ainsi une fonction continue sur E_+ . D'autre part, 3.6.1. implique que $l(\mu) = \lim_p l_p(\mu)$.

Nous sommes maintenant en mesure de démontrer que la convergence de l'intégrale 4.03. est uniforme lorsque la fonction d'indice varie. De manière précise, on a le lemme suivant:

4.3. *Il existe deux constantes A et $B > 0$ et un nombre $\varepsilon > 0$ tels que pour toute fonction positive croissante $x(r)$, vérifiant*

$$4.3.1. \quad \int_1^{+\infty} x(r) \frac{dr}{r^2} < \varepsilon,$$

on ait

$$4.3.2. \quad \int_1^{+\infty} [x(r)k(r) - q(x(r) + A)] \frac{dr}{r^2} < B < +\infty.$$

Preuve. La preuve utilise un théorème général de DENJOY ([4] page 199). Nous allons toutefois indiquer une démonstration se suffisant à elle-même.

Soit $l(\mu)$ la fonctionnelle définie sur E_+ par 4.2.2.

Désignons par

$$O_B = \{\mu \in E_+; l(\mu) > B\}.$$

O_B est une intersection dénombrable de parties ouvertes de E_+ . En effet

$$O_B = \bigcap_n \left\{ \bigcup_{p > n} \{\mu \in E_+; l_p(\mu) > B\} \right\}$$

où $l_p(\mu)$ désigne la suite de fonctionnelles continues convergeant vers $l(\mu)$ introduite en 4.2.6.

Si O_B était dense dans E_+ quel que soit B , O_B étant une intersection dénombrable d'ouverts serait un résiduel de l'espace métrique complet E_+ . Par suite, l'intersection de tous les O_B serait non vide, ce qui contredirait 4.2.5. Il existe donc un nombre B et une partie ouverte Γ de E_+ telle que

4.3.3. $\mu \in \Gamma$ entraîne que $l(\mu) < B$.

Désignons maintenant par E_+^p la partie de E_+ constituée par les mesures dont le support est contenu dans l'intervalle $(1, p)$. La réunion des E_+^p est dense dans E_+ , il existe donc une valeur de p assez grande telle qu'on puisse trouver μ_0 vérifiant

4.3.4. $\mu_0 \in E_+^p, \mu_0 \in \Gamma$.

Soit $x_0(r)$ la fonction associée à μ_0 . On a

4.3.5.
$$x_0(r) = \int_1^p d\mu_0(t) = A \quad \text{si } r > p.$$

D'autre part, il existe un nombre ε tel que

$$\|\mu_0 - \mu\| < \varepsilon, \quad \mu \in E_+ \quad \text{entraîne } \mu \in \Gamma.$$

En particulier, quel que soit $\nu \in E_+$ vérifiant $\|\nu\| < \varepsilon$ on aura $\mu_0 + \nu \in \Gamma$ ou, en passant aux fonctions associées,

$$\int_1^{+\infty} [(x_0(r) + x(r))k(r) - q(x_0(r) + x(r))] \frac{dr}{r^2} < B$$

quel que soit $x(r)$ vérifiant 4.3.1.

D'autre part, en vertu de la croissance de $q(x)$ et de 4.3.5., on aura

$$q(x(r) + A) \geq q(x_0(r) + x(r)).$$

d'où 4.3.2.

4.4. Lemme. *Il existe deux constantes C, D telles que, quelle que soit la fonction $n(r)$ vérifiant les hypothèses de la proposition 4, on ait*

$$4.4.1. \quad \int_1^{+\infty} [n(r)k(r) - C] - \log M_{n(r)+A} \frac{dr}{r^2} < D < +\infty.$$

Preuve. Considérons la mesure $dn(r)$ comme un élément de E_+ et soit

$$\|n\| = \int_1^{+\infty} n(r) \frac{dr}{r^2}.$$

Soit $\gamma = \frac{\|n\|}{\varepsilon}$ où ε est déterminé par le lemme 4.3.

Si $\gamma < 1$ 4.4.1. résulte de 4.3.2. Si $\gamma > 1$ on aura en vertu de la convexité de $\log M_n$ en posant $x(r) = \frac{n(r)}{\gamma}$

$$\log M_{n(r)+A} = \log M_{\gamma x(r)+A} > \gamma \log M_{x(r)+A} + (1-\gamma) \log M_A.$$

On aura en conséquence

$$\int_1^{+\infty} [n(r)k(r) - \log M_{n(r)+A}] \frac{dr}{r^2} < \gamma \int_1^{+\infty} [x(r)k(r) - \log M_{x(r)+A}] \frac{dr}{r^2} + (1-\gamma) \int_1^{+\infty} \log M_A \frac{dr}{r^2}.$$

Or $x(r)$ satisfait aux conditions du lemme 4.3. En tenant compte de 4.3.2. et en remplaçant γ par son expression en fonction de $n(r)$ on obtient

$$\int_1^{+\infty} [n(r)k(r) - \log M_{n(r)+A}] \frac{dr}{r^2} < D_1 + C \int_1^{+\infty} n(r) \frac{dr}{r^2}$$

ce qui entraîne 4.4.1.

4.5. Lemme. *Soit $k(r)$ une fonction croissante, alors il existe une fonction croissante $p(r)$ telle que*

$$4.5.1. \quad \overline{\text{borne}} [s(k(r) - C) - \log M_s] = p(r)(k(r) - C) - \log M_{p(r)}$$

4.5.2. $p(r) = +\infty$ si et seulement si $\log M_n$ est à croissance linéaire

4.5.3. $p(r) \leq B' < +\infty$ quel que soit r si et seulement si, soit $M_n = +\infty$ pour $n > B$, soit $k(r) < B''$ quel que soit r .

Preuve. Choisissons pour $p(r)$ le plus petit entier vérifiant 4.5.1. Soit $r > r'$ on a

$$\begin{aligned} p(r') [k(r') - c] - \log M_{p(r')} &\geq p(r) (k(r') - c) - \log M_{p(r)} \\ p(r) [k(r) - c] - \log M_{p(r)} &\geq p(r') (k(r) - c) - \log M_{p(r')}. \end{aligned}$$

Additionnons ces deux inégalités, on obtient

$$[p(r) - p(r')] [k(r) - k(r')] \geq 0$$

ce qui entraîne que $p(r)$ est croissante.

Démontrons 4.5.2. Si $p(r) = +\infty$ pour $r > r_0$ ceci implique que la base convexe $q(x)$ de la suite $\log M_n$ ne possède pas de tangente de pente $k(r)$, c'est-à-dire que $q(x)$ est à croissance linéaire pour $x > x_0$.

De même 4.5.3. implique que le point d'abscisse $p(r_0)$, situé sur la base convexe $q(x)$, est le point de contact de toutes les tangentes de pente $k(r)$ avec $r > r_0$. Ceci n'est possible que si, soit $k(r) = B$ quel que soit $r > r_0$, soit que la base $q(x)$ admette le point d'abscisse $p(r_0)$ pour point d'arrêt, ce qui donne $\log M_n = +\infty$ $n > p(r_0)$.

4.6. Preuve de la proposition 4

Soit c la constante introduite dans 4.4.1., $p(r)$ la fonction croissante telle que 4.5.2. soit vérifié. Posons

$$4.6.1. \quad I = \int_1^{+\infty} M(k(r) - c) \frac{dr}{r^2} = \int_1^{+\infty} [p(r) (k(r) - c) - \log M_{p(r)}] \frac{dr}{r^2}.$$

Supposons en premier lieu que $p(r) \rightarrow \infty$ tout en restant fini; soit r_0 choisi de telle sorte que $p(r_0) > A$.

Définissons $p_1(r)$ par

$$4.6.2. \quad \begin{aligned} p(r) &= A + p_1(r) & r \geq r_0 \\ p_1(r) &= 0 & r \leq r_0. \end{aligned}$$

Notons enfin par $n_s(r)$ la fonction définie par

$$4.6.3. \quad \begin{aligned} n_s(r) &= p_1(r) & 0 < r < s \\ n_s(r) &= p_1(s) & r \geq s. \end{aligned}$$

$n_s(r)$ est une fonction croissante d'après 4.5.; elle satisfait de plus à 4.02.

On a alors si $s > r > r_0$

$$(n_s(r) + A) (k(r) - c) - \log M_{n_s(r)+A} \geq 0 \quad \text{en vertu de 4.5.1.}$$

De même, si $r > s$ on a

$$(n_s(r) + A)(k(r) - c) - \log M_{n_s(r)+A} = (n_s(s) + A)(k(r) - c) - \log M_{n_s(s)+A} \geq 0,$$

donc, en posant

$$\varphi_s(r) = n_s(r)(k(r) - c) - \log M_{n_s(r)+A} \geq -A(k(r) - c),$$

$k(r) - c$ est sommable pour la mesure $\frac{dr}{r^2}$ sur $(1, +\infty)$ d'après 4.0.1. D'autre part $n_s(r)$ satisfait aux hypothèses du lemme 4.4. donc, d'après 4.4.1.,

$$4.6.4. \quad \int_1^{+\infty} \varphi_s(r) \frac{dr}{r^2} < D < +\infty.$$

La suite $\{\varphi_s(r)\}$ étant minorée par une fonction sommable et satisfaisant à 4.6.4. on aura

$$4.6.5. \quad \int_1^{+\infty} \lim_s \varphi_s(r) \frac{dr}{r^2} = \int_{r_0}^{+\infty} [p_1(r)k(r) - \log M_{p_1(r)+A}] \frac{dr}{r^2} < D < +\infty.$$

Remarquons enfin que

$$I = \int_1^{r_0} [p(r)(k(r) - c) - \log M_{p(r)}] \frac{dr}{r^2} + \int_{r_0}^{+\infty} A k(r) \frac{dr}{r^2} + \int_{r_0}^{+\infty} [p_1(r)k(r) - \log M_{p_1(r)+A}] \frac{dr}{r^2}$$

d'où 4.6.5. et 4.0.1. impliquent que $I < +\infty$ ce qui établit 4.0.4.

Il reste à examiner les cas exceptionnels où $p(r)$ peut être borné ou infini. Si $p(r)$ est constant pour $r > r_1$ alors 4.0.4. s'écrit

$$\int_{r_1}^{+\infty} [p(r_1)(k(r) - c) - \log M_{p(r_1)}] \frac{dr}{r^2},$$

intégrale convergente.

Si $p(r) = +\infty$ $\log M_n$ croît linéairement d'après 4.5.2. et l'on a pour n assez grand $\log M_n = \alpha n$.

Si $k(r)$ reste borné 4.0.4. sera satisfait dès que l'on aura choisi $a > \sup k(r)$. Si $k(r)$ n'était pas borné on pourrait trouver une fonction $n(r)$ telle que 4.0.2. ait lieu tandis que

$$\int_1^{+\infty} n(r)k(r) \frac{dr}{r^2} = +\infty.$$

4.0.3. s'écrit alors

$$\int_1^{+\infty} [n(r)k(r) - \alpha n(r)] \frac{dr}{r^2} = +\infty$$

ce qui contredirait l'hypothèse 4.0.3.

La proposition 4 se trouve ainsi complètement établie.

5

Démonstration du théorème 2

La démonstration du théorème 2.1. sera d'abord complètement achevée dans le cas particulier où Λ_1 est une suite « d'entiers pairs », où $k(r)$ est asymptotiquement croissante et où Ω_{Λ_1} contient toutes les droites $x=n$ ($n=1, 2, \dots$). Ceci étant, on montrera que la solution du problème posé dans le théorème 2 est équivalente à celle d'un certain problème de Watson. Le résultat particulier antérieur permettra de résoudre complètement ce problème de Watson, dont la solution établira à son tour les deux conclusions du théorème 2.

5.1. *Soit $f(z)$ une fonction méromorphe satisfaisant aux hypothèses du théorème 2. Supposons de plus que Λ_1 soit donnée par 3.1.1., que Ω_{Λ_1} contienne toutes les droites $x=n$, et que $k(r)$ soit asymptotiquement croissante, alors la conclusion 2.1.5. vaut.*

Preuve. Proposition 3.8. combinée avec le lemme taubérien 4.

5.2. *Problème de Watson. Étant donné une suite $\{M'_n\}$ de nombres positifs et une fonction $k'(r)$ positive, on considère les fonctions holomorphes dans le demi-plan non identiquement nulles satisfaisant aux inégalités*

$$5.2.1. \quad |g(z)| < M'_n e^{-x k'(r)} \quad |z|=r, \quad n=[x].$$

Le problème de Watson est de déterminer une relation liant la suite M'_n et la fonction $k'(r)$. Ce problème diffère du problème classique de Watson tel qu'il est traité, par exemple, dans [14], en ce que l'indice n figurant dans 5.2.1. dépend de l'abscisse de z . On a la proposition suivante liant ce problème de Watson au problème de Mandelbrojt-Wiener :

5.3. *Soit $g(z)$ une fonction holomorphe non identiquement nulle satisfaisant à 5.2.1. Supposons de plus que*

$$5.3.1. \quad k'(r) - k'(r') < \frac{1}{h} \log \frac{r}{r'} + O(1) \quad (r > r')$$

et que $k'(r)$ soit asymptotiquement croissante.

Alors il existe une fonction méromorphe $f(z)$ non identiquement nulle satisfaisant aux hypothèses de la proposition 5.1. et telle que l'on ait

$$5.3.2. \quad k(r) = k'(r) + O(1), \quad \text{où } k(r) \text{ est donné par 2.1.4.}$$

$$5.3.3. \quad \log M_n = \log M'_n + O(n).$$

Preuve. Λ_1 désignant la suite des « entiers pairs » $\{2n h\}$ définie par 3.1.1. Nous noterons par Λ' la suite des entiers impairs

$$\Lambda' = \{(2n + 1) h\}.$$

Nous extrayons de la suite Λ' une suite Λ_2 par le procédé suivant :
Le plus petit élément de Λ_2 sera le plus petit élément de Λ' . Posons

$$\Lambda_{2,n} = \{\lambda \in \Lambda_2; \lambda < (2n + 1) h\}.$$

Supposons $\Lambda_{2,n}$ construite, alors si

$$5.3.3.1. \quad 2 \sum_{\lambda \in \Lambda_{2,n}} \frac{1}{\lambda} < \frac{1}{h} \log (2n + 1) h - k' [(2n + 1) h] - \frac{1}{h^2}.$$

Nous prendrons

$$\Lambda_{2,n+1} = (2h + 1) h \cup \Lambda_{2,n}.$$

Sinon, nous poserons

$$\Lambda_{2,n+1} = \Lambda_{2,n}.$$

Ω_{Λ} , définie en 2.02. contient toutes les droites $x = n$. Vérifions que

$$k(r) = \lambda_1(r) - \lambda_2(r) = \frac{1}{h} \log r - \lambda_2(r) + O(1)$$

est égal à $k'(r) + O(1)$.

Montrons d'abord

$$5.3.3.2. \quad \lambda_2(r) > \frac{1}{h} \log r - k'(r) - O(1).$$

Sinon on pourrait construire une suite $r_p \rightarrow \infty$ telle que

$$5.3.3.3. \quad \left[\lambda_2(r_p) - \frac{1}{h} \log r_p + k'(r_p) \right] \rightarrow -\infty.$$

Désignons par $n(r_p)$ le plus grand élément de la suite Λ' inférieur à r_p , tel que 5.3.3.1. ne soit pas vérifié. Alors

$$5.3.3.4. \quad \lambda_2[n(r_p)] > \frac{1}{h} \log n(r_p) - k'[n(r_p)] - \frac{1}{h^2}.$$

Entre $n(r_p)$ et r_p les suites Λ_2 et Λ' coïncident, on a

$$\lambda_2(r_p) = \lambda_2[n(r_p)] + \frac{1}{h} \log \frac{r_p}{n(r_p)} + O(1)$$

ou, en tenant compte de 5.3.3.4.,

$$\lambda_2(r_p) > \frac{1}{h} \log n(r_p) - k'[n(r_p)] + \frac{1}{h} \log \frac{r_p}{n(r_p)} - \frac{1}{h^2}$$

$$\lambda_2(r_p) > \frac{1}{h} \log r_p - k'[n(r_p)] + O(1)$$

en portant dans 5.3.3.3. on obtiendrait

$$[\log r_p - k'[n(r_p)] - \log r_p + k'(r_p)] \rightarrow -\infty$$

ce qui contredirait l'hypothèse que $k'(r)$ est asymptotiquement croissante 5.3.1.

Montrons maintenant que

$$5.3.3.5. \quad \lambda_2(r) < \frac{1}{h} \log r - k'(r) + O(1).$$

Si cette inégalité n'était pas satisfaite il existerait une suite r'_p telle que

$$5.3.3.6. \quad [\lambda_2(r'_p) - \log r'_p + k'(r'_p)] \rightarrow +\infty.$$

Désignons par $m(r'_p)$ le plus petit élément de la suite Λ' supérieur à r'_p tel que

5.3.3.1. soit vérifié. On aura alors

$$5.3.3.7. \quad \lambda_2[m(r'_p)] < \frac{1}{h} \log m(r'_p) - k'[m(r'_p)] + O(1).$$

Dans l'intervalle $(m(r'_p), r'_p)$ ne se trouve aucun élément de la suite Λ_2 . On a donc

$$5.3.3.8. \quad \lambda_2(r'_p) = \lambda_2[m(r'_p)].$$

5.3.3.6., 5.3.3.7., 5.3.3.8. entraîneraient que

$$\left[k'(r'_p) - k'[m(r'_p)] - \frac{1}{h} [\log r'_p - \log m(r'_p)] \right] \rightarrow +\infty$$

contrairement à 5.3.1. On a ainsi établi 5.3.2.

Les suites Λ_1, Λ_2 étant construites comme il est expliqué ci-dessus, construisons les fonctions $L_1(z), L_2(z)$ associées à ces suites par 3.2. et posons

$$f(z) = g(z) \frac{L_1(z)}{L_2(z)}.$$

On a alors, en vertu de 3.2.2. et de 5.2.1. si $z \in \Omega_{\Lambda_1}$,

$$\log |f(z)| \leq \log |g(z)| + x \left[\frac{1}{h} \log r - \lambda_2(r) \right] + O(x)$$

$$\log |f(z)| \leq \log M'_n - x k'(r) + x k(r) + O(x)$$

d'où en vertu de 5.3.4.

$$\log |f(z)| < \log M'_n + O(n)$$

ce qui achève d'établir 5.3.

Nous allons démontrer la proposition inverse suivante :

5.4. Soit $f(z)$ une fonction méromorphe non identiquement nulle satisfaisant aux hypothèses du théorème 2. Alors il existe une fonction holomorphe $g(z)$ satisfaisant aux inégalités 5.2.1., les relations 5.3.2. et 5.3.3. étant vérifiées.

Preuve. Soit Λ_1 et Λ_2 la suite de zéros et de pôles attachés à $f(z)$ par 2.1.1. et 2.1.2., $L_1(z)$ et $L_2(z)$ les fonctions associées à ces suites par 3.2.

Soit

$$g(z) = f(z) \frac{L_2(z)}{L_1(z)}.$$

Alors on aura

$$|g(z)| < M_n e^{-n k(r) + O(n)} \quad n = [x]$$

ce qui établit 5.4.

En résumé, il y a «équivalence» entre le problème de Mandelbrojt-Wiener posé par 2 et le problème de Watson posé par 5.2.

Cette «équivalence» va être précisée par le lemme suivant d'équiconvergence.

5.4.1. *Considérons les intégrales*

$$5.4.2. \quad \int_0^{+\infty} M' [k'(r) - a] \frac{dr}{r^2},$$

$$5.4.3. \quad \int_0^{+\infty} M' [k'(r) - b] \frac{dr}{r^2}.$$

Alors les relations 5.3.2. et 5.3.3. impliquent les propositions suivantes :

5.4.4. *La divergence quel que soit a de l'intégrale 5.4.2. entraîne la divergence quel que soit a de l'intégrale 2.1.5. et réciproquement.*

5.4.5. *La convergence pour une valeur b de l'intégrale 5.4.3. entraîne la convergence pour une valeur b' de l'intégrale 2.1.6. et réciproquement.*

Preuve. Les relations 5.3.2. et 5.3.3. étant symétriques, il nous suffira de démontrer les conclusions ci-dessus dans un seul sens.

5.3.3. implique qu'il existe une constante a_1 , telle que

$$M'(\sigma - a_1) \leq M(\sigma) \leq M'(\sigma + a_1).$$

5.3.2. implique, d'autre part, qu'il existe une constante b_1 telle que

$$k'(r) - b_1 \leq k''(r) \leq k'(r) + b_1$$

$$k(r) - b_1 \leq k'(r) \leq k(r) + b_1.$$

Enfin $M(\sigma)$, $M'(\sigma)$ sont des fonctions croissantes de σ bornées inférieurement ce qui établit avec les inégalités ci-dessus 5.4.4. et 5.4.5.

5.5. Proposition: Soit $g(z)$ une fonction holomorphe dans le demi-plan $x > 0$ satisfaisant aux inégalités 5.2. où $k'(r)$ vérifie 5.3.1.

Conclusions

5.5.1. La divergence quelle que soit la constante $a > 0$ de l'intégrale 5.4.2. entraîne que $g(z) \equiv 0$.

5.5.2. S'il existe une constante b telle que l'intégrale 5.4.3. converge, alors on peut construire une fonction $g(z)$ holomorphe dans le demi-plan, non identiquement nulle satisfaisant aux inégalités 5.2.1.

Preuve. Démontrons la conclusion 5.5.1.

Soit $g(z)$ non identiquement nulle, satisfaisant aux inégalités 5.2.1. Or $k'(r) \geq k''(r)$, $g(z)$ satisfait à fortiori aux inégalités

$$|g(z)| < M'_n e^{-n k'(r)} \quad n = [x]$$

et vérifie alors les hypothèses du lemme 5.3., on peut trouver une fonction $f(z)$ méromorphe satisfaisant aux hypothèses de la proposition 5.1. En vertu de cette proposition, il existerait une intégrale de la famille 2.1.5. qui convergerait, ce qui d'après 5.4.4. entraînerait la convergence d'une intégrale de la famille 5.4.2. contrairement à l'hypothèse 5.5.1.

Pour démontrer 5.5.2. posons $M'[k'(r) - b] = \varphi(r)$. On considérera la fonction holomorphe $g(z)$ déterminée par l'égalité

$$5.5.3. \quad \log |g(z)| = -\frac{4x}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\varphi(t)}{x^2 + (y-t)^2} dt - bx$$

où l'on a posé $\varphi(-t) = \varphi(t)$ lorsque $t < 0$.

$\varphi(t)$ est une fonction croissante puisque $k'(t)$ est croissante. L'intégrale du second membre converge d'après 5.5.2. et représente une fonction harmonique dans le demi-plan $x > 0$.

De plus, $\varphi(t)$ étant positif d'après 2.05., on aura, si $y \geq 0$,

$$\log |g(z)| < -\frac{4x}{\pi} \int_{\gamma}^{+\infty} \frac{\varphi(t)}{x^2 + (y-t)^2} dt - bx < -\varphi(r) - bx$$

d'où

$$\log |g(z)| < - \overline{\text{borne}}_n [n(k'(r) - b) - \log M'_n] - bx$$

en particulier, prenons $n = [x]$ on obtient

$$\log |g(z)| < \log M'_n - x k'(r) \quad [x] = n.$$

$g(z)$ vérifie ainsi les inégalités 5.2.1. La proposition 5.5. se trouve ainsi établie.

5.6. Démonstration du théorème 2 dans le cas général

Soit $f(z)$ une fonction méromorphe satisfaisant aux hypothèses du théorème 2. Alors si les intégrales 2.1.5. divergent quel que soit $a > 0$, $f(z) \equiv 0$; sinon on pourrait trouver, d'après le lemme 5.4., une fonction $g(z)$ holomorphe, non identiquement nulle, vérifiant 5.2.1., les intégrales de la famille 5.4.2. divergeant toutes d'après 5.4.4. ce qui est impossible d'après 5.5.1.

De même, si une intégrale de la famille 2.1.6. converge, ceci entraîne la convergence d'une intégrale de la famille 5.4.3. et, en vertu de 5.5.2., l'existence d'une fonction holomorphe $g(z)$ non identiquement nulle satisfaisant à 5.2.1., fonction qui permettra de construire, d'après 5.3., $f(z)$ non identiquement nulle satisfaisant aux hypothèses du théorème 2.

Remarques sur les conditions d'unicité

Si $k(r)$ est asymptotiquement croissante on a $k'(r) - k(r) = O(1)$, c'est-à-dire qu'en tenant compte du fait que $M(\sigma)$ est une fonction croissante de σ , les deux familles d'intégrales 2.1.5. et 2.1.6. sont équidivergentes. La condition nécessaire et la condition suffisante données par le théorème 2 se réunissent dans ce cas particulier en une seule condition nécessaire et suffisante.

Lorsque Λ_2 est vide, c'est-à-dire lorsque $f(z)$ est supposée holomorphe, $k(r)$ est alors une fonction croissante et le théorème 2 résoud complètement le problème de Mandelbrojt-Wiener tel qu'il a été posé dans [15].

Le problème de Mandelbrojt-Wiener n'est pas modifié lorsqu'on remplace M_n par $\alpha^n M_n$, α étant une constante, et lorsque on ajoute à l'une des deux suites Λ_1, Λ_2 une suite Λ' telle que

$$\sum_{\lambda \in \Lambda'} \frac{1}{\lambda} < +\infty.$$

Ceci ne fait que traduire le fait bien connu qu'il existe des fonctions $g(z)$ holomorphes de type exponentiel dans le demi-plan, bornées sur l'axe réel, telles que $g(\Lambda') = \{0\}$. La multiplication par une telle fonction ne modifie pas la solution du problème de Mandelbrojt-Wiener, qui est posé, comme nous l'avons dit au début de ce chapitre, modulo une indétermination par la multiplication par une telle fonction $g(z)$.

De même si on considère la translation $z \rightarrow z + z_0$ le problème de Mandelbrojt-Wiener n'est pas modifié.

L'effet de ces différentes transformations est de remplacer $M(\sigma)$ par $M(\sigma - c)$ et $k(r)$ par $k(r) + O(1)$, opérations qui laissent invariantes la divergence des familles d'intégrales 2.1.5. et 2.1.6. mais qui ne conserveraient pas la convergence d'une intégrale unique de ces familles.

La situation se simplifie si $k(r)$ est tel qu'à tout $a > 0$ on peut faire correspondre $\varrho > 1$ tel que $k(\varrho r) > k(r) + a$ pour r assez grand. Les intégrales 2.1.5. s'écrivent alors

$$\int_0^{+\infty} M[k(\varrho r)] \frac{dr}{r^2}$$

ou en effectuant le changement de variable $\varrho r = r'$ la divergence de la famille d'intégrales 2.1.5. est équivalente à la divergence de l'intégrale unique

$$5.7.2. \quad \int_0^{+\infty} M[k(r)] \frac{dr}{r^2}.$$

Notons d'autre part par $E_x = \{t; k(t) < x\}$ et soit $K(\sigma)$ la fonction croissante définie par l'égalité

$$\int_0^x K(\sigma) d\sigma = \int_{E_x} \frac{dt}{t^2}.$$

Alors la condition 5.7.2. s'écrit sous la forme

$$5.7.3. \quad \int_0^{+\infty} M(\sigma) K(\sigma) d\sigma = +\infty.$$

En particulier si $k(r) = \log r$ 5.7.3. n'est autre que la condition de Denjoy-Carleman-Ostrowski

$$\int_0^{+\infty} M(\sigma) e^{-\sigma} d\sigma = +\infty.$$

Démontrons pour terminer ce chapitre la proposition suivante:

5.8. Soit $f(z)$ une fonction méromorphe satisfaisant à toutes les hypothèses du théorème 2; sauf la majoration 2.1.3. qui est remplacée par

$$5.8.1. \quad |f(z)| < M_n e^{\frac{\pi}{2} d |y|} \quad n = [x], \quad z \in \Omega_{\Lambda},$$

d étant une constante.

Alors si on pose

$$5.8.2. \quad k_d(r) = \lambda_1(r) - \lambda_2(r) - d \log r :$$

les conclusions du théorème 2 restent valables à condition de remplacer dans celles-ci $k(r)$ par $k_d(r)$.

Preuve. Il suffit d'appliquer le théorème 2 à la fonction méromorphe

$$f_1(z) = \frac{f(z)}{\sin\left(\frac{\pi}{2} dz\right)}.$$

La proposition 5.8. nous sera utilisée, au chapitre II, dans l'étude de la quasi-analyticité sur la demi-droite et plus généralement dans les problèmes d'unicité liés à un opérateur dont le spectre est contenu dans un angle, alors que le théorème 2 ne s'appliquera directement qu'aux opérateurs positifs. Donnons pour terminer une application élémentaire de 5.8.1., l'extension suivante du théorème de Carlson :

5.8.3. *Une condition nécessaire et suffisante pour qu'il existe une fonction holomorphe $f(z)$ satisfaisant aux inégalités 5.8.1. avec $d=1$ et nulle sur les entiers positifs est que la suite $\{M_n\}$ satisfasse à la condition de quasi-analyticité de Denjoy-Carleman.*

CHAPITRE II

Equivalence de divers problèmes d'unicité dans le domaine réel et complexe

6. Nous allons considérer, dans ce chapitre, un certain nombre de problèmes d'unicité qui se posent dans le domaine de la variable réelle : problème des moments de Stieljes et d'Hamburger, fermeture de la suite $\{e^{-t} t^n\}$, problème de quasi-analyticité généralisée sur la demi-droite et la droite entière. Mandelbrojt a traité dans [14] ces questions en les rattachant au principe unique des séries adhérentes. Nous allons préciser ce rapport en montrant que ces problèmes sont équivalents à un même problème de Watson posé dans le demi-plan. Cette démonstration d'équivalence acquise, on obtiendra, d'une part, les théorèmes de composition de Mandelbrojt, d'autre part, l'application du théorème 2 donnera des conditions nécessaires d'unicité qui moyennant une hypothèse supplémentaire seront des conditions nécessaires et suffisantes contenant les résultats actuellement connus sur ces problèmes.

6.1. Nous noterons $W(M_n, k(r))$ le problème de Watson posé dans 5.2. c'est-à-dire la recherche d'une fonction $g(z)$ holomorphe dans le demi-plan, vérifiant

$$6.1.1. \quad |g(z)| < M_n e^{-x k(r)} \quad n = [x].$$

Nous noterons par $U(M_n, k(r))$ la condition suivante :

La famille d'intégrales

$$6.1.2. \quad I_a = \int_0^{+\infty} M(k(r) - a) \frac{dr}{r^2}$$

diverge quelle que soit la constante a .

La proposition 5.2. s'énonce alors :

Si $U(M_n, k(r))$ a lieu le problème $W(M_n, k(r))$ admet pour seule solution la fonction identiquement nulle.

6.1.3. Si de plus $k(r)$ est asymptotiquement croissante, la condition $U(M_n, k(r))$ est une condition nécessaire et suffisante pour que $W(M_n, k(r))$ admette comme seule solution la solution identiquement nulle.

6.2. *Problèmes d'unicité pour les moments de Stieljes.*

Pour qu'il existe une mesure μ non nulle portée par la demi-droite $(0, +\infty)$ vérifiant

$$6.2.1. \quad \int_0^{+\infty} t^n |d\mu(t)| < M_n$$

$$6.2.2. \quad \int_0^{+\infty} t^\lambda d\mu(t) = 0 \quad (\lambda \in \Lambda)$$

où Λ est une suite de nombres réels vérifiant 2.01., il faut et il suffit que le problème de Watson $W(M_n, \lambda(r))$ où $\lambda(r)$ est donné par 2.02. admette une solution non nulle.

Preuve. Si μ est une mesure non identiquement nulle satisfaisant à 6.2.1. et 6.2.2. alors la fonction holomorphe

$$f(z) = \int_0^{+\infty} t^{z-1} d\mu(t)$$

vérifie

$$6.2.3. \quad f(\lambda) = 0 \quad \lambda - 1 \in \Lambda$$

$$6.2.4. \quad |f(n + iy)| < M_n$$

et par suite est une solution du problème de Mandelbrojt-Wiener équivalent d'après 5.4. au problème de Watson envisagé.

Inversement, soit $f(z)$ une fonction holomorphe et dans le demi-plan satisfaisant à 6.2.3. et à 6.2.4.

Posons

$$g(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{f(iy + \frac{1}{2})}{(iy + 1)^2} t^{-iy - \frac{1}{2}} dy.$$

On a alors

$$\frac{f(z)}{(z + \frac{1}{2})^2} = \int_0^{+\infty} g(t) t^{z-1} dt$$

la mesure $g(t) dt$ vérifiera ainsi 6.2.2.

La formule de Cauchy donne, d'autre part, avec 6.2.4.

$$|g(t)| = \left| \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{f(iy + n)}{(iy + n + \frac{1}{2})^2} t^{-iy - n} dy \right| < M_n t^{-n}$$

d'où

$$\int_0^{+\infty} t^n |g(t)| dt < 1 + M_{n+2}$$

et 6.2.1. est ainsi satisfait.

6.3. Problème dual. *L'approximation polynomiale sur la demi-droite au sens de Serge Bernstein.*

Etant donné une fonction $F(t)$ définie sur la demi-droite nous considérons l'espace de Banach $C_F(0, +\infty)$ des fonctions $g(t)$ définies et continues sur $(0, +\infty)$ et telles que

$$6.3.1. \quad \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{g(t)}{F(t)} = 0.$$

$$6.3.2. \quad C_F(0, +\infty) \text{ étant muni de la norme } \|g\|_F = \max_t \left| \frac{g(t)}{F(t)} \right|.$$

Alors étant donné une suite Λ de nombres réels vérifiant 2.01. la variété linéaire engendrée par $t^\lambda (\lambda \in \Lambda)$ est dense dans $C_F(0, +\infty)$ si le problème de Watson $W(M_n, \lambda(r))$, où $M_n = \|t^n\|_F$ et $\lambda(r)$ est donné par 2.02., admet comme seule solution la fonction identiquement nulle. Cette condition devient nécessaire si on suppose de plus que $\log |F(e^\sigma)|$ est une fonction convexe de σ .

Preuve. L'espace dual de $C_F(0, +\infty)$ est l'espace des mesures μ portées par la droite $(0, +\infty)$ et vérifiant

$$6.3.3. \quad \|\mu\|_F = \int_0^{+\infty} |F(t)| |d\mu(t)| < +\infty;$$

$\{t^\lambda\} (\lambda \in \Lambda)$ engendrera une variété dense dans C_F si et seulement si, en posant

6.3.4.
$$\int_0^{+\infty} t^\lambda d\mu(t) = 0 \quad (\lambda \in \Lambda),$$

6.3.4. et 6.3.3. entraînent que $\mu \equiv 0$.

Evaluons

$$\int_0^{+\infty} t^n |d\mu(t)| \leq \max_t \frac{t^n}{|F(t)|} \int_0^{+\infty} F(t) d\mu(t) \leq M_n \|\mu\|_F.$$

Il suffit d'appliquer à μ 6.2. pour obtenir la première partie de 6.3.1.

Inversement s'il existe une solution non nulle du problème de Watson $W(M_n, \lambda(r))$ on peut trouver d'après 6.2. une mesure μ telle que

$$\int_0^{+\infty} t^\lambda d\mu(t) = 0 \quad \lambda \in \Lambda$$

$$\int_0^{+\infty} t^n |d\mu(t)| \leq M_{n+2} = \|t^{n+2}\|_F.$$

Posons

$$A_p = \int_p^{p+1} |d\mu(t)|.$$

On aura alors

$$\overline{\text{borne}}_p A_p p^n \leq \max_t \frac{t^{n+2}}{|F(t)|}$$

relation qui entraîne, d'après 2.05.5.,

$$A_p < \frac{1}{p^2 F(p)}$$

ce qui assure la convergence de 6.3.3.

6.4. Quasi-analyticité généralisée sur la demi-droite.

Étant donnée une suite de nombres positifs $\{M_n\}$ et une suite Λ de nombres entiers, pour qu'il existe une fonction $f(t)$ indéfiniment dérivable, définie sur la demi-droite $(0, +\infty)$, non constante et vérifiant

6.4.1.
$$|f^{(n)}(t)| < M_n \quad 0 < t < +\infty$$

6.4.2.
$$f^{(\lambda)}(0) = 0 \quad \lambda \in \Lambda,$$

il faut et il suffit que le problème de Watson $W(M_n, \lambda(r) - \log r)$ admette une solution non identiquement nulle.

Preuve. Énonçons d'abord le lemme d'extrapolation suivant :

6.4.3. *Étant donné une fonction $f(t)$ indéfiniment dérivable sur $(0, +\infty)$, vérifiant 6.4.1., il existe une fonction $g(z)$ holomorphe dans le demi-plan $x > 0$, vérifiant*

$$6.4.4. \quad g(n) = f^{(n)}(0) \quad (n \geq 1)$$

$$6.4.5. \quad |g(n + \alpha + iy)| < 2^{1-\alpha} \left(\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{1-\alpha} \right) \frac{1}{|\Gamma(-\alpha + iy)|} M_n^{1-\alpha} M_{n+1}^\alpha \quad 1 > \alpha > 0,$$

Preuve. Posons

$$f_n(t) = f(t) - \sum_0^n \frac{f^{(p)}(0)}{p!} t^p$$

$$g_n(z) = \frac{1}{\Gamma(-z)} \int_0^{+\infty} f_n(t) t^{-z-1} dt, \quad n+1 > x > n.$$

$g_n(z)$ est une fonction holomorphe dans la bande verticale où elle est définie. Montrons que $g_n(z)$ et $g_{n-1}(z)$ tendent vers une même limite lorsque z tend respectivement à droite et à gauche vers un point $z_0 = n + iy_0$.

On a en effet, ζ, ζ' désignant deux nombres complexes de partie réelle positive,

$$D = \Gamma(-z_0) \lim_{\substack{\zeta, \zeta' \rightarrow 0 \\ \zeta, \zeta' > 0}} |g_n(z_0 + \zeta) - g_{n-1}(z_0 - \zeta')| = \lim_{\substack{\zeta, \zeta' \rightarrow 0 \\ \zeta, \zeta' > 0}} \left| \int_0^{+\infty} [f_n(t) t^{-\zeta} - f_{n-1}(t) t^{\zeta'}] t^{-z_0-1} dt \right|$$

$$D \leq \lim_{\substack{\zeta, \zeta' \rightarrow 0 \\ \zeta, \zeta' > 0}} \left[\left| \int_0^1 f_n(t) t^{-z_0-1} (t^{-\zeta} - t^{\zeta'}) dt \right| + \left| \int_0^{+\infty} f_{n-1}(t) t^{-z_0-1} (t^{-\zeta} - t^{\zeta'}) dt \right| + \right.$$

$$\left. + \frac{|f^{(n)}(0)|}{n!} \left| \int_0^1 t^{\zeta'-1} dt + \int_1^{+\infty} t^{-\zeta-1} dt \right| \right].$$

Les deux premières intégrales convergent uniformément vers zéro lorsque $\zeta, \zeta' \rightarrow 0$.

Les deux dernières intégrales se calculent explicitement et tendent vers $\frac{\pm 1}{iy_0}$. Cette limite était atteinte uniformément en ζ, ζ' lorsque

$$|y_0| \geq d > 0$$

ce qui entraîne que

$$D = 0 \quad y_0 \neq 0.$$

Etudions ce qui se passe en n . Posons

$$g^+(n) = \lim_{\zeta \rightarrow 0} \frac{1}{\Gamma(-n-\zeta)} \int_0^{+\infty} f_n(t) t^{-n-\zeta-1} dt = \lim_{\zeta \rightarrow 0} \frac{1}{\Gamma(-n-\zeta)} \int_1^{+\infty} \frac{t^{-\zeta-1}}{n!} f^{(n)}(0) dt = f^{(n)}(0).$$

De même

$$g^-(n) = \lim_{\zeta' \rightarrow 0} \frac{1}{\Gamma(-n+\zeta')} \int_0^{+\infty} f_{n-1}(t) t^{-n+\zeta'-1} dt = \lim_{\zeta' \rightarrow 0} \frac{1}{\Gamma(-n+\zeta')} \int_0^1 \frac{t^{\zeta'-1}}{n!} f^{(n)}(0) dt = f^{(n)}(0).$$

Ainsi $g_n(z)$ et $g_{n-1}(z)$ sont deux fonctions holomorphes dans deux bandes contiguës qui sont égales et continues sur la frontière commune à ces deux bandes, elles constituent deux éléments d'une même fonction holomorphe dans la réunion des deux bandes. En opérant de proche en proche on construit ainsi une fonction $g(y)$ holomorphe dans le demi-plan et vérifiant 6.4.4. D'autre part, on a

$$g(n+\alpha+iy) = \frac{1}{\Gamma(-n-\alpha-iy)} \int_0^{+\infty} f_n(t) t^{-n-\alpha-1-iy} dt = \frac{1}{\Gamma(-\alpha-iy)} \int_0^{+\infty} [f^{(n)}(t) - f^{(n)}(0)] t^{-\alpha-1-iy} dt$$

$$|g(n+\alpha+iy)| < \frac{1}{|\Gamma(-\alpha+iy)|} \left[M_{n+1} \int_0^R t^{-\alpha} dt + 2M_n \int_R^{+\infty} t^{-\alpha-1} dt \right].$$

Le minimum de la parenthèse est atteint pour $R = 2 \frac{M_n}{M_{n+1}}$ et donne 6.4.5 ce qui achève d'établir le lemme.

Preuve de 6.4.

Montrons maintenant que s'il existe une fonction indéfiniment dérivable, non identiquement nulle, satisfaisant à 6.4.1. et 6.4.2. alors le problème de Watson $W(M_n, \lambda(r) - \log r)$ admet une solution non identiquement nulle. En effet, soit $g(z)$ la fonction holomorphe construite par le lemme 6.4.3. $g(z)$ vérifie alors, d'après 6.4.4. et 6.4.5.,

$$g(\Lambda) = \{0\}$$

$$6.4.6. \quad |g(n + \frac{1}{2} + iy)| < (|y| + 1) e^{\frac{\pi}{2}|y|} (M_n + M_{n+1}).$$

$g(z)$ ne serait identiquement nulle qu'avec $f(t) - f(0)$.

Donc l'existence de $\frac{g(z)}{z+1}$ satisfaisant à 6.4.5. et à 6.4.6. entraînerait d'après 5.8.

l'existence d'une solution non nulle au problème de Watson $W(M_n + M_{n+1}, \lambda(r) - \log r)$. La translation $z \rightarrow z + 1$ transforme ce problème de Watson dans le problème équivalent $W(M_n, \lambda(r) - \log r)$.

Inversement, supposons que le problème de Watson $W(M_n, \lambda(r) - \log r)$ admette une solution non nulle. Alors il existe d'après 5.8. une fonction holomorphe $g_1(z)$ telle que

$$6.4.7. \quad g_1(\Lambda) = \{0\}$$

$$|g_1(n + \frac{1}{2} + iy)| < M_n e^{\frac{\pi}{2}|y|}.$$

Posons

$$6.4.8. \quad h(z) = \frac{g_1(z) \Gamma(-z)}{(z+1)^3}.$$

Alors on a en vertu de 6.4.7.

$$6.4.9. \quad \log |h(z)| < \log M_n - 3 \log |z+1| - n \log |z| + O(n); \quad z \in \Omega_\Lambda, \quad n = [x].$$

Posons

$$f(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(iy) t^{iy} dy \quad (t \geq 0),$$

on a alors

$$6.4.10. \quad f(t) = \sum_{\Lambda'_{n+\frac{1}{2}}} \alpha_\lambda t^\lambda + \int_{-\infty}^{+\infty} h(iy + n + \frac{1}{2}) t^{n+iy+\frac{1}{2}} dy.$$

En dérivant $n+1$ fois, on obtient

$$|f^{(n+1)}(t)| < \int_{-\infty}^{+\infty} t^{-\frac{1}{2}} |n + \frac{1}{2} + iy| \dots |\frac{1}{2} + iy| |h(n + \frac{1}{2} + iy)| dy$$

d'où, en appliquant 6.4.9.,

$$\log |f^{(n+1)}(t)| < \log M_n + O(n).$$

$f(t)$ satisfait ainsi à la majoration 6.4.2. D'autre part, 6.4.10. entraîne que

$$f^{(\lambda)}(0) = 0 \quad \lambda \in \Lambda.$$

6.5. Quasi-analyticité généralisée sur la droite.

Etant donné une suite de nombres positifs $\{M_n\}$ et une suite d'entiers impairs Λ , pour qu'il existe une fonction indéfiniment dérivable $g(t)$ impaire, non identiquement nulle et vérifiant

$$6.5.1. \quad |g^{(n)}(t)| < M_n \quad (+\infty > t > -\infty)$$

$$6.5.2. \quad g^{(\lambda)}(0) = 0 \quad \lambda \in \Lambda,$$

il faut et il suffit que le problème de Watson $W(M_n, \lambda(r))$ admette une solution non identiquement nulle.

Preuve. Appliquons à la fonction $g(t)$ le résultat 6.4. relatif à la quasi-analyticité sur la demi-droite. A l'origine $g(t)$ a toutes ses dérivées paires nulles, la suite des

dérivées de $f(t)$ nulles à l'origine est la réunion des deux suites $\{2n\}$ et Λ . Appliquons 6.4.3. Il n'existe une fonction $g(t)$ indéfiniment dérivable, non identiquement nulle et satisfaisant à ces conditions que si le problème de Watson

$$W[M_n, (\lambda(r) + \log r) - \log r] \equiv W(M_n, \lambda(r))$$

admet une solution non nulle. Inversement, si ce problème admet une solution non nulle, on peut, d'après 6.4., trouver une fonction $g_1(t)$ définie sur la demi-droite, telle que

$$g_1^{(2p)}(0) = 0, \quad g_1^{(\lambda)}(0) = 0 \quad \lambda \in \Lambda$$

et que 6.4.1. soit satisfait.

En posant

$$g(t) = g_1(t) \quad t > 0$$

$$g(t) = -g_1(-t) \quad t < 0$$

on obtient une fonction impaire définie sur toute la droite et satisfaisant 6.5.1. et 6.5.2.

6.6. Prolongement analytique d'une fonction holomorphe dans une bande.

Etant donné une suite Λ de nombres positifs, rangés en ordre croissant, satisfaisant 2.01., une suite de nombres complexes $\{d_k\}$ et une suite de nombres positifs $\{M_n\}$ il existe une fonction $F(u)$ holomorphe et bornée dans la bande $|w| < \frac{\pi}{2}$ ($u = v + iw$) et satisfaisant aux inégalités

$$6.6.1. \quad |F(u) - \sum_{\lambda_k < p} d_k e^{-\lambda_k u}| < M_p e^{-pv} \quad (+\infty > v > -\infty, \quad p = 1, 2, \dots)$$

si et seulement si le problème de Watson $W(M_n, \log r - \lambda(r))$ admet une solution non identiquement nulle.

Preuve. $F(u)$ satisfaisant aux hypothèses de 6.6. posons

$$6.6.2. \quad F_n(u) = F(u) - \sum_0^{n-1} d_k e^{-\lambda_k u}.$$

On a

$$6.6.3. \quad |F_n(u)| = O(e^{-\lambda_{n-1}v}) \quad v < 0.$$

D'autre part, en appliquant l'inégalité de 6.6.1. et en prenant un entier $p > \lambda_n$ on obtiendra

$$6.6.4. \quad |F_n(u)| = O(e^{-\lambda_n v}) \quad v > 0.$$

Ainsi, si nous posons

$$\int_{-\infty}^{+\infty} F_n(v) e^{zv} dv = g_n(z).$$

Cette intégrale converge dans la bande verticale $\lambda_n > x > \lambda_{n-1}$ et représentera, dans cette bande, une fonction holomorphe. Nous allons montrer que les $g_n(z)$ sont les éléments d'une même fonction méromorphe dans le demi-plan. Fixons-nous y et, ζ, ζ' étant deux nombres complexes de partie réelle positive, étudions la différence

$$D = g_p(\lambda_p + iy - \zeta) - g_{p+1}(\lambda_p + iy + \zeta') \quad \text{lorsque } \zeta, \zeta' \rightarrow 0.$$

$$D = \int_{-\infty}^{+\infty} F_p(\nu) e^{\nu(\lambda_p + iy - \zeta)} d\nu - \int_{-\infty}^{+\infty} F_{p+1}(\nu) e^{\nu(\lambda_p + iy + \zeta')} d\nu.$$

Posons

$$A = \left| \int_{-\infty}^0 F_p(\nu) e^{\nu(\lambda_p + iy)} [e^{-\zeta\nu} - e^{\zeta'\nu}] d\nu \right|$$

$$B = \left| \int_0^{+\infty} F_{p+1}(\nu) e^{\nu(\lambda_p + iy)} [e^{-z\nu} - e^{z'\nu}] d\nu \right|$$

$$C = \int_{-\infty}^0 d_p e^{\nu(iy + \zeta')} d\nu + \int_0^{+\infty} d_p e^{\nu(iy - \zeta)} d\nu = d_p \left(\frac{1}{iy + \zeta'} - \frac{1}{iy - \zeta} \right).$$

D vérifie alors

$$|D| < A + B + |C|.$$

Or les inégalités 6.6.3. et 6.6.4. impliquent que les intégrales A et B convergent uniformément en ζ, ζ' et par suite tendent vers zéro lorsque $\zeta, \zeta' \rightarrow 0$.

Si $y > 0$, C converge de même uniformément vers zéro et les deux fonctions $g_p(z)$ et $g_{p+1}(z)$ sont égales à une même fonction continue sur la frontière commune de leurs deux bandes d'holomorphie, sauf peut-être au point λ_p . $g_p(z)$ et $g_{p+1}(z)$ sont ainsi deux éléments d'une même fonction $g(z)$ holomorphe dans la bande $\lambda_{p+1} > z > \lambda_{p-1}$ sauf en λ_p où elle admet un pôle avec le résidu d_p . De proche en proche, on définit ainsi une fonction $g(z)$ méromorphe dans le demi-plan et ayant ses pôles sur la suite Λ .

Il nous faut maintenant évaluer $g(z)$ sur les parallèles à l'axe imaginaire. Nous ferons cette évaluation en faisant « disparaître » localement les pôles de $g(z)$. De manière précise, soit $E_n = \{\lambda \in \Lambda; |\lambda - n| \leq 1\}$.

Posons

$$P_n(z) = \prod_{\lambda \in E_n} (z + \lambda).$$

Alors $P_n(z)$ est un polynôme de degré au plus égal à $d = \left[\frac{2}{h} \right] + 1$.

Soit maintenant $\varphi(\nu)$ une fonction $(d+1)$ fois continûment différentiable ayant son support sur le segment $(-1, 0)$ et vérifiant

$$|\varphi^{(p)}(\nu)| < 1 \quad p=0, 1, \dots, (d+1).$$

Posons

$$F_1(u) = \int_{-\infty}^{+\infty} F(u-\nu) \varphi(\nu) d\nu = \int_{-1}^0 F(u-\nu) \varphi(\nu) d\nu.$$

Alors $F_1(u)$ satisfait aux inégalités 6.6.1. avec la même suite Λ ,

$$M'_n = 2M_n, \quad d'_k = d_k \int_{-1}^0 e^{+\lambda_k \nu} \varphi(\nu) d\nu.$$

De plus, ces inégalités sont valables sur la bande fermée pour $F_1(u)$ et ses $(d+1)$ premières dérivées.

Si $g_1(z)$ désigne la transformée de Laplace de $F_1(u)$ on a

$$g_1(z) = k(z) g(z)$$

où $k(z)$ est une fonction entière de type exponentiel bornée par 1 dans le demi-plan $x > 0$.

Posons

$$h(z) = P_n(z) g_1(z).$$

Cette relation donne par inversion de la transformée de Laplace

$$H(u) = P_n \left(\frac{d}{du} \right) \star F_1(u).$$

$H(u)$ est une fonction holomorphe et bornée dans la bande satisfaisant à 6.6.1. De plus $H(u)$ a été construit de telle manière que les coefficients d_k , intervenant pour les valeurs de λ_k comprises entre $(n-1, n+1)$, sont nuls.

$$H_{n-1}(u) = H(u) - \sum_{\lambda_k < n-1} d'_k P_n(-\lambda_k) e^{-\lambda_k u}$$

vérifiera donc

$$\begin{aligned} |H_{n-1}(u)| &< M_{n-1} e^{-(n-1)\nu} \\ |H_{n-1}(u)| &< M_{n+1} e^{-(n+1)\nu} \end{aligned} \quad -\infty < \nu < +\infty,$$

inégalités entraînant que

$$|h(n+iy)| = \left| \int_{-\infty}^{+\infty} H_{n-1} \left(\nu + i \frac{\pi}{2} \right) e^{(\nu + i \frac{\pi}{2})(n+iy)} d\nu \right| < e^{-\frac{\pi}{2}|y|} (M_{n-1} + M_{n+1}).$$

Posons

$$\frac{g_1(z)}{(z+1)^d} = g_2(z).$$

Alors

$$|g_2(z)| < e^{-\frac{\pi}{2}|y|} (M_{n-1} + M_{n+1}) \quad n = [x]$$

et

$$g_2^{-1}(\infty) \subset \Lambda_2.$$

L'existence de $g_2(z)$ non identiquement nulle satisfaisant à ces conditions équivaut d'après 5.8. à l'existence d'une solution non nulle au problème de Watson

$$W(M_n, \log r - \lambda(r)).$$

Inversement, si le problème de Watson $W(M_n, \log r - \lambda(r))$ admet une solution non nulle, il existe d'après 5.7. une fonction $g_3(z)$ méromorphe telle que

$$6.6.6. \quad |g_3(z)| < M_n e^{-\frac{\pi}{2}|y|} \quad z \in \Omega_\Lambda$$

et dont les pôles sont contenus dans la suite Λ . Nous poserons

$$F_2(u) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{g_3(z)}{(z+1)^2} e^{-zt} dt.$$

Alors 6.6.6. implique que $F_2(u)$ est une fonction holomorphe et bornée dans la bande $|w| < \frac{\pi}{2}$ et une application de la formule de Cauchy conduit, avec 6.6.6., à 6.6.1. Ce qui achève la démonstration de 6.6.

7.

Théorème de composition

Nous allons démontrer un théorème de composition pour le problème de Watson, théorème qui, avec les propriétés d'équivalence démontrées dans le paragraphe précédent, conduira à une extension des théorèmes de composition sur les fonctions indéfiniment différentiables de Mandelbrojt [14] (pages 142 à 154).

7.1. *Etant donné deux suites de nombres positifs $\{M_n\}$ et $\{M'_n\}$ et deux fonctions $k(r)$ et $k'(r)$ positives; supposons que la condition d'unicité (définie en 6.1.2.)*

$$7.1.1. \quad U(M_n M'_n, k(r) + k'(r))$$

soit satisfaite.

Alors l'un des deux problèmes de Watson $W(M_n, k(r))$ et $W(M'_n, k'(r))$ n'admet comme solution que la fonction holomorphe identiquement nulle.

Preuve. Soient $f(z)$ et $f_1(z)$ deux fonctions holomorphes dans le demi-plan non identiquement nulles, solutions des problèmes de Watson $W(M_n, k(r))$ et $W(M'_n, k'(r))$ c'est-à-dire que l'on a

$$7.1.2. \quad |f(z)| < M_n e^{-n k(r)} \\ 7.1.3. \quad |f_1(z)| < M'_n e^{-n k'(r)} \quad n = [x].$$

Posons $g(z) = f(z) f_1(z)$ alors 7.1.2. et 7.1.3. entraînent que

$$|g(z)| < M_n M'_n e^{-n(k(r)+k'(r))}.$$

$g(z)$ est ainsi solution du problème de Watson $W(M_n M'_n, k(r) + k'(r))$. La condition $U(M_n M'_n, k(r) + k'(r))$ étant satisfaite, d'après 6.1.2., ce problème de Watson n'admet pas d'autre solution que la solution identiquement nulle, donc

$$g(z) \equiv 0$$

ou

$$f_1(z) f(z) \equiv 0.$$

$f(z)$ et $f_1(z)$ étant holomorphes, ceci n'est possible que si $f(z)$ ou $f_1(z)$ est elle-même identiquement nulle. On a le corollaire suivant :

7.2. Soient $W(M_n, k(r))$ et $W(M'_n, k'(r))$ deux problèmes de Watson supposons que

$$7.2.1. \quad \lim_{r \rightarrow \infty} [k(r) + k'(r) - \log r] > -\infty$$

7.2.2. et que la suite $\{M_n M'_n\}$ satisfait à la condition de quasi-analyticité de Denjoy-Carleman.

Alors l'un des deux problèmes de Watson admet comme seule solution la solution nulle.

Preuve. La condition $U(M_n M'_n, \log r)$ n'est autre que la condition de Denjoy-Carleman d'après 5.7.

Nous n'énoncerons pas tous les théorèmes de composition que l'on peut obtenir à partir du paragraphe 6 et de 7.1. Nous nous contenterons de reprendre un énoncé de [14] (page 142).

7.3. Soient Λ une suite d'entiers impairs et Λ' une suite de nombres positifs réels, $\{M_n\}$ et $\{M'_n\}$ deux suites de nombres positifs.

Soit $g(t)$ une fonction indéfiniment dérivable définie sur $(-\infty, +\infty)$, impaire et telle que

$$7.3.1. \quad |g^{(n)}(t)| < M_n$$

$$7.3.2. \quad g^{(\lambda)}(0) = 0 \quad \lambda \in \Lambda$$

et $F(u)$ une fonction holomorphe et bornée dans la bande $|w| < \frac{\pi}{2}$ satisfaisant aux inégalités

$$7.3.3. \quad |F(u) - \sum_{\lambda_k < n} d_k e^{-\lambda_k u}| < M'_n e^{-n r} \quad (n = 1, 2, \dots).$$

Supposons

7.3.4. que la suite $\{M_n, M'_n\}$ satisfait à la condition de Denjoy-Carleman

7.3.5. que $\underline{\lim} [\lambda(r) - \lambda'(r)] > -\infty$.

Conclusion. Alors l'une des deux fonctions $F(u)$, $g(t)$ est identiquement nulle.

Preuve. L'existence de $g(t)$ non nulle satisfaisant à 7.3.1. et 7.3.2. est équivalente, d'après 6.5., à l'existence d'une solution non nulle du problème de Watson $W(M_n, \lambda(r))$. De même l'existence de $F(u)$ non nulle, satisfaisant à 7.3.3. est équivalente, d'après 6.6., à l'existence d'une solution non nulle du problème de Watson $W(M'_n, \log r - \lambda(r))$. 7.3.4. et 7.3.5. permettent d'appliquer alors le corollaire 7.2. qui conclut la démonstration.

8. Discussion des résultats d'unicité obtenus

Nous allons expliciter certains des résultats d'unicité obtenus en appliquant aux propositions du paragraphe 6 la proposition 5.2. et nous comparerons les résultats obtenus à ceux de [14]. Il sera utile d'introduire les notions de *densités logarithmiques* d'une suite.

8.1. Etant donné une suite de nombres réels Λ satisfaisant à 2.01., nous introduirons la *densité quasi-logarithmique* notée $D^*(\Lambda)$ et définie par

$$8.1.1. \quad D^*(\Lambda) = \overline{\text{borne}} \{ \alpha; 2\alpha \log r - \lambda(r) \text{ soit asymptotiquement croissante} \}.$$

On vérifie aisément que

$$D^*(\Lambda) = \overline{\lim}_{\frac{r}{r'} \rightarrow \infty} \frac{\lambda(r) - \lambda(r')}{2(\log r - \log r')}, \quad r' > 1.$$

La densité logarithmique supérieure notée $D^0(\Lambda)$, sera définie par

$$8.1.2. \quad D^0(\Lambda) = \overline{\lim}_{r \rightarrow \infty} \frac{\lambda(r)}{2 \log r}.$$

On dira que la suite Λ est logarithmiquement mesurable si on peut remplacer dans 8.1.2. $\overline{\lim}$ par $\lim$.

On appellera densité logarithmique maximum et l'on notera $D_M^0(\Lambda)$ la borne inférieure des densités des suites logarithmiquement mesurables contenant la suite Λ .

Comparons ces définitions avec les définitions habituelles de la densité [14] (page 51) dans lesquelles on pose $D(x) = \frac{n(x)}{x}$ en désignant par $n(x)$ le nombre d'éléments de la suite Λ inférieure à x et où l'on définit

$$\bar{D}(x) = \frac{1}{x} \int_0^x D(t) dt$$

et la densité supérieure et la densité moyenne supérieure par

$$D^* = \overline{\lim} D(x), \quad \bar{D}^* = \overline{\lim} \bar{D}(x).$$

On a alors, si $D^*(\Lambda) < +\infty$,

$$8.1.3. \quad D^0(\Lambda) \leq D_M^0(\Lambda) \leq D^*(\Lambda) \leq \bar{D}^*(\Lambda) \leq D^*(\Lambda).$$

Ces inégalités résulteront de la démonstration de

$$D^*(\Lambda) \leq \bar{D}^*(\Lambda).$$

En effet, si $D^*(\Lambda) > \alpha$, ceci signifie que la fonction $k(r) = 2\alpha \log r - \lambda(r)$ n'est pas asymptotiquement croissante; il existe alors deux suites $\{r_p\}$ et $\{r'_p\}$ telles que

$$\lim [k(r_p) - k(r'_p)] = +\infty \quad \text{avec } r'_p > r_p$$

ou, en désignant toujours par $n(r)$ le nombre d'éléments de x la suite Λ inférieure à r ,

$$8.1.4. \quad \lim_p \int_{r_p}^{r'_p} \left(\frac{dn(t)}{t} - \alpha \frac{dt}{t} \right) = +\infty.$$

En intégrant par parties

$$\begin{aligned} \int_{r_p}^{r'_p} \frac{dn(t)}{t} &= D(r'_p) - D(r_p) + \int_{r_p}^{r'_p} \frac{D(t)}{t} dt \\ &= D(r'_p) - D(r_p) + \bar{D}(r'_p) - \bar{D}(r_p) + \int_{r_p}^{r'_p} \frac{\bar{D}(t)}{t} dt, \end{aligned}$$

d'où, en portant dans 8.1.4. et en tenant compte que $D^* < +\infty$,

$$\lim_p \int_{r_p}^{r'_p} \frac{\bar{D}(t) - \alpha}{t} dt = +\infty$$

ce qui n'est possible que si $\bar{D}^* = \overline{\lim} \bar{D}(t) \geq \alpha$.

Donnons deux exemples montrant l'indépendance des trois densités D^0 , D^* et $\bar{D}$.

Considérons la suite Λ_1 constituée par les entiers consécutifs compris entre $(e^{e^n}, e^{e^{n+1}})$.

Alors on a $D^*(\Lambda_1) = \frac{e}{1+e}$ ce qui entraîne [14] (page 53) $\bar{D}(\Lambda_1) \geq \frac{1}{1+e}$ alors que $D^0(\Lambda_1) = 0$.

Considérons la suite Λ_2 constituée par les entiers consécutifs se trouvant dans les intervalles $(e^{e^n}, e^{e^{n+n}})$.

Alors on a $D^0(\Lambda_2) = 0$ alors que $D^*(\Lambda_2) = 1$.

8.2. Problèmes des moments et d'approximation

Etant donné une suite Λ de nombres réels, tels que $\lambda_n - \lambda_{n-1} \geq h > 0$, une condition nécessaire et suffisante pour qu'il existe une mesure μ non nulle portée par $(0, +\infty)$ telle que

$$\int_0^{+\infty} t^{\lambda_n} d\mu(t) = 0, \quad \int_0^{+\infty} t^{\lambda_n} |d\mu(t)| < M_n$$

est que

$$\int_0^{+\infty} M \left(2 \sum_{\lambda_n < r} \frac{1}{\lambda_n} - a \right) \frac{dr}{r^2} < +\infty$$

lorsque a est assez grand.

Preuve. On applique 6.2. et on remarque que le problème de Watson $W(M_n, \lambda(r))$ est complètement résolu par $U(M_n, \lambda(r))$ puisque $\lambda(r)$ est croissant. Si on prend en particulier $\Lambda = \{2n\}$ on obtient le théorème de Carleman. Enonçons maintenant le résultat dual de 8.2.

8.3. Une condition suffisante pour que la suite t^{λ_n} ($\lambda_n - \lambda_{n-1} \geq h > 0$) soit complète dans l'espace de Banach $C_F(0, +\infty)$ est qu'en posant

8.3.1. $\Phi(\sigma) = \text{base convexe } \log |F(e^\sigma)|$

8.3.2. on ait

$$\int_0^{+\infty} \Phi \left(2 \sum_{\lambda_n < r} \frac{1}{\lambda_n} - a \right) \frac{dr}{r^2} = +\infty$$

quelle que soit la constante a .

Si, en particulier, $\Phi(\sigma) = \log |F(e^\sigma)|$ la condition 8.3.2. est nécessaire et suffisante.

Preuve. On applique 6.3. et on remarque une nouvelle fois que le problème de Watson $W(M_n, \lambda(r))$ est complètement résolu par la condition $U(M_n, \lambda(r))$.

En appliquant 8.3. au cas particulier où $F(x) = e^x$ on a alors $\Phi(\sigma) = \text{base convexe } \{e^\sigma\} = e^\sigma$ on obtient le résultat suivant dû à Fuchs [5].

8.3.3. Une condition nécessaire et suffisante pour que la suite $\{t^{\lambda_n} e^{-t}\}$ ($\lambda_n - \lambda_{n-1} \geq h > 0$) soit complète dans $C_1(0, +\infty)$ est que l'intégrale

$$\int_0^{+\infty} e^{-2 \sum_{\lambda_n < r} \frac{1}{\lambda_n}} \frac{dr}{r^2} = +\infty.$$

Preuve. Il suffit d'appliquer 8.3.2. et 5.7.

8.4. **Problème de quasi-analyticité sur la demi-droite**

Soit $f(t)$ une fonction indéfiniment dérivable sur $(0, +\infty)$.

Supposons que

8.4.1. $|f^{(n)}(t)| < M_n$

8.4.2. $f^{(\lambda)}(0) = 0, \lambda \in \Lambda.$

Désignons par Λ' la suite d'entiers complémentaires de Λ et posons

$$M(\sigma) = \overline{\text{borne}}_n [n\sigma - \log M_n], \quad k(r) = \log r - 2 \sum_{\lambda_p < r} \frac{1}{\lambda_p}.$$

Si, quelle que soit la constante a ,

8.4.3. $\int_0^{+\infty} M(k(r) - a) \frac{dr}{r^2} = +\infty,$

alors $f(t)$ est identiquement nulle.

Si de plus

8.4.4. $D^*(\Lambda') < \frac{1}{2},$

une condition nécessaire et suffisante pour qu'il existe une fonction $f(t)$ non identiquement nulle satisfaisant à 8.4.1. et à 8.4.2. est que l'intégrale

8.4.5. $\int_0^{+\infty} M(k(r)) \frac{dr}{r^2} < +\infty.$

Preuve. La preuve de 8.4.3. résulte de 6.4. et de 6.1.2. et du fait que $\lambda(r) + \lambda'(r) = 2 \log r$. Si, de plus, $D^*(\Lambda') < \frac{1}{2}$, $k(r)$ est asymptotiquement croissante et, d'après 6.1.3., pour que le problème de Watson $W(M_n, k(r))$ n'admette pas d'autre solution que la solution nulle, il faut et il suffit que

8.4.1. $\int_0^{+\infty} M(k(r) - a) \frac{dr}{r^2} = +\infty$

quelle que soit la constante a .

De plus on a

$$k(r) - k(r') = \log \frac{r}{r'} - 2 \sum_{r < \lambda' < r'} \frac{1}{\lambda'}.$$

La définition de $D^*(\Lambda')$ entraîne que

$$\sum_{r < \lambda' < r'} \frac{1}{\lambda'} < 2(D^*(\Lambda') + \varepsilon) \log \frac{r}{r'} + A_\varepsilon$$

d'où

$$k(r) - k(r') > \gamma \log \frac{r}{r'} - A_\gamma \quad (\gamma > 0).$$

On a vu en 5.7. que lorsque cette condition est satisfaite on peut substituer à la divergence de la famille d'intégrales 8.4.6. la divergence de l'intégrale unique 8.4.5. ce qui achève la démonstration.

Remarque. Les théorèmes de quasi-analyticité généralisée sur la demi-droite ont été établis dans [14] sous l'hypothèse que $\bar{D}^*(\Lambda') < \frac{1}{2}$, hypothèse entraînant, d'après 8.1.3., $D^*(\Lambda') < \frac{1}{2}$. Sous cette hypothèse la condition 8.4.5. est une condition nécessaire et suffisante et contient les conditions données dans [14].

8.5. Quasi-analyticité sur la droite entière

Le problème est complètement résolu par l'énoncé suivant :

Une condition nécessaire et suffisante pour qu'il existe une fonction impaire $g(t)$ indéfiniment dérivable, non identiquement nulle, satisfaisant à

$$|g^{(n)}(t)| < M_n \quad (+\infty > t > -\infty)$$

$$g^{(\lambda)}(0) = 0 \quad \lambda \in \Lambda,$$

où Λ désigne une suite d'entiers impairs, est qu'il existe une valeur de a telle que

$$\int_0^{+\infty} M \left(2 \sum_{\lambda < r} \frac{1}{\lambda} - a \right) \frac{dr}{r^2} < +\infty.$$

Preuve. On applique 6.5. et 6.1.3.

8.6. Prolongement analytique

Etant donné une suite $\{M_n\}$ de nombres positifs et une suite Λ vérifiant

$$\lambda_n - \lambda_{n-1} \geq h > 0,$$

une condition nécessaire et suffisante pour qu'il existe une fonction holomorphe et bornée

dans la bande horizontale $|w| < l$ où $l > \pi D^*(\Lambda)$, non identiquement nulle et satisfaisant aux inégalités

$$8.6.1. \quad \left| F(u) - \sum_{\lambda_k < n} d_k e^{-\lambda_k u} \right| < M_n e^{-n\nu} \quad (-\infty < \nu < +\infty, n = 1, 2, \dots)$$

est que

$$8.6.2. \quad \int_0^{+\infty} M \left(\frac{2l}{\pi} \log r - 2 \sum_{\lambda < r} \frac{1}{\lambda} \right) \frac{dr}{r^2} < +\infty.$$

Preuve. Résulte de 6.6. et de 5.7.

CHAPITRE III

Détermination d'une fonction méromorphe dans le demi-plan par ses valeurs sur un ensemble d'unicité

9. Nous considérerons la classe C des fonctions méromorphes satisfaisant aux conditions 2.1.2. et 2.1.3.

Etant donné une suite Λ_1 telle que 2.1.5. soit satisfait, deux fonctions méromorphes $f_1(z), f_2(z) \in C$, coïncidant sur Λ_1 , sont identiques. Les fonctions de la classe C se trouvent déterminées par les valeurs qu'elles prennent sur un ensemble d'unicité.

Nous nous proposons, dans ce chapitre, d'obtenir des renseignements sur le comportement de $f(z)$ dans le demi-plan, à partir de la connaissance de son comportement asymptotique sur un ensemble d'unicité.

Le résultat sera établi dans le cas particulier où l'ensemble d'unicité est constitué par la suite des entiers pairs. Une application de ce résultat particulier nous permettra de démontrer une forme affaiblie de l'inégalité fondamentale de M. Mandelbrojt sur les séries de Dirichlet asymptotiques, en remplaçant essentiellement les densités de Pólya par une densité logarithmique, et d'obtenir à l'aide de cette inégalité des résultats sur l'ordre, la distribution des singularités d'une fonction holomorphe représentable asymptotiquement dans une bande par une série de Dirichlet.

9.1. Soit $f(z)$ une fonction méromorphe dans le demi-plan $x > 0$, Λ_2 une suite de nombres réels vérifiant 2.01. telle que $f^{-1}(\infty) \subset \Lambda_2$.

Supposons que

$$9.1.1. \quad |f(z)| < \alpha^n M_n \quad z \in \Omega_{\Lambda_2}, n = [x].$$

Soit $\{\beta_{n_p}\}$ une suite telle que

$$9.1.2. \quad |f(2n_p)| < \beta_{n_p} \quad 2n_p \in \Lambda_1, \Lambda_1 \text{ désignant une suite d'entiers pairs}$$

$$9.1.3. \quad \overline{\lim}_y |f(iy)| < \beta_0.$$

Hypothèse d'adhérence

Posons $k(r) = \lambda_1(r) - \lambda_2(r)$ et supposons qu'on ait, quelle que soit la constante $a > 0$

$$9.1.4. \quad \int_0^{+\infty} M(k(r) - a) \frac{dr}{r^2} = +\infty.$$

Hypothèse abélienne

Soit

$$p(x) = \text{base convexe } \{2n_p k(2n_p) - \log \beta_{n_p}\} \quad 2n_p \in \Lambda_1.$$

Supposons que

$$9.1.5. \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{p(x)}{x \log x} = d > 0.$$

Conclusion. On a

$$9.1.6. \quad \log |f(z)| < x k(r) - p(x) + Bx + C; \quad x > 2, z \in \Omega_{\Lambda_1}, \quad |\arg z| \leq \Theta_0 < \frac{\pi}{2}.$$

La constante B ne dépendant que des suites Λ_1 et Λ_2 et de Θ_0 , la constante C dépendant en plus de la suite $\{M_n\}$.

Preuve. On établira d'abord ce résultat dans le cas particulier suivant:

9.2. Soit $f(z)$ une fonction holomorphe dans le demi-plan $x > 0$ satisfaisant à 9.1.1. dans lequel la suite $\{M_n\}$ vérifie la condition de quasi-analyticité de Denjoy-Carleman. Supposons que

$$9.2.1. \quad |f(iy)| < \frac{\beta_0}{2} \quad (\text{quel que soit } y \text{ réel})$$

$$f(2n) < \beta_n.$$

Désignons par

$$9.2.2. \quad q(x) = \text{base convexe } \{\log \Gamma(2n+3) - \log \beta_n\} \quad (n=0, 1 \dots), \quad x > 0,$$

Supposons que

$$9.2.3. \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{q(x)}{x \log x} = d > 0.$$

Alors à tout nombre $\gamma > \frac{1}{d}$ on peut associer une constante A_γ ne dépendant que de la fonction $q(x)$, telle que l'on ait

$$9.2.4. \quad |f(z)| < A_\gamma |\Gamma(z+2)| e^{\frac{\pi}{2}|y| - \alpha(x-\gamma)} \quad x > 2.$$

Preuve. Posons

$$h(t) = \frac{2}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{f(iy+1)}{\Gamma(iy+3) \sin \frac{\pi}{2}(iy+1)} t^{iy} \frac{iy+1}{iy+2} dy \quad (t \geq 0).$$

Alors $h(t)$ est une fonction définie sur la demi-droite vérifiant

$$9.2.5. \quad |h(t)| < \frac{2}{t} \|f(iy)\|_\infty < \frac{\beta_0}{t}.$$

En appliquant la formule de Cauchy, on obtient

$$9.2.6. \quad h(t) = \sum_{p=1}^n \frac{f(2p)}{\Gamma(2p+3)} \cdot \frac{(-1)^p 2^p}{2p+1} t^{2p-1} + \frac{2}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{f(iy+2n+1) t^{iy+2n}}{\Gamma(iy+2n+3) \sin \frac{\pi}{2}(iy+2n+1)} \cdot \frac{iy+2n+1}{iy+2n+2} dy$$

et, en dérivant $2n$ fois par rapport à t , on obtient

$$h^{(2n)}(t) = \frac{2}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{f(iy+2n+1) t^{iy}}{(iy+2n+2)(iy+2n+1)\Gamma(iy+1) \sin \frac{\pi}{2}(iy+2n+1)} \cdot \frac{iy+2n+1}{iy+2n+2} dy$$

d'où, en tenant compte de 9.1.1.,

$$|h^{(2n)}(t)| < \alpha^{2n+1} M_{2n+1}.$$

$f(z)$ étant holomorphe les inégalités 9.1.1. seront encore satisfaites si on remplace $\{M_n\}$ par sa régularisée convexe logarithmique. En supposant cette opération faite $\log M_n$ est une suite convexe.

De plus les inégalités d'Hadamard donnent

$$|h^{(2n+1)}(t)| < 2 \sqrt{M_{2n} M_{2n+2}}.$$

Il en résulte que la majoration des dérivées d'ordre pair permet d'obtenir une majoration des dérivées d'ordre impair assez précise pour que $h(t)$ appartienne à une classe quasi-analytique sur $(0, +\infty)$.

De plus 9.2.6. donne

$$9.2.7. \quad \begin{aligned} h^{(2n)}(0) &= 0 \\ h^{(2n+1)}(0) &= f(2n+2) \frac{\Gamma(2n+2) 2n+2}{\Gamma(2n+5) 2n+3}. \end{aligned}$$

9.2.2. et 9.2.3. entraînent

$$\log \Gamma(2p+3) - \log |f(2p)| > \frac{2p}{\gamma} \log 2p \quad \left(\gamma > \frac{1}{d}\right).$$

Alors

$$\log |h^{(n)}(0)| < \left(1 - \frac{1}{\gamma}\right) p \log p$$

et ainsi la suite des dérivées à l'origine de $h(t)$ a le même comportement asymptotique que la suite des dérivées d'une fonction $h_1(t)$ analytique entière d'ordre fini égal à $\frac{1}{d}$. $h(t)$ appartenant à une classe quasi-analytique sur $(0, +\infty)$ il en résulte que $h(t)$ est égal à $h_1(t)$ ceci au moins dans le cas où cette classe quasi-analytique contient les fonctions analytiques.

Dans le cas contraire, si $C(M_n)$ ne contient pas les fonctions analytiques sur $(0, R)$, il existe alors une suite $\{n_i\}$ d'indices tels que $M_{n_i} < n_i! R^{-n_i}$. Ecrivons le reste de la formule de Taylor à l'origine appliquée à la différence $h(t) - h_1(t) = g(t)$.

On a $|g(t)| < t^{n_i}$ $n_i \rightarrow \infty$. Ceci entraîne que $g(t) \equiv 0$ sur $0 < t < R$. En recommençant le même raisonnement aux points $\frac{1}{2}, \frac{3}{2}$ on obtient $g(t) \equiv 0$ sur $(0, +\infty)$ ce qui établit que dans tous les cas $h(t) = h_1(t)$.

Posons

$$m_0(r) = \max_{0 \leq \theta \leq 2\pi} |h(re^{i\theta})| \leq \sum_0^\infty \frac{|h^{(2n+1)}(0)|}{\Gamma(2n+2)} r^{2n+1} < r \sum_0^\infty r^{2n} e^{-a(2n+2)} = m_1(r).$$

Ceci étant on peut calculer $f(z)$ à partir de $h(t)$ en appliquant la formule d'inversion de l'intégrale de Mellin on a

$$9.2.9. \quad \frac{zf(z)}{(z+1)\Gamma(z+2)\sin\frac{\pi}{2}z} = \int_0^{+\infty} h(t)t^{-z} dt \quad (1 < x < 2),$$

intégrale convergente d'après 9.2.7.

9.2.9. sera évalué en intégrant la fonction $h(t)t^{-z}$ holomorphe dans le demi-plan $\tau < 0$ ($t = \sigma + i\tau$), sur le contour C_R , constitué de la demi-droite $\sigma < -R$, $\tau = 0$, du demi-cercle de diamètre $-R$, $+R$ et de la demi-droite $\tau = 0$ $\sigma > R$.

On a, en tenant compte du fait que $h(t)$ est impaire,

$$9.2.10. \quad I = \int_{C_R} h(t)t^{-z} dt = \int_0^{+\infty} h(t)t^{-z} dt - e^{-i\pi z} \int_0^{+\infty} h(t)t^{-z} dt \quad (1 < x < 2).$$

D'autre part, en majorant I sur le contour C_R par 9.2.5. et 9.2.7. et en supposant $y > 0$,

$$I < \frac{\text{borne}}{r} [m_0(r)r^{-x+1} + \beta_0 r^{-x+1}] \quad x > 2.$$

Posons

$$m_2(r) = \sum_0^{\infty} r^{2n} e^{-q(2n)}.$$

On aura alors

$$I < \frac{\text{borne}}{r^{>1}} m_2(r) r^{-x}.$$

$m_2(r)$ peut être évalué à partir de $q(2n)$ en utilisant la théorie de la croissance des fonctions entières d'ordre fini [18] (page 38). Posons

$$9.2.11. \quad \log m(r) = \overline{\text{borne}}_n [2n \log r - q(2n)].$$

On pourra pour tout $\gamma > \frac{1}{d}$ trouver une constante A_γ ne dépendant que de $q(x)$ et γ telle que l'on ait

$$\log m_2(r) \leq \log A_\gamma + \log m(r) + \gamma \log r.$$

D'où

$$\begin{aligned} -\log |I| &> \overline{\text{borne}}_x [x \log r - \log m_2(r)] \\ -\log |I| &> \log A_\gamma + \overline{\text{borne}}_x [(x-\gamma) \log r - \log m(r)] \end{aligned}$$

ou, en tenant compte de la convexité de $q(x)$ et de 9.2.11.,

$$\log |I| < \log A_\gamma - q(x-\gamma) \quad x > 2.$$

Il suffit de substituer dans 9.2.10. et 9.2.9. pour obtenir

$$|f(z)| < |\Gamma(z+2)| \frac{\left| \sin \frac{\pi}{2} z \right|}{\left| 1 - e^{-i\pi z} \right|} A_\gamma e^{-q(x-\gamma)} \quad (y > 0, x > 2)$$

ce qui établit 9.2.4.

Recherche d'un multiplicateur

On multipliera la fonction $f(z)$ satisfaisant aux hypothèses de 9.1. par une fonction $G(z)$ qui sera choisie de manière que le produit $f(z) G(z)$ satisfasse aux hypothèses de 9.2.4.

L'hypothèse d'adhérence jouera un rôle indispensable pour pouvoir assurer l'existence de tel multiplicateur qui sera établi par le lemme suivant:

9.3.1. *$f(z)$ satisfaisant aux hypothèses de 9.1. il existe alors une fonction $G(z)$ ne dépendant que de Λ_1, Λ_2 et $\{M_n\}$, holomorphe dans le demi-plan, telle que désignant par Λ_3 la suite complémentaire de la suite Λ_1 par rapport à la suite des entiers pairs, on ait:*

$$9.3.1.1. \quad G(\Lambda_3) = 0, \quad G(\Lambda_2) = 0$$

$$9.3.1.2. \quad \frac{1}{r} \log |G(re^{i\Theta})| = \cos \Theta [\lambda_2(r) + \lambda_3(r)] + O(1) \quad z \in \Omega_{\Lambda_1} \cap \Omega_{\Lambda_2}$$

dans tout angle $|\Theta| \leq \Theta_0 < \frac{\pi}{2}$.

9.3.1.3. *$|G(n+iy)| < B_n$ où la suite $\{M_n B_n\}$ satisfait à la condition de quasi-analyticité de Denjoy-Carleman, et*

$$q_G(x) = \text{base convexe } \{ \log \Gamma(2n+3) - \log \beta_n - \log |G(2n)| \}$$

vérifie

$$9.3.1.4. \quad q_G(x) > p(x) - Ax \quad x > 2.$$

Preuve. La divergence de l'intégrale 9.1.4., quelle que soit la constante $a > 0$, entraîne, d'après le lemme 4, qu'il existe une fonction $n(r)$ à valeurs entières croissante telle que

$$\int_1^{+\infty} n(r) \frac{dr}{r^2} < +\infty$$

alors que

$$\int_1^{+\infty} [n(r) k(r) - \log M_{n(r)}] \frac{dr}{r^2} = +\infty.$$

Le lemme 3.5. permet de construire une suite $\{B_n\}$ telle que

$$\overline{\text{borne}}_n [n(\lambda_2(r) + \lambda_3(r)) - \log B_n] = n(r) (\lambda_2(r) + \lambda_3(r)) - \log B_{n(r)} = T(r)$$

avec

$$\int_1^{+\infty} T(r) \frac{dr}{r^2} < +\infty.$$

La convergence de cette intégrale nous permet de construire, en vertu du lemme 3.3., une fonction $G(z)$, holomorphe dans le demi-plan satisfaisant à 9.3.1.1., 9.3.1.2. et 9.3.1.3. D'autre part, la suite $\{M_n B_n\}$ vérifie, puisque $k.(r) < \log r - \lambda_2(r) - \lambda_3(r)$,

$$\begin{aligned} \int_1^{+\infty} [n(r) \log r - \log B_{n(r)} - \log M_{n(r)}] \frac{dr}{r^2} &\geq \int_1^{+\infty} [n(r) k.(r) - \log B_{n(r)}] \frac{dr}{r^2} + \\ &+ \int_1^{+\infty} \frac{T(r)}{r^2} dr = +\infty. \end{aligned}$$

$\{M_n B_n\}$ satisfait ainsi à la condition de Denjoy-Carleman. De plus, d'après 3.3.4. on a

$$q_G(x) > \text{base convexe } \{2n \log(2n+1) - 2n(\lambda_2(n) + \lambda_3(n)) - \log \beta_n - An\}$$

$$q_G(x) > \text{base convexe } \{2nk(2n) - \log \beta_n - An\}.$$

D'où

$$q_G(x) > \text{base convexe } \{2nk(2n) - \log \beta_n\} - Ax = p(x) - Ax.$$

9.4.

Démonstration de 9.2.

Multiplions $f(z)$ par une fonction $G(z)$ construite par 9.3. Le produit $f(z)G(z)$ satisfait les conditions de 9.2.4. On a, suivant 9.2.4.,

$$|f(z)||G(z)| < A_\gamma |\Gamma(z+2)| e^{\frac{\pi}{2}|y| + Ax - p(x)} \quad x > 2.$$

D'où, en tenant compte de 9.3.2.,

$$\log |f(z)| < x \log r - x(\lambda_1(r) + \lambda_2(r)) - p(x) + A' + A''x,$$

les constantes A', A'' dépendant de la suite $\{M_n\}$, de Λ_1 et de Λ_2 , d'où

$$\log |f(z)| < xk(r) - p(x) + A' + A''x \quad \text{ce qui établit 9.1.6.}$$

10. Application aux séries de Dirichlet

Le but de ce paragraphe est d'obtenir une inégalité analogue à l'inégalité fondamentale de [14] permettant de majorer les coefficients d'une série de Dirichlet asymptotique à une fonction holomorphe dans une bande.

10.1. Soit $F(u)$ une fonction holomorphe dans la demi-bande

$$\nu > \nu_0, |w| < \frac{\pi}{2} \quad (u = \nu + iw).$$

Supposons qu'il existe des constantes c_k et deux suites $\{M_n\}$, Λ_2 de nombres positifs, Λ_2 vérifiant 2.01, telles que

$$10.1.1. \quad \left| F(u) - \sum_{\lambda_k < n} c_k e^{-\lambda_k u} \right| < \alpha^n M_n e^{-n\nu} \quad (\nu > \nu_1, \lambda_k \in \Lambda_2).$$

Posons $k(r) = \log r - \lambda_2(r)$ et supposons que

$$10.1.2. \quad \int_0^{+\infty} M[k.(r)] \frac{dr}{r^2} = +\infty.$$

$$10.1.3. \quad D^0(\Lambda_2) < \frac{1}{2},$$

$D^0(\Lambda_2)$ désignant la densité logarithmique supérieure introduite en 8.1.

Alors il existe deux constantes β , ne dépendant que de la suite Λ_2 , et A dépendant de la suite Λ_2 et de la suite $\{M_n\}$ telles qu'on ait

$$10.1.4. \quad \log |c_k| < A + \log m(\nu_0) + \lambda_k(\nu_0 + \beta) + \lambda_k(k(\lambda_k) - k.(\lambda_k))$$

où $m(\nu_0)$ désigne le maximum de $F(u)$ dans la demi-bande $\nu > \nu_0, |w| < \frac{\pi}{2}$.

Preuve. Posons

$$f(z) = \int_{\nu_0}^{+\infty} \left[F\left(\nu + i\frac{\pi}{2}\right) - F\left(\nu - i\frac{\pi}{2}\right) \right] e^{\nu z} d\nu.$$

Alors $f(z)$ est une fonction méromorphe de pôles λ_k avec pour résidus c_k . On a de plus

$$(-1)^n f(2n) = \int_{\nu_0}^{+\infty} \left[F\left(\nu + i\frac{\pi}{2}\right) e^{\frac{2n i \pi}{2}} - F\left(\nu - i\frac{\pi}{2}\right) e^{-\frac{2n i \pi}{2}} \right] e^{\nu n} d\nu$$

ou, en appliquant la formule de Cauchy à la frontière de la bande,

$$(-1)^n f(2n) = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} g(it + \nu_0) e^{2n(it + \nu_0)} dt$$

$$|f(2n)| < m(\nu_0) e^{2n\nu_0}.$$

De plus on a

$$|f(-2 + iy)| < m(\nu_0) e^{-2\nu_0}.$$

En prenant pour ensemble d'unicité Λ_1 , la suite des entiers pairs, les conditions de 9.1. sont satisfaites de façon évidente sauf 9.1.5. qui reste à vérifier.

Nous prendrons

$$\beta_0 = m(\nu_0) e^{-2\nu_0}, \quad \beta_n = m(\nu_0) e^{2n\nu_0}$$

$$p(x) = -m(\nu_0) - x\nu_0 + \text{base convexe } \{2nk(2n)\}.$$

Or

$$D^0(\Lambda) < \frac{1}{2} \text{ implique } k(2n) = O(\log 2n)$$

ou

$$p(x) = O(x \log x).$$

Appliquons la conclusion 9.1.6. On a

$$\log |f(z)| < \beta x + A'' + xk(|z|) - p(x)$$

ce qui donnera

$$\frac{1}{x} \log |f(x)| < \beta + \nu_0 + \log m(\nu_0) + k(x) - \frac{1}{x} \text{ base convexe } \{2nk(2n)\} + A''.$$

$k(r)$ étant une fonction croissante, d'ordre logarithmique tendant vers l'infini, $xk(x)$ sera une fonction convexe de x base convexe $xk(x) > \text{base convexe } xk(x) = xk(x)$ d'où

$$\frac{1}{x} \log |f(x)| < \beta + \nu_0 + \log m(\nu_0) + k(x) - k(x) + O(1).$$

Le résidu de $f(z)$ en λ_k se calcule en intégrant sur le cercle de centre λ_k et de rayon 1 d'où 10.1.4.

10.2. Soit $F(u)$ une fonction représentable par la série de Dirichlet

$$10.2.1. \quad F(u) = \sum c_k e^{\lambda_k u} \quad \lambda_{k+1} - \lambda_k \geq h > 0$$

absolument convergente si $\nu > \nu_1$.

Supposons que dans la demi-bande $v > v_0$, $|w| < \pi l$ $F(u)$ soit holomorphe et soit $m(v_0)$ le maximum de $F(u)$ dans cette bande.

Posons

$$10.2.2. \quad k(r) = 2l \log r - \lambda(r)$$

et supposons que

$$10.2.3. \quad l > D^0(\Lambda).$$

Alors il existe deux constantes A et β ne dépendant que de la suite Λ et du nombre l , telles que

$$10.2.4. \quad \log |c_k| < A + (\beta + v_0) \lambda_k + (k(\lambda_k) - k(\lambda_k)) \lambda_k + \log m(v_0).$$

Preuve. On applique l'énoncé 10.1. avec $M_n = 1$.

La condition 10.1.2. est ainsi satisfaite et il suffit de transcrire 10.1.4.

10.3. Détection des singularités

Soit $F(u)$ une fonction représentable par la série de Dirichlet 10.2.1. dont l'abscisse de convergence absolue σ_c vérifie $-\infty < \sigma_c < +\infty$. A tout nombre l tel que $l > D^*(\Lambda)$ on peut associer une quantité β_l finie, ne dépendant que de l et de Λ , telle que dans tout rectangle de largeur β_l , construit sur un segment de longueur l porté par l'axe de convergence, il existe au moins une singularité de $F(u)$.

Preuve. Puisque

$$D^*(\Lambda) < l$$

on a, en posant $\Delta = \overline{\lim} (k(r) - k.(r))$,

$$\Delta < +\infty.$$

Appliquons la formule 10.2.4. On a

$$\log |c_k| < A + \lambda_k (\beta + \Delta + \varepsilon + v_0) + \log m(v_0)$$

formule qui implique que la série 10.1.1. est absolument convergente si

$$v > v_0 + \beta + \Delta$$

ce qui achève la démonstration.

10.4. Ordre dans une bande

Etant donné une bande horizontale S , l'ordre de $F(u)$ dans S sera défini par

$$\varrho_s = \overline{\lim}_{\nu \rightarrow \infty} \frac{\log_2 m(\nu)}{-\nu};$$

en posant

$$\mu(\nu) = \overline{\lim}_w |F(\nu + iw)|$$

l'ordre dans le plan sera défini par

$$\varrho = \lim_{\nu \rightarrow -\infty} \frac{\log_2 \mu(\nu)}{-\nu}.$$

On a, dans le cas où $\lambda_n - \lambda_{n-1} \geq h > 0$ qui nous intéresse, le résultat suivant dû à Ritt:

10.4.1.
$$\frac{1}{\varrho} = \overline{\lim} \frac{\log c_n}{\lambda_n \log \lambda_n}.$$

On a l'énoncé suivant:

Dans toute bande de largeur πl avec $l > D_M^0(\Lambda)$ la fonction $F(u)$, donné par 10.1.1., a le même ordre que dans tout le plan. Si on suppose seulement que $l > D^0(\Lambda)$ alors on a

10.4.2.
$$\varrho_s \geq \frac{\varrho}{1 + 2\varrho [D^0(\Lambda) - D_0(\Lambda)]}$$

où $D_0(\Lambda)$ désigne la densité logarithmique inférieure de la suite Λ .

Preuve. Nous allons suivre pas à pas la démonstration de S. Mandelbrojt figurant dans [14] (page 260).

D'après 10.4.1. il existe une suite λ_{n_i} telle que

$$\log |c_{n_i}| > - \left(\frac{1}{\varrho} + \varepsilon \right) \lambda_{n_i} \log \lambda_{n_i}.$$

Appliquons 10.2.4. On obtiendra

$$\log m(\nu_0) > - \left(\frac{1}{\varrho} + 2\varepsilon \right) \lambda_{n_i} \log \lambda_{n_i} - \nu_0 \lambda_{n_i} - \lambda_{n_i} [k(\lambda_{n_i}) - k.(\lambda_{n_i})].$$

Posons

10.4.3.
$$b = \overline{\lim} \frac{k(x) - k.(x)}{\log x}.$$

On aura

$$\log m(\nu_0) > - \left(\frac{1}{\varrho} + b + 3\varepsilon \right) \lambda_{n_i} \log \lambda_{n_i} - \nu_0 \lambda_{n_i}.$$

Prenons

$$\nu_0 = - \left(\frac{1}{\varrho} + b + 4\varepsilon \right) \log \lambda_{n_i}.$$

On aura

$$\log m(\nu_0) = \log m \left(- \left(\frac{1}{\varrho} + b + 4\varepsilon \right) \log \lambda_{n_i} \right) \geq \varepsilon \lambda_{n_i} \log \lambda_{n_i}$$

et

$$\varrho s \geq \overline{\lim}_{i \rightarrow \infty} \frac{\log_2 m \left[- \left(\frac{1}{\varrho} + b + 4\varepsilon \right) \log \lambda_{n_i} \right]}{\left(\frac{1}{\varrho} + b + 4\varepsilon \right)} \geq \frac{1}{\frac{1}{\varrho} + b + 4\varepsilon}$$

d'où, ε étant arbitrairement petit,

$$\varrho s \geq \frac{1}{\frac{1}{\varrho} + b}.$$

Pour obtenir 10.4.2. il suffira d'évaluer 10.4.3.

On a pour x assez grand

$$2(D^0(\Lambda) + \varepsilon) \log x > \lambda(x) > 2(D_0(\Lambda) - \varepsilon) \log x$$

ce qui entraîne que

$$2(l - D_0 + \varepsilon) \log x > k(x) > 2(l - D^0 - \varepsilon) \log x$$

$$k.(x) > 2(l - D^0 - \varepsilon) \log x$$

d'où

$$b = \overline{\lim}_x \frac{k(x) - k.(x)}{\log x} \leq 2(D^0(\Lambda) - D_0(\Lambda))$$

d'où 10.4.2.

Si $l > D_M^0(\Lambda)$ on peut, en ajoutant des termes nuls à la série 10.1.1., se ramener au cas où $D^0(\Lambda) = D_0(\Lambda)$, cas dans lequel $b = 0$; la première partie de 10.4.1. est ainsi établie.

CHAPITRE IV

Quasi-analyticité des opérateurs linéaires

11. Les divers problèmes d'unicité examinés dans les chapitres précédents (problème de quasi-analyticité généralisée, problème des moments, séries de Dirichlet asymptotiques) ont été traités par le même procédé. Dans chaque cas, on a construit à priori une fonction holomorphe dans le demi-plan qui extrapolait la suite des dérivés de la fonction étudiée, les moments, les coefficients de la série de Dirichlet asymptotiques.

Ce procédé se transcrit naturellement en analyse fonctionnelle. Pour étudier la suite des itérés d'un opérateur A , on prolongera l'exposant des valeurs entières aux valeurs complexes comprises dans un demi-plan. Lorsque A est selfadjoint ce prolongement est rapidement construit par la décomposition spectrale. Dans un espace de Banach on pourra obtenir une extrapolation de A dans le cas où celui-ci admet un inverse borné, en construisant sur l'inverse de A , A_1 , un semi-groupe au sens de de Hille [8].

Le résultat d'extrapolation obtenu entraînera un théorème de quasi-analyticité se composant de deux parties, en premier lieu un résultat d'unicité analogue aux problèmes de quasi-analyticité généralisée étudiés dans le chapitre II, puis un résultat valable sans condition aux limites ou majorations à priori, analogue aux résultats de Hadamard, Gorny, H. Cartan sur les inégalités liant les maximums des dérivées.

Ces conclusions seront appliquées à titre d'exemple aux opérateurs elliptiques et hyperboliques à coefficients constants. Les procédés d'extrapolation utilisés plus haut n'auraient pas eu à être introduits si l'on s'était limité à ces opérateurs. En effet, le calcul symbolique de Jean Leray [11] où les intégrales de Marcel Riesz [9] permettent d'obtenir dans ce cas beaucoup plus explicitement le résultat. On aura pour ces opérateurs différentiels des énoncés d'unicité en faisant intervenir des conditions aux limites à distance finie en un seul point différent en cela de [10] et [2].

Enfin appliqué à la demi-droite le résultat de convexité obtenu permettra d'améliorer légèrement les inégalités de Gorny et H. Cartan.

Extrapolation des opérateurs positifs

Une fonction $\varphi(z)$ définie dans un ouvert Ω du plan complexe, à valeurs dans un espace de Banach B , sera dite holomorphe si, quelle que soit la forme linéaire continue b' définie sur B , la fonction numérique $\langle \varphi(z), b' \rangle$ est holomorphe dans Ω .

Ceci étant rappelé, on a l'énoncé suivant :

Soit H un espace de Hilbert, A un opérateur selfadjoint positif défini sur une variété dense $D(A)$ de H , $h \in D(A^n)$ alors il existe une fonction $\varphi(z)$ holomorphe dans la bande $n > x > 0$, à valeurs dans H , telle que l'on ait

$$11.1.1. \quad \varphi(p) = A^p h \quad p = 0, 1, \dots, n.$$

$$11.1.2. \quad \|\varphi(p + iy)\| = \|A^p h\|$$

$$11.1.3. \quad A^p \varphi(z) = \varphi(z + p) \quad 0 < x < n - p.$$

Preuve. Soit $dE(\lambda)$ la décomposition spectrale de l'opérateur A . Quel que soit $h' \in H$, on a

$$11.1.4. \quad (Ah, h') = \int_0^{+\infty} \lambda d(E(\lambda)h, h').$$

Posons

$$11.1.5. \quad \varphi_p(z) = \int_0^{+\infty} \lambda^{z-p} d(E(\lambda)A^p h).$$

L'intégrale converge uniformément dans la bande $0 < x < p$.

En effet, on a si $x < p$, $h' \in H$

$$\left| \int_1^{+\infty} \lambda^{z-p} d(E(\lambda)A^p h, h') \right| < \int_1^{+\infty} |d(E(\lambda)A^p h, h')| < \|A^p h\| \int_1^{+\infty} d\|E(\lambda)h'\| < \|A^p h\| \|h'\|,$$

inégalité assurant la convergence uniforme au voisinage de l'infini de 11.1.5.

De même au voisinage de l'origine on a

$$\begin{aligned} \left| \int_0^1 \lambda^{z-p} d(E(\lambda)A^p h, h') \right| &= \left| \int_0^1 \lambda^{z-p} d(E(\lambda) \int_0^{+\infty} \xi^p dE(\xi)h, h') \right| \\ &= \left| \int_0^1 \lambda^{z-p} d\left(\int_0^\lambda \xi^p dE(\xi)h, h'\right) \right| = \left| \int_0^1 \lambda^{z-p} \lambda^p d(E(\lambda)h, h') \right| \\ &< \int_0^1 |d(E(\lambda)h, h')| \leq \|h\| \|h'\|, \end{aligned}$$

inégalité assurant la convergence de 11.1.5. au voisinage de l'origine. Ceci étant, $\varphi_p(z)$ est une fonction holomorphe, à valeurs dans H , définie dans la bande $p > x > 0$.

Montrons que si $0 < q < p$, $\varphi_p(z)$ et $\varphi_q(z)$ coïncident dans la partie commune de leur domaine d'existence. En effet, si $0 < x < q$

$$\begin{aligned} \varphi_p(z) &= \int_0^{+\infty} \lambda^{z-p} d(E(\lambda) A^p h) = \int_0^{+\infty} \lambda^{z-p} d(E(\lambda) A^{p-a} A^a h) \\ &= \int_0^{+\infty} \lambda^{z-p} d[E(\lambda) \int_0^{+\infty} \xi^{p-a} d(E(\xi) A^a h)] = \int_0^{+\infty} \lambda^{z-p} \lambda^{p-a} d(E(\lambda) A^a h) = \varphi_a(z). \end{aligned}$$

Les $\varphi_p(z)$ définissent une même fonction $\varphi(z)$ holomorphe dans la bande $0 < x < n$
On a de plus si $p < x < n$, $s = [x - p] + 1$

$$\begin{aligned} A^p \varphi(z-p) &= A^p \int_0^{+\infty} \lambda^{z-p-s} d(E(\lambda) A^s h) \\ &= \int_0^{+\infty} \lambda^{z-p-s} d(E(\lambda) A^{s+p} h) = \varphi(z) \end{aligned}$$

ce qui établit 11.1.2.

De plus on a

$$\varphi(p) = \varphi_p(p) = \int_0^{+\infty} d(E(\lambda) A^p h) = A^p h$$

ce qui établit 11.1.1. Enfin,

$$\varphi(p+iy) = \int_0^{+\infty} \lambda^{iy} d(E(\lambda) A^p h) = U_y A^p h,$$

en désignant par U_y l'opérateur unitaire défini par

$$U_y = \int_0^{+\infty} \lambda^{iy} dE(\lambda).$$

En particulier on a

$$\|\varphi(p+iy)\| = \|A^p h\|$$

ce qui établit 11.1.3. et achève la démonstration de 11.1.

La quasi-analyticité des opérateurs selfadjoints

Commençons par énoncer les lemmes de convexité suivant :

11.2. Soit $\varphi(z)$ une fonction holomorphe définie dans un ouvert Ω du plan complexe, à valeurs dans l'espace de Banach B . Alors la fonction réelle

11.2.1.
$$p(z) = \log \|\varphi(z)\|$$

est sous-harmonique dans Ω .

Preuve. On a

$$\|\varphi(z)\| = \sup_{b' \in \Sigma'} |\langle \varphi(z), b' \rangle|,$$

Σ' désignant la boule unité de l'espace de Banach B' dual de B , d'où

$$\log \|\varphi(z)\| = \sup_{b' \in \Sigma'} \log |\langle \varphi(z), b' \rangle|.$$

Chacune des fonctions du second membre est sous-harmonique sur 0 , en vertu de l'holomorphie de $\varphi(z)$; leur borne supérieure sera également sous-harmonique.

11.3. Soit $p(z)$ une fonction sous-harmonique dans la bande $0 < x < n$. Supposons que

$$11.3.1. \quad \lim_{|y| \rightarrow \infty} e^{-\frac{\pi}{n}|y|} \int_0^n |p(iy+t)| dt = 0.$$

Soit $G(x, y)$ une fonction harmonique dans la même bande satisfaisant à 11.3.1. et telle que

$$G(0, y) \geq p(iy), \quad G(n, y) \geq p(n+iy).$$

Alors on a

$$G(x, y) \geq p(z) \quad n > x > 0.$$

Supposons de plus qu'il existe une constante δ telle que

$$11.3.2. \quad \begin{aligned} p(iy) &< \delta \frac{\pi}{2} |y| + m_0 \\ p(n+iy) &< \delta \frac{\pi}{2} |y| + m_n. \end{aligned}$$

Désignons par $H(x, y)$ la solution du problème de Dirichlet pour la bande

$$0 < x < 1, \quad H(0, iy) = H(1, y) = \frac{\pi}{2} |y|$$

satisfaisant à 10.3.1. Posons

$$q(x) = H(x, 0) \quad 0 \leq x \leq 1.$$

Alors on a

$$11.3.3. \quad p(x) \leq \left(1 - \frac{x}{n}\right) m_0 + \frac{x}{n} m_n + n \delta q\left(\frac{x}{n}\right)$$

$$11.3.4. \quad q(x) = - \int_0^x \log \left(\operatorname{tg} \frac{\pi}{2} t \right) dt$$

$$q(x) < -x \log x - (1-x) \log(1-x); \quad R \left| q\left(x + \frac{1}{R}\right) - q(x) \right| < \log 2 R \quad 0 < x < 1 - \frac{1}{R}.$$

Preuve. Considérons le rectangle $R_A = \{0 < x < n, |y| < A\}$ et soit $G_A(x, y)$ la solution du problème de Dirichlet pour ce rectangle les valeurs limites étant

$$G_A(0, y) = G(0, y), \quad G_A(n, y) = G(n, y), \quad G(x, A) = p(x + iA), \quad G(x, -iA) = p(x - iA);$$

alors $G_A(x, y)$ est une majorante harmonique de $p(z)$ sur R_A et l'on a

$$G_A(x, y) > p(z) \quad z \in R_A.$$

$G_A(x_0, y_0)$ se calcule en utilisant la mesure harmonique $d\mu_{A, x_0, y_0}$ portée par R_A . On a

$$G_A(x_0, y_0) = \int_{-A}^{+A} G(0, y) d\mu_{A, x_0, y_0} + \int_{-A}^{+A} G(n, y) d\mu_{A, x_0, y_0} + \int_0^n p(t + iA) d\mu_{A, x_0, y_0} + \int_0^n p(t - iA) d\mu_{A, x_0, y_0}.$$

Lorsque $A \rightarrow \infty$ les deux dernières intégrales tendent vers zéro en vertu de 11.3.1. les sommes des deux premières tendent vers $G(x_0, y_0)$ d'où $G(x, y) > p(z)$.

Si $p(z)$ satisfait en particulier à 11.3.2. nous appliquerons le début du lemme en prenant

$$G(x, y) = \left(1 - \frac{x}{n}\right) m_0 + \frac{x}{n} m_n + n \delta H\left(\frac{x}{n}, \frac{y}{n}\right)$$

ce qui établit 11.3.3. Remarquons que lorsque $\delta = 0$, 11.3.3. exprime la convexité de la fonction borne $\overline{[p(x + iy)]}$. La première égalité de 1.1.3.4. s'obtient en notant par $h(z)$ la fonction holomorphe définie par l'égalité $h(z) = H(x, y) + iK(x, y)$. On vérifie que $h'(z) = \log\left(\operatorname{tg} \frac{\pi}{2} z\right)$. Les deux dernières inégalités de 1.1.3.4. s'obtiennent à partir de la première égalité.

11.4. Soit A un opérateur selfadjoint alors la suite $\{\log \|A^n h\|\}$ est une suite convexe de n .

Preuve. Si A est positif, la démonstration résulte de 11.1.2., 11.2.1. et 11.3.3. Si A n'est pas positif, en appliquant le résultat précédent à l'opérateur positif A^2 , opérant sur h et Ah , on obtient que $\log \|A^{2n} h\|$ et $\log \|A^{2n+1} h\|$ sont deux suites convexes de n . D'autre part,

$$Ah = \int_{-\infty}^{+\infty} \lambda dE(\lambda) h$$

ou en appliquant l'inégalité de Schwarz aux deux fonctions λ et 1 de carré sommable sur $(-\infty, +\infty)$ par rapport à la mesure spectrale $dE(\lambda)h$, on obtient

$$\|Ah\|^2 \leq \left\| \int_{-\infty}^{+\infty} \lambda^2 dE(\lambda)h \right\| \left\| \int_{-\infty}^{+\infty} dE(\lambda)h \right\| \leq \|A^2h\| \|h\|$$

d'où

$$11.4.1. \quad \|Ah\|^2 \leq \|h\| \|A^2h\|,$$

ce qui avec la convexité de suites $\log \|A^{2^n}h\|$ et $\log \|A^{2^{n+1}}h\|$ entraîne la conclusion.

11.5. Le théorème de quasi-analyticité

Variété A-invariante. Etant donné une variété linéaire fermée V de l'espace de Hilbert H , nous dirons qu'elle est invariante par l'opérateur selfadjoint A , si quel que soit l'opérateur borné B_m associé à une fonction $m(t)$ bornée à support compact par l'intégrale

$$11.5.1. \quad B_m = \int m(\lambda) dE(\lambda)$$

on a $B_m V \subset V$. Nous noterons par $\mathcal{A}(h')$ la plus petite variété A -invariante contenant h' . Nous dirons que les $\{h_i\}$ forment une A base de H si $H = \sum_i \mathcal{A}(h_i)$. Le théorème de quasi-analyticité s'énonce alors:

Soit A un opérateur selfadjoint défini dans l'espace de Hilbert H . Soit $h \in D(A^n)$ quel que soit n et soit $h' \in H$.

Supposons que l'on ait

$$11.5.2. \quad \|A^n h\| < M_n$$

$$11.5.3. \quad (A^{n_p} h, h') = 0$$

$$11.5.4. \quad \int_0^{+\infty} M \left(2 \sum_{n_p < r} \frac{1}{n_p} - a \right) \frac{dr}{r^2} = +\infty$$

quelle que soit la constante $a > 0$.

Conclusion. h est orthogonal à la variété linéaire invariante $\mathcal{A}(h')$.

Corollaire. Si les hypothèses précédentes valent pour $\{h_i\}$ formant une A base de H , alors $h = 0$.

Preuve. Soit $\varphi(z)$ la fonction holomorphe à valeurs dans H , extrapolant la suite $A^n h$ définie en 12.1. Posons

$$f(z) = (\varphi(z), h').$$

Alors $f(z)$ est une fonction holomorphe à valeurs complexes, elle satisfait d'après 11.1.2. à

$$|f(p + iy)| < M_p \|h'\|$$

et, d'après 11.5.3., à

$$f(n_p) = 0.$$

La condition 11.5.4. entraîne alors $f(z) \equiv 0$.

On a, en particulier,

$$\int_0^{+\infty} \lambda^z d(E(\lambda)h, h') = 0$$

quel que soit z , où, en appliquant la formule d'inversion de l'intégrale de Mellin, $(E(\lambda)h, h') = 0$ ce qui entraîne

$$(h, E(\lambda)h') = 0$$

et, en vertu de 11.5.1.,

$$(h, B_m h') = 0.$$

C.Q.F.D.

11.6. Remarque

Si A n'est pas positif, on considérera l'opérateur positif A^2 , en le faisant opérer successivement sur h et Ah . Le théorème de quasi-analyticité se décomposera en deux énoncés, l'un valable pour les exposants pairs, l'autre pour les exposants impairs.

Applications

L'opérateur de dérivation défini sur $L_2(-\infty, +\infty)$ est selfadjoint; en lui appliquant 11.4. on obtient :

Soit $f(t)$ une fonction indéfiniment dérivable dans $L_2(-\infty, +\infty)$ posons

$$M_n^2 = \int_0^{+\infty} |f(t)|^2 dt,$$

alors $\log M_n$ est une suite convexe de n .

Dans l'espace euclidien X_l , à l dimensions on a l'énoncé suivant:

Soit Δ le laplacien dans l'espace euclidien X_l à l dimensions. Soit $f(x)$ une fonction indéfiniment dérivable, telle que l'on ait

$$m_n = \int_{X_l} |\Delta^n f|^2 dx < M_n^2.$$

Alors $\log m_n$ est une suite convexe de n .

D'autre part, soit l suites d'entiers $\Lambda_1, \Lambda_2, \Lambda_l$, on notera D_λ le symbole de dérivation $p_1^{\lambda_1} p_2^{\lambda_2} \dots p_l^{\lambda_l}$ ($\lambda_k \in \Lambda_k$).

Supposons qu'à tout $\lambda \in \prod_1^l \Lambda_i$ on ait associé une suite n_p^λ telle que l'on ait

$$11.7.1. \quad (\Delta^{n_p^\lambda} D_\lambda f)_0 = 0.$$

Désignons par Λ_i' la suite des entiers pairs contenus dans Λ_i , par Λ_i'' la suite des entiers impairs contenus dans Λ_i . Supposons que

$$11.7.2. \quad \sum_{\lambda \in \Lambda_i'} \frac{1}{\lambda} = +\infty, \quad \sum_{\lambda \in \Lambda_i''} \frac{1}{\lambda} = +\infty.$$

Supposons enfin que

$$11.7.3. \quad \int_0^{+\infty} M \left(2 \sum_{n_p^\lambda < r} \frac{1}{n_p^\lambda} - a \right) \frac{dr}{r^2} = +\infty$$

quelle que soit la constante a et quel que soit $\lambda \in \prod_1^l \Lambda_i$. Alors $f(x) \equiv 0$.

Preuve. La convexité de $\log m_n$ résulte du fait que Δ est selfadjoint dans $L_2(x_i)$ et de 11.4. Par contre, pour démontrer l'énoncé de quasi-analyticité la proposition 11.5.1. ne s'appliquera pas immédiatement, la mesure de Dirac ne pouvant pas être directement considérée comme une fonctionnelle continue sur $L_2(X_l)$. Démontrons le lemme d'extrapolation suivant qui précise 11.1.

11.7.4. Soit $f(x)$ une fonction définie sur X_l et satisfaisant à 11.7.1. Désignons par $C_0(X_l)$ l'espace de Banach des fonctions continues bornées, nulles à l'infini, définies sur X_l . Alors il existe une fonction $\varphi(z)$ holomorphe dans le demi-plan $x > 0$ à valeurs dans $C_0(X_l)$ telle que l'on ait pour n assez grand

$$11.7.4.1. \quad \|\varphi(n+iy)\| < 2 A_l M_{n+p}^* \quad p > \frac{l}{2} \quad M_{n+p}^* = \sup(1, M_{n+p}),$$

$$11.7.4.2. \quad \varphi(p) = \Delta^p f.$$

Preuve. Soit $\varphi(z)$ la fonction holomorphe à valeurs dans $L_2(X_l)$ extrapolant la suite $\Delta^p f$ construite en 11.1. D'après 11.1.3. $\Delta^p \varphi(z)$ existe dans $L_2(X_l)$ et vaut $\varphi(z+p)$. Si on prend $p > \frac{l}{2}$ ceci entraîne que $\varphi(z) \in C_0(X_l)$. De plus on a

$$\|\varphi(z)\|_c < A_l [\|\varphi\| + \|\Delta^p \varphi\|]$$

où A_l est une constante ne dépendant que de la dimension de l'espace.

$$\|\varphi(z)\|_{c_0} < A_l (m_{n+p} + m_n) \quad n = [x] + 1$$

d'où, en tenant compte de la convexité de la suite $\log m_n$ dans le cas où m_n est croissant,

$$\|\varphi(z)\|_{c_0} < 2 A_l m_{n+p} < 2 A_l M_{n+p}.$$

Dans le cas où m_n serait décroissant quel que soit n on aurait

$$\|\varphi(z)\|_{c_0} < 2 A_l.$$

11.7.4.1. est ainsi établi. Remarquons enfin qu'une mesure μ , définissant une fonctionnelle linéaire continue sur $C_0(X_l)$, peut être considérée comme la limite faible d'une suite de fonctions $f_p(x) \in L_2(X_l)$.

On aura

$$\langle \varphi(z), \mu \rangle = \lim_p \langle \varphi(z), f_p \rangle.$$

Les fonctions figurant dans le second membre sont holomorphes sur $x > 0$ et convergent uniformément dans toute bande verticale en vertu de 11.7.4.1., d'où $\langle \varphi(z), \mu \rangle$ est une fonction holomorphe sur $x > 0$.

Le lemme 11.7.4. est ainsi établi.

Preuve de 11.7. On construit, d'après 11.7.4. la fonction $\varphi_\lambda(z)$ extrapolant la suite $\Delta^n D_\lambda f$.

La fonction $\langle \varphi_\lambda(z), \delta_0 \rangle = \psi_\lambda(z)$ est holomorphe dans le demi-plan, satisfait à

$$\psi_\lambda(n_p^1) = 0, \quad |\psi_\lambda(n + iy)| < 2 A_l (1 + M_{2n+|\lambda|+i}) \quad (|\lambda| = \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_i).$$

11.7.4. entraîne que $\psi_\lambda(z) \equiv 0$.

En prenant la transformée de Fourier de $f(x)$, soit $\Phi(\xi)$ on obtient que

$$\int_{\Xi} (\Phi(\xi) \xi_1^{\lambda_1} \xi_i^{\lambda_i}) \|\xi\|^{2z} d\xi = 0.$$

Cette intégrale s'écrit

$$\int_0^{+\infty} m_r(\Phi(\xi) \xi_1^{\lambda_1} \xi_i^{\lambda_i}) r^{2z} dr = 0$$

où $m_r(\Phi(\xi))$ désigne la moyenne de $\Phi(\xi)$ sur la sphère de centre 0 et de rayon r . La formule de Mellin entraîne que $m_r(\Phi(\xi) \xi_1^{\lambda_1} \xi_i^{\lambda_i}) \equiv 0$ quel que soit r .

Ceci sera vérifié quel que soit $\lambda \in \prod_1^l \Lambda_l$.

Sur la sphère $\Sigma_r = \{\xi; \|\xi\| = r\}$, ξ_1, ξ_2, ξ_i constitue un système de l fonctions continues séparant les points de Σ_r . D'après le théorème de Stone-Weierstrass l'algèbre

engendrée par les $\{\xi_i\}$ est dense dans l'algèbre normée des fonctions continues à valeurs réelles définies sur Σ_r . D'après le théorème de Müntz, lorsque Λ_i vérifient 11.7.3., $\xi_1^{\lambda_1} \xi_2^{\lambda_2}$ avec $\lambda \in \prod_1^l \Lambda_i$ est dense dans l'algèbre engendrée par $\{\xi_i\}$. On peut donc trouver deux polynômes $P_1(\xi)$ et $P_2(\xi)$, où ne figurent que les monômes ayant pour exposant des systèmes $\lambda \in \prod_1^l \Lambda_i$, tels que si

$$\Phi(\xi) = h(\xi) + i k(\xi)$$

on ait

$$\begin{aligned} |h(\xi) - P_1(\xi)| &< \varepsilon & \xi \in \Sigma_r \\ |k(\xi) - P_2(\xi)| &< \varepsilon & \xi \in \Sigma_r. \end{aligned}$$

Du plus, on aura

$$\begin{aligned} m_r(|\Phi(\xi)|^2) &= m_r(\Phi(\xi)(h(\xi) - i k(\xi))) \\ &< m_r(\Phi(\xi)(P_1(\xi) - i P_2(\xi))) + 2\varepsilon \max_{\Sigma_r} |\Phi(\xi)|. \end{aligned}$$

La première quantité est nulle, ε étant arbitraire on a $m_r(|\Phi(\xi)|) \equiv 0$ quel que soit r ce qui entraîne que $\Phi(\xi) \equiv 0$.

11.7.6. Corollaire. Soit $f(x)$ une fonction indéfiniment dérivable, définie sur l'espace euclidien à l dimensions. Posons

$$\int_{x_1} |\Delta^n f|^2 dx \leq M_n^2.$$

Supposons qu'à l'origine $f(x)$ et toutes ses dérivées s'annulent. Alors si

$$\int_0^{+\infty} M(2 \log r) \frac{dr}{r^2} = +\infty, \quad \text{on a } f(x) \equiv 0.$$

Remarque. Cet énoncé diffère des résultats donnés dans [2] et [10] sur la quasi-analyticité des opérateurs différentiels en ce que les conditions à distance finie sont supposées vérifiées en un seul point au lieu d'être vérifiées sur des surfaces ou des ensembles de détermination d'une fonction analytique. On peut en appliquant le résultat précédent obtenir des énoncés de ce type.

11.7.7. Soit $f(x)$ une fonction indéfiniment dérivable à support compact.

Supposons que

$$|\Delta^n f(x)| < M_n.$$

Alors si

$$\int_0^{+\infty} M(2 \log r) \frac{dr}{r^2} = +\infty, \quad \text{on a } f(x) \equiv 0.$$

Preuve. Il suffit d'appliquer le résultat précédent en prenant pour origine un point de la frontière du support de $f(x)$.

11.7.7. appliqué à la droite redonne le théorème de quasi-analyticité de Denjoy-Carleman pour les fonctions périodiques.

12. Quasi-analyticité d'opérateurs définis sur un espace de Banach

L'extrapolation des opérateurs bornés dans un espace de Banach a des liens étroits avec la théorie des semi-groupes de Hille [7]. L'énoncé suivant ne fait que reprendre cette théorie. Il sera utilisé pour l'étude de la quasi-analyticité des opérateurs différentiels admettant un inverse borné.

12.1. Soit $\mathcal{A}$ une algèbre de Banach, $a \in \mathcal{A}$, supposons que

12.1.1. le spectre de a soit contenu dans l'angle

$$|\arg u| \leq \Theta_0 < \pi \quad (u = v + iw).$$

12.1.2. On ait

$$\varrho |\Theta \pm \Theta_0| \| (a - \varrho e^{i\Theta})^{-1} \| < D < +\infty \quad \varrho > 0, \Theta_0 < \Theta < \pi, \text{ ou } -\pi < \Theta < -\Theta_0.$$

Alors il existe une fonction holomorphe a_z définie dans le demi-plan $x > 0$ et à valeurs dans l'algèbre $\mathcal{A}$ telle que

12.1.3.
$$a_1 = a$$

12.1.4.
$$a_{z+z'} = a_z a_{z'}.$$

Si on pose $\beta = \log(1 + \|a\|)$, alors

12.1.5.
$$\log \|a_z\| \leq (\beta + \varepsilon)x + \Theta_0 |y| + \log(|y| + 1) + O(1) \quad (x > 1).$$

Preuve. Soit C_Θ un contour borné entourant le spectre de a , et tracé à l'intérieur de l'angle $|\arg u| < \Theta$.

Posons

$$a_z = \frac{1}{2i\pi} \int_{C_\Theta} (a - u)^{-1} u^z du.$$

12.1.2. assure la convergence de cette intégrale lorsque $x > 0$. Evaluons

$$a_z a_{z'} = \frac{1}{(2i\pi)^2} \int_{C_\Theta} \int_{C'_\Theta} (a - u)^{-1} (a - \xi)^{-1} u^z \xi^{z'} du d\xi.$$

où C'_Θ étant intérieur à C_Θ sauf à l'origine.

On a l'identité

$$(a - \xi)^{-1} (a - u)^{-1} = \frac{(a - \xi)^{-1} - (a - u)^{-1}}{u - \xi}$$

qui donne

$$a_z a_{z'} = \frac{1}{2i\pi} \int_{C_\Theta} (a - \xi)^{-1} \xi^{z'} d\xi \int_{C_\Theta} \frac{u^z du}{2i\pi(u - \xi)} - \frac{1}{2i\pi} \int_{C_\Theta} (a - u)^{-1} u^z du \frac{1}{2i\pi} \int_{C_\Theta} \frac{\xi^{z'}}{(u - \xi)} d\xi.$$

La seconde intégrale est nulle, la première s'écrit, d'après la formule de Cauchy

$$a_z a_{z'} = \frac{1}{2i\pi} \int_{C_\Theta} (a - \xi)^{-1} \xi^{z+z'} d\xi = a_{z+z'}.$$

12.1.4. est ainsi établi.

En déformant le contour C_Θ de manière à le rendre extérieur au cercle de centre 0 et de rayon $\|a\|$, on calcule à l'aide du développement de $(a - u)^{-1}$ au voisinage de l'infini explicitement a_1 et on obtient 12.1.3.

En majorant $(a - u)^{-1}$ par 12.1.2. on obtient, en remarquant que l'on peut tracer C_Θ à l'intérieur du cercle $|u| < \|a\| + \varepsilon$,

$$\|a_z\| < D B_\varepsilon e^{\Theta_0 |y|} \frac{e^{(\Theta - \Theta_0)y}}{(\Theta - \Theta_0)} \left[\frac{1}{x} + (\|a\| + \varepsilon)^x \right]$$

d'où 12.1.5. en prenant $\Theta - \Theta_0 = \frac{1}{y}$.

12.2. *La quasi-analyticité d'opérateurs bornés, le théorème de Müntz.*

Etant donné un élément a d'une algèbre de Banach vérifiant les hypothèses de 12.1. pour que la variété linéaire engendrée par $a^{n_i} n_i$ parcourant une suite Λ d'entiers, soit dense dans l'algèbre engendrée par a , il suffit que

$$12.2.2. \quad \lim \left(\lambda(r) - \frac{2\Theta_0}{\pi} \log r \right) = +\infty.$$

En particulier si a a son spectre sur l'axe réel positif alors la condition 12.2.2. s'écrit (Müntz)

$$12.2.3. \quad \sum \frac{1}{n_i} = +\infty.$$

Preuve. Soit b' une forme linéaire continue sur $\mathcal{A}$ nulle sur la variété linéaire engendrée par les a^{n_i} et non identiquement nulle sur l'algèbre engendrée par a . Considérons la fonction holomorphe

$$f(z) = \langle a_z, b' \rangle$$

satisfaisant à

$$f(n_i) = 0$$

$$\log |f(z)| < \log \|a_z\| + O(1) < x(\beta + \varepsilon) + \Theta_0 |y| + \log |z+1| + O(1) \quad x > 1.$$

Appliquons à la fonction $f(z)$ la proposition 5.8.

On a alors avec les notations de cette proposition

$$k_d(r) = \lambda(r) - \frac{2\Theta_0}{\pi} \log r$$

$$M(\sigma) = +\infty \quad \sigma > \beta.$$

Les intégrales 2.1.5. divergent puisque $k_d(r) \rightarrow +\infty$. Par suite $f(z) \equiv 0$ et b' sera orthogonal à a^n quel que soit n et identiquement nulle sur l'algèbre engendrée par a .

12.3. *La quasi-analyticité d'opérateurs différentiels.*

Soit A un opérateur linéaire défini sur une variété linéaire dense $D(A)$ d'un espace de Banach. Supposons que A admette un inverse borné A_1 vérifiant 12.1.1. et 12.1.2.

Posons

$$M_s = \|A^s b\| \quad b \in D(A^{n+1}) \quad n+1 \geq s \geq 0, \quad \delta = \frac{2\Theta_0}{\pi},$$

où Θ_0 est donné par 12.1.1.

$$\beta = \log (\|A_1\| + 1).$$

Alors

12.3.1.
$$M_s < e^\beta e^{n\delta q\left(\frac{s}{n}\right)} M_{\frac{s}{n+1}}^{\frac{s}{n}} M_1^{1-\frac{s}{n}}$$

où $q(x)$ est défini par 11.3.2. Soit d'autre part $b' \in B'$ dual de B . Supposons que

12.3.2.
$$\langle A^{\lambda_i} b, b' \rangle = 0 \quad (\lambda_i \in \Lambda),$$

Λ désignant une suite d'entiers positifs. Posons

$$k(r) = \lambda(r) - \delta \log r.$$

Si

$$\int_0^{+\infty} M(k(r) - a) \frac{dr}{r^2} = +\infty$$

quel que soit $a > 0$,

alors b est orthogonal à la variété linéaire fermée engendrée par $A_1^n b'$, A_1 désignant l'opérateur transposé A_1 .

Preuve. Nous extrapolons la suite $\{A^n b\}$ en posant

$$\varphi_n(z) = A_1^{n-z} A^n b \quad x < n$$

où l'opérateur A_1^z est défini par le lemme 12.1. On a, d'après 12.1.4.,

$$\begin{aligned} \varphi_n(z) &= A_1^{n-z} A^n b = A_1^r A_1^{n-z-r} A^n b \quad x < n-r \\ &= A_1^{n'-z} A^{n'} b = \varphi_{n'}(z) \quad n' = n-r. \end{aligned}$$

$\{\varphi_n(z)\}$ constitue ainsi une famille de fonctions holomorphes coïncidant sur l'intersection de leur domaine d'existence. Elles définissent une fonction $\varphi(z)$ holomorphe dans tout le plan. On aura

$$\|\varphi(z)\| = \|A_1^{n+1-x-iy} A^{n+1} b\| < e^{\beta(n+1-x)} M_{n+1} e^{\Theta_0 |y|} \quad x < n.$$

En particulier on a

$$\|\varphi(n+iy)\| < M_{n+1} e^{\beta} e^{\Theta_0 |y|}.$$

De même

$$\|\varphi(iy)\| < M_1 e^{\beta} e^{\Theta_0 |y|}.$$

La fonction sous-harmonique $\log \|\varphi(z)\|$ satisfait aux hypothèses du lemme 11.3. dont l'application établit 12.3.1.

D'autre part $b' \in B'$ dual de B , considérons la fonction $f(z)$ holomorphe à valeurs numériques, définie dans la bande $0 < x < n$ par

$$f(z) = \frac{1}{\|b'\|} \langle \varphi(z), b' \rangle.$$

Alors $f(z)$ vérifie

$$|f(z)| < M_{n+1} e^{\beta} e^{\Theta_0 |y|} \quad n = [x], \quad f(\Lambda) = 0.$$

Le théorème d'unicité 5.8. donne

$$f(z) \equiv 0$$

donc, en particulier,

$$\langle A_1^n b, b' \rangle = 0$$

ou

$$\langle b, A_1^n b' \rangle = 0$$

ce qui établit 12.3.3.

Remarque. L'inégalité de convexité donnée en 12.3.1. présente l'inconvénient de se présenter avec un décalage d'une unité des indices intervenant au second membre. On peut dans le cas particulier où A est un opérateur normal de l'espace de Hilbert faire disparaître ce défaut. On a:

12.4. Les hypothèses étant celles de 12.3., étant supposé de plus que B est un espace de Hilbert et que A_1 est un opérateur normal 12.3.1. s'écrit alors

$$12.4.1. \quad M_s < e^{n\delta a} \binom{s}{n} M_n^{\frac{s}{n}} M_0^{1-\frac{s}{n}}.$$

Preuve. Soit $dE(\lambda)$ la mesure spectrale associée à l'opérateur normal A_1 . Majorons

$$\|\varphi(p + iy)\| = \int \lambda^{iy} d(E(\lambda) A^p h) = V_y A^p h$$

en notant par V_y l'opérateur normal défini par

$$V_y = \int \lambda^{iy} dE(\lambda).$$

On a

$$\|V_y\| \leq e^{\Theta_0 |y|}$$

et par suite

$$\|\varphi(p + iy)\| < e^{\Theta_0 |y|} \|A^p h\|$$

d'où, en appliquant le même raisonnement qu'à 11.4., on obtient 12.4.

13. Quasi-analyticité des opérateurs hyperboliques.

Le problème diffère du cas elliptique pour les deux raisons suivantes:

Le spectre de l'opérateur hyperbolique sera un demi-plan au lieu d'être une demi-droite comme dans le cas elliptique. Ceci entraîne que la fonction d'extrapolation $\varphi(z)$ se comportera comme $e^{\frac{\pi}{2}|y|}$ sur les parallèles à l'axe imaginaire au lieu d'être bornée sur ces parallèles.

D'autre part les hypothèses et conclusions des théorèmes de quasi-analyticité pourront être énoncés en se limitant à un cône de lumière.

Nous considérerons l'opérateur des ondes $a(p) = p_1^2 - p_2^2 - p_t^2$ et utilisant la théorie du calcul symbolique développé par Jean Leray [11] nous allons déterminer l'inverse a^{-1} de $a(p)$ dans l'espace de Hilbert $L_{2,\xi}(X_t)$ défini par la norme

$$\|f\|_{2,\xi} = \int_{X_t} |f(x)|^2 e^{\xi x} dx \quad \xi \in \Xi_t \text{ dual de } X_t.$$

Désignons par Γ^+ le demi-cône dans Ξ_l défini par

$$\xi_1^2 - \xi_2^2 - \xi_l^2 > 0, \quad \xi_1 > 0.$$

Avec ces notations rappelons le résultat suivant:

13.1. *Si $\xi \in \Gamma^+$, l'opérateur $a(p)$ admet un inverse borné dans $L_{2,\xi}(X_l)$.*

Cet inverse est un opérateur normal.

Son spectre est contenu dans le demi-plan positif.

Preuve. Appliquons à $L_{2,\xi}$ la transformation de Fourier définie par

$$F(f) = \int_x f(x) e^{\xi x + i\eta x} dx.$$

F définit une correspondance isométrique entre $L_{2,\xi}$ et $L_2(H)$ en désignant par $\Xi + iH$ le dual complexe de X_l .

On a

$$F(a(p)f) = a_\xi(\eta) F(f)$$

où

$$a_\xi(\eta) = a(\xi + i\eta).$$

Les propriétés de $a(p)$ dans $L_{2,\xi}(x_l)$ dépendent des propriétés algébriques du polynôme $a_\xi(\eta)$. On a $|a_\xi(\eta)| > \xi_1^2 - \xi_2^2 - \xi_l^2$ ([11] page 35, proposition 17.1.).

Ce qui montre que l'inverse a^{-1} existe, vérifie $\|a^{-1}\|_{2,\xi} < \frac{1}{\xi_1^2 - \xi_2^2 - \xi_l^2}$ et est la transformée de Fourier d'un opérateur de multiplication par une fonction bornée, donc est un opérateur normal.

Le spectre de a^{-1} sera l'ensemble des valeurs que prend la fonction $\frac{1}{a_\xi(\eta)}$ lorsque η parcourt H .

Cet ensemble de valeurs est contenu dans le demi-plan $x > 0$ ([11] page 37, proposition 18).

13.2. *Soit $a(p)$ l'opérateur des ondes, C_0 le cône de lumière issu de l'origine, $f(x)$ une fonction indéfiniment différentiable définie sur C_0 . Posons*

$$M_n^2 = \int_{C_0} |f(x)|^2 dx.$$

On a alors

$$M_s < e^{nq} \binom{s}{n} M_0^{\frac{s}{n}} M_n^{1-\frac{s}{n}}.$$

Preuve. 13.1. et 12 impliquent l'inégalité 13.2.1. pour des $\| \cdot \|_{2, \xi}$, $\xi \in \Gamma^+$, il suffit de faire tendre $\xi \rightarrow 0$ à l'intérieur de Γ^+ pour obtenir 13.2.1.

13.3. Soit $a(p)$ l'opérateur des ondes sur X_1 , $f(x)$ une fonction indéfiniment dérivable définie dans le cône de lumière C_0 issu de l'origine. Supposons que

$$\int_{c_0} |a^n(p) f(x)|^2 dx < M_n^2.$$

13.3.1. Soient l suites $\Lambda_1, \Lambda_2, \dots, \Lambda_l$ de nombres entiers tels qu'à tout $\lambda \in \prod \Lambda_i$ on puisse associer une suite n_i^λ pour laquelle

$$(a^{n_i^\lambda}(p) D_\lambda f)_0 = 0.$$

Les suites Λ_i et n_i^λ vérifiant

$$13.3.2. \quad \int_0^{+\infty} M(\lambda_i(r) - a) \frac{dr}{r^2} = +\infty, \quad a > 0, i = 1, 2, \dots, l.$$

$$13.3.3. \quad \int_0^{+\infty} M(k^{(\lambda)}(r) - b) \frac{dr}{r^2} = +\infty \quad \text{quel que soit } b > 0$$

et quel que soit $\lambda \in \prod_1^l \Lambda_i$ où

$$k^{(\lambda)}(r) = 2 \sum_{n_i^\lambda < r} \frac{1}{n_i^\lambda} - \log r.$$

Alors $f(x) \equiv 0$ dans C_0 .

Preuve. La preuve se déroule comme dans 12.7.

14. Les inégalités de Cartan-Gorny

Dans $L_2(0, +\infty)$ l'opérateur de dérivation possède les propriétés énumérés dans

13.1. On a alors la transcription suivante de 13.1.

Soit $f(t)$ une fonction indéfiniment dérivable, définie sur $(0, +\infty)$, posons

$$M_n^2 = \int_0^{+\infty} |f^{(n)}(t)|^2 dt.$$

Alors on a

$$14.1. \quad M_s \leq M_n^{\frac{s}{n}} M_0^{1 - \frac{s}{n}} e^{na \binom{s}{n}}.$$

L'inégalité 14.1. ne peut pas être comparée aux inégalités de H. Cartan et A. Gorny qui sont énoncées dans $L_\infty(0, +\infty)$. Nous obtiendrons ces inégalités en utilisant les propriétés qui ont été établies en 6.4. sur une expression explicite d'extrapolation de l'opérateur de dérivation dans $L_\infty(0, +\infty)$.

Commençons par démontrer le lemme élémentaire suivant:

14.2. *Désignons par*

$$\Sigma_n = \{f \in L_\infty(0, +\infty); \|f\|_\infty < 1, \|f^{(n)}\|_\infty < 1\}.$$

Posons

$$\beta_{s,n} = \overline{\text{borne}}_{f \in \Sigma_n} \|f^{(s)}\|.$$

Alors, $g(t)$ désignant une fonction n fois dérivable définie sur $(0, +\infty)$, on aura

$$14.2.1. \quad \|g^{(s)}(t)\|_\infty \leq \beta_{s,n} \|g(t)\|^{1-\frac{s}{n}} \|g^{(n)}(t)\|^{\frac{s}{n}}.$$

Preuve. Pour établir 14.2.1., posons

$$f_1(t) = \frac{1}{\|g\|} g(\gamma t) \quad \text{où} \quad \gamma = \left[\frac{\|g\|_\infty}{\|g^{(n)}\|_\infty} \right]^{\frac{1}{n}}.$$

Alors $f_1(t) \in \Sigma_n$, $|f_1(t)| < \beta_{s,n}$, ce qui donne 14.2.2.

Nous commencerons par évaluer $\beta_{1,n}$ et $\beta_{n-1,n}$. Ceci fera l'objet du lemme suivant:

14.3. *On a*

$$\log \beta_{1,n} < \log n + \log \frac{64}{\pi}; \quad \log \beta_{n-1,n} < \log n + \log \frac{64}{\pi}.$$

Preuve. Considérons la fonction d'extrapolation introduite en 6.4. On a, d'après 6.4.5. et compte tenu que $f \in \Sigma_n$

$$14.3.1. \quad \log \|I_{\frac{1}{2}+iy} f\|_\infty < \frac{\pi}{2} |y| + \log(|y|+1) + \frac{1}{2} \log \beta_{1,n} + \frac{1}{2} \log \frac{32}{\pi}$$

$$14.3.2. \quad \log \|I_{n-\frac{1}{2}+iy} f\|_\infty < \frac{\pi}{2} |y| + \log(|y|+1) + \frac{1}{2} \log \beta_{n-1,n} + \frac{1}{2} \log \frac{32}{\pi}.$$

Considérons la fonction sous-harmonique $\log \|I_x f\|$ dans la bande $\frac{1}{2} < x < n - \frac{1}{2}$. Les majorations 14.3.1. et 14.3.2. entraînent que

$$14.3.3. \quad \log \|I_x f\|_\infty < \frac{1}{2} \left(1 - \frac{x - \frac{1}{2}}{n-1}\right) \log \beta_{1,n} + \\ + \frac{x - \frac{1}{2}}{2(n-1)} \log \beta_{n-1,n} + (n-1) q \left(\frac{x - \frac{1}{2}}{n-1}\right) + \frac{1}{2} \log \frac{32}{\pi}.$$

Prenons en particulier $x=1$, $x=n-1$, on obtient

$$\log \beta_{1,n} < \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4(n-1)}\right) \log \beta_{1,n} + \frac{1}{4(n-1)} \log \beta_{n-1,n} + (n-1)q\left(\frac{1}{2(n-1)}\right) + \frac{1}{2} \log \frac{32}{\pi}$$

$$\log \beta_{n-1,n} < \frac{1}{4(n-1)} \log \beta_{1,n} + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4(n-1)}\right) \log \beta_{n-1,n} + (n-1)q\left(\frac{1}{2(n-1)}\right) + \frac{1}{2} \log \frac{32}{\pi}.$$

La seconde inégalité donne

$$\log \beta_{n-1,n} < \frac{1}{2(n-1)} \log \beta_{1,n} + 2(n-1)q\left(\frac{1}{2(n-1)}\right) + \frac{1}{2} \log \frac{32}{\pi}.$$

En portant dans la première inégalité

$$\log \beta_{1,n} < 2(n-1)q\left(\frac{1}{2(n-1)}\right) + \log \frac{32}{\pi}$$

utilisons la majoration 11.3.4. de $q(x)$

$$\log \beta_{1,n} < \log 2(n-1) + \log \frac{32}{\pi}$$

d'où 14.3.

14.4. On a

$$\log \beta_{s,n} < nq\left(\frac{s}{n}\right) + \log \frac{2^{10}e}{\pi} + \log_2 n.$$

Preuve. Ecrivons 14.3.3. en tenant compte des évaluations 14.3.

Appliquons 6.4.5. à l'intervalle $(n-1, n)$ $\alpha = 1 - \frac{1}{\log n}$, on a

$$\log \|I_{n - \frac{1}{\log n} + iy} f\| < \frac{\pi}{2} |y| + \log_2 n + 2 \log (|y| + 1) + \log \frac{128e}{\pi}.$$

De même

$$\log \|I_{\frac{1}{\log n} + iy} f\| < \frac{\pi}{2} |y| + \log_2 n + 2 \log (|y| + 1) + \log \frac{128e}{\pi}.$$

14.3. donne alors

$$\log \|I_s f\| < \log_2 n + \left(n - \frac{2}{\log n}\right) q\left(\frac{s - \frac{1}{\log n}}{n - \frac{2}{\log n}}\right) + \log \frac{512e}{\pi}$$

d'où, en appliquant 11.3.4., on obtient 14.4.

Le lemme suivant établit une minoration de $\beta_{s,n}$. On a

$$14.5. \quad \log \beta_{s,n} + \log 8 > nq \left(\frac{s}{n} \right).$$

Preuve. Soit $H(x, y)$ la fonction harmonique introduite en 11.3. et désignons par $g(z)$ la fonction holomorphe dans la bande $0 < x < n$ définie par l'égalité

$$\log |g(z)| = nH\left(\frac{x}{n}, \frac{y}{n}\right)$$

et soit

$$h(z) = \frac{g(z)\Gamma(-z)}{(z+n)^3} n^3, \quad f(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(iy) t^{iy} dy.$$

6.4.10. entraîne que $f(t) \in \Sigma_n$. De plus on a

$$\log |f^{(s)}(0)| = g(s) \left(\frac{n}{n+s} \right)^3$$

d'où 14.5.

Résumons ces différents lemmes dans l'énoncé:

14.6. Soit $f(t)$ une fonction définie sur $(0, +\infty)$ et n fois dérivable. Posons

$$M_s = \|f^{(s)}(t)\|_{\infty}.$$

Alors on a

$$M_s \leq \gamma_{s,n} e^{nq \left(\frac{s}{n} \right)} M_0^{1-\frac{s}{n}} M_n^{\frac{s}{n}}$$

le signe d'égalité pouvant être effectivement atteint et où

$$\frac{1}{8} < \gamma_{s,n} < \frac{2^{10} e}{\pi} \log n.$$

Preuve. 14.4. et 14.2.1.

Comparaison avec les inégalités de Cartan-Gorny

L'inégalité de H. Cartan-Gorny, telle qu'elle est donnée dans [3], s'écrit

$$14.7. \quad M_k < 2 \left(\frac{e^2 p}{k} \right)^k M_0^{1-\frac{k}{p}} M_p^{\frac{k}{p}}.$$

En particulier, 14.7. entraîne

$$M_{n-1} = O \left(e^{2n} M_n^{1-\frac{1}{n}} \right)$$

alors que 14.3. conduit au résultat asymptotique plus précis

$$M_{n-1} = O\left(n M_n^{1-\frac{1}{n}}\right).$$

14.6. fait jouer d'autre part un rôle symétrique aux deux extrémités de l'intervalle d'intégration fractionnaire.

Bibliographie

- [1]. THØGER BANG, Une inégalité de Kolmogoroff et les fonctions presque périodiques, *Det Kgl. Danske Videnskabernes Selskab* 1941.
- [2]. S. BOCHNER, Quasi-analytic functions positive kernels, *Annals of Mathematics* 51, (1950), 68-91.
- [3]. H. CARTAN, Sur les classes de fonctions définies par des inégalités portant sur leurs dérivées successives, *Actualités scientifiques et industrielles*, N° 867 (1940).
- [4]. ARNAUD DENJOY, *Leçons sur le calcul des coefficients d'une série trigonometrique*, Paris, 1941.
- [5]. W. H. J. FUCHS, On the closure of the set $\{e^{-t} t^n\}$, *Proceed. of the Cambridge Philosophical Society*, 42 (1946), 91.
- [6]. —, On a theorem of Mandelbrojt, J., *London Math. Soc.* 22 (1947), 22.
- [7]. A. GORNY, Contribution à l'étude des fonctions dérivables d'une variable réelle *Acta Mathematica* 71 (1939), 317.
- [8]. E. HILLE, Functional Analysis and Semi-Groups, *American Mathematical Society Colloquium Publications*, 31.
- [9]. J. P. KAHANE, *Thèse*, Paris, 1954. (A paraître aux *Annales de l'Institut Fourier, Grenoble*.)
- [10]. PIERRE LELONG, Sur une propriété de la quasi-analyticité des fonctions de plusieurs variables, *C. R. Acad. des Sciences*, 232 (1951), 1178.
- [11]. JEAN LERAY, *Symbolic Calculus with Several Variables* (cours miméographié), Institute for Advanced Study, Princeton, 1952.
- [12]. N. LEVINSON, Gap and Density Theorems, *American Mathematical Society Colloquium Publications*, 26.
- [13]. S. MANDELBJOJT, *Séries de Fourier et classes quasi-analytiques*, Paris, 1935.
- [14]. —, *Séries adhérentes. Régularisation des suites—Applications*, Paris, 1952.
- [15]. S. MANDELBJOJT et N. WIENER, Sur les fonctions indéfiniment dérivables sur une demi-droite, *C. R. Acad. des Sciences*, 225 (1947), 978.
- [16]. R. NEVANLINNA, *Eindeutige analytische Funktionen*, Berlin 1936. (*Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften*.)
- [17]. A. OSTROWSKI, Einige Bemerkungen über Singularitäten Taylorischer und Dirichletscher Reihen, *Berliner Sitz. Ber.*, 1921.
- [18]. GEORGES VALIRON, *Lectures on the General Theory of Integral Functions*, Toulouse, 1923.
- [19]. MARCEL RIESZ, L'intégrale de Riemann-Liouville et le problème de Cauchy, *Acta Mathematica*, 81 (1948).