Bauval, A. and Hayat, C.
Osaka J. Math.
54 (2017), 157–195

L'ANNEAU DE COHOMOLOGIE DES VARIÉTÉS DE SEIFERT NON-ORIENTABLES

ANNE BAUVAL and CLAUDE HAYAT

(Received December 16, 2013, revised February 5, 2016)

Abstract

If p is a prime number, the cohomology ring with coefficients in $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ of an orientable or non-orientable Seifert manifold M is obtained using a Δ-simplicial decomposition of M. Several choices must be made before applying the Alexander-Whitney formula. The answers are given in terms of the classical cellular generators.

Résumé

Si p est un nombre premier, l'anneau de cohomologie à coefficients dans $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ d'une variété de Seifert M, orientable ou non-orientable est obtenu à partir d'une décomposition Δ-simpliciale de M. Plusieurs choix sont à faire avant d'appliquer la formule d'Alexander-Whitney. Les réponses sont données en fonction des générateurs cellulaires classiques.

1. Introduction, Notations

1.1. Introduction. Dans cet article on détermine l'anneau de cohomologie à valeurs dans $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$, où p est un entier premier, pour toutes les variétés de Seifert orientables ou non. Les résultats ont été annoncés dans [2]. Le cas où il s'agit de variétés de Seifert orientables dont la base est une sphère, et les coefficients à valeurs dans $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, a été étudié dans [3]. L'article [1] a généralisé ce résultat en supprimant l'hypothèse sur la base et l'article [5] a obtenu cet anneau de cohomologie des variétés de Seifert orientables à valeurs dans $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$. Dans l'article [15], sont déterminés les anneaux de cohomologie à coefficients entiers (et cycliques finis) des variétés S^3/Γ où Γ est un sous-groupe fini de $SO(4)$ agissant librement sur S^3.

Notre attention pour le calcul des cup-produits a été attirée par les études portant sur une extension du Théorème de Borsuk-Ulam pour les variétés de dimension 3 [6]. En effet si τ est une involution sur une telle variété N, alors toute application continue f de N dans $\mathbb{R}^3$ admet un point $x \in N$ tel que $f(\tau(x)) = x$ si et seulement si la puissance trois pour le cup-produit de la classe de cohomologie élément de $H^1(N/\tau, \mathbb{Z}_2)$ associée à τ est non nulle.

Les preuves détaillées des résultats annoncés dans [2] sont obtenues en utilisant un point de vue Δ-simplicial. Utiliser cette méthode d'abord pour les variétés orientables rend plus courte et plus facile son extension au cas non-orientable. Les choix les plus délicats sont ceux de relevés du complexe cellulaire dans le complexe Δ-simplicial auxquels on impose

2010 Mathematics Subject Classification. Primary 13D03; Secondary 55N45, 57S25.

d'être des cocyles Δ-simpliciaux, Section 6. Décrivons les étapes de la méthode que nous avons choisie.

Nous commençons par construire une décomposition cellulaire de la variété M, Section 4, en précisant dans la Sous-section 4.1 les mots qui permettent de paver les 2-cellules, bords du voisinage tubulaire des fibres singulières et de la dernière 3-sphère. Le complexe cellulaire $(C_*)_{cell}$ ainsi obtenu est subdivisé en un complexe Δ-simplicial $(C_*)_{simp}$.

Notons $T\colon (C_*)_{cell} \to (C_*)_{simp}$ le morphisme associé à cette subdivision, et $T^t\colon\ C^*_{simp} \to C^*_{cell}$ le morphisme transposé défini dans la Sous-section 5. Nous choisissons, pour chaque générateur ξ des cochaînes cellulaires, un relevé $R(\xi)$ de $T^t(\xi)$ dans les cochaînes Δ-simpliciales. Ce choix est fait de telle façon que $R(\xi)$ soit un cocycle et pas seulement une cochaîne, Section 6.

Le cup-produit de deux cochaînes Δ-simpliciales est calculé par la formule d'Alexander-Whitney. Pour les cup-produits sur $H^1(M,\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})\otimes H^1(M,\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})$, on décrit un calcul qui permet d'éviter l'évaluation sur les (nombreux !) 2-simplexes, Sous-sections 7.1, 7.2, 8.1. Pour les cup-produits sur $H^1(M,\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})\otimes H^2(M,\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})$, on applique la formule d'Alexander-Whitney de façon plus classique puis le quasi-isomorphisme T^t, Sous-sections 7.3 et 8.2.

Le plan de cet article est comme suit. Après cette section d'introduction, de notations sur les variétés de Seifert et de quelques invariants associés, la Section 2 décrit une décomposition cellulaire d'une variété de Seifert quelconque M et donne une présentation des groupes de cohomologie $H^*(M,\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})$. Dans la Section 3, les théorèmes principaux présentent tous les cup-produits. La preuve de ces résultats constitue le reste de l'article. Dans les Sections et Sous-sections 4, 5, 6 sont décrits les choix faits pour une décomposition Δ-simpliciale, le quasi-isomorphisme T, et les relevés des cocycles cellulaires en cocycles Δ-simpliciaux.

Dans la Section 7, on applique, via la formule d'Alexander-Whitney, tous ces choix pour le calcul des cup-produits lorsque les coefficients de la cohomologie sont égaux à $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, et dans la Section 8 lorsque les coefficients de la cohomologie sont égaux à $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ où $p > 2$ est un entier premier.

La Section 9 est faite de figures symbolisant les décompositions cellulaires et simpliciales.

1.2. Notations. Dans la suite, le groupe $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ sera noté $\mathbb{Z}_p$.

En suivant essentiellement les notations de Orlik [11], mais aussi celles de [13], [14], M est une variété de Seifert décrite par une liste d'invariants de Seifert

$$\{e; (\Upsilon, g); (a_1, b_1), \dots, (a_m, b_m)\}.$$

Ici e est un entier, le TYPE Υ sera décrit plus bas, g est le genre de la surface de base (l'espace des orbites obtenues en identifiant chaque fibre S^1 de M à un point), et pour chaque k, les entiers a_k, b_k sont premiers entre eux avec $a_k \neq 0$ (si $b_k = 0$ alors $a_k = \pm 1$).

Comme dans [11], p.74 (et aussi pour d'autres auteurs), nous introduisons une fibre supplémentaire, non-exceptionnelle $a_0 = 1, b_0 = e$ et utilisons la présentation suivante du groupe fondamental de M :

$$\pi_1(M) = \left\langle \begin{matrix} q_0,\dots,q_m \\ t_1,\dots,t_{g'} \\ h \end{matrix} \;\middle|\; \begin{matrix} [q_k,h] \quad \text{and} \quad q_k^{a_k}h^{b_k}, & 0 \le k \le m \\ t_j h t_j^{-1} h^{-\varepsilon_j}, & 1 \le j \le g' \\ q_0 \dots q_m V & \end{matrix} \right\rangle, \tag{1.1}$$

où les générateurs et g', V sont décrits ci-dessous.

- Le Type Υ de M est égal à:
  - o_1 si la surface de base et l'espace total sont orientables (alors tous les ε_j sont égaux à 1) ;
  - o_2 si la surface de base est orientable et l'espace total non-orientable, alors $g \geq 1$ (forcément tous les ε_j sont égaux à -1) ;
  - n_1 si la surface de base et l'espace total sont non-orientables alors $g \geq 1$ et de plus tous les ε_j sont égaux à 1 ;
  - n_2 si la surface de base est non-orientable alors $g \geq 1$ et l'espace total est orientable (forcément tous les ε_j sont égaux à -1) ;
  - n_3 si la surface de base et l'espace total sont non-orientables avec de plus, tous les ε_j égaux à -1 sauf $\varepsilon_1 = 1$, et $g \geq 2$;
  - n_4 si la surface de base et l'espace total sont non-orientables avec de plus, tous les ε_j égaux à -1 sauf $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 1$, et $g \geq 3$.
- L'orientabilité de la surface de base et le genre g déterminent le nombre g' de générateurs t_j et le mot V dans la longue relation de $\pi_1(M)$ de la façon suivante:
  - quand la surface de base est orientable, i.e. $\Upsilon = o_i$, $g' = 2g$ et $V = [t_1, t_2] \dots [t_{2g-1}, t_{2g}]$;
  - quand la surface de base est non-orientable, i.e. $\Upsilon = n_i$, $g' = g$ et $V = t_1^2 \dots t_g^2$.
- Le générateur h correspond à la fibre générique régulière.
- Les générateurs q_k pour $0 \leq k \leq m$ correspondent aux (possibles) fibres exceptionnelles.

Dans ce papier nous utiliserons les notations suivantes.

Notations 1. *Soit M une variété de Seifert décrite par une liste d'invariants de Seifert*

$$\{e; (\Upsilon, g); (a_1, b_1), \dots, (a_m, b_m)\},$$

et soit p un entier premier.

- *Notons a le plus petit commum multiple des a_k, avec de plus $a_0 = 1$ et $b_0 = e$, alors*

$$c = \sum_{k=0}^{m} b_k(a/a_k).$$

- *Le nombre de a_k divisibles par p sera noté n.*
  - *Quand $n = 0$, on suppose que b_k est divisible par p si et seulement si $0 \leq k < r$;*
  - *quand $n > 0$, on suppose que a_k est divisible par p si et seulement si $0 \leq k \leq n$, les indices k sont réordonnés par p-valuation décroissante $v_p(a_k)$.*
- *On distingue trois cas :*
  - *Cas 1, $n = 0$ et c est divisible par p ;*
  - *Cas 2, $n = 0$ et c n'est pas divisible par p ;*
  - *Cas 3, $n > 0$.*

2. Les groupes de cohomologie

2.1. Le complexe cellulaire. La variété de Seifert M admet une décomposition cellulaire en cellules de dimension de 0 à 3 qui est décrite ci-dessous. Voir Figures 1, 2, 3, 4, Section 9.

• une 0-cellule σ ;
• des 1-cellules (d'origine et d'extrémité l'unique 0-cellule) t_j, q_k, h ;
• des 2-cellules :

- δ de bord :
  $\prod[t_{2i-1}, t_{2i}] \prod q_k$ pour les TYPES o_i ; $\prod t_j^2 \prod q_k$ pour les TYPES n_i ;
- ρ_k de bords $[h, q_k]$ qui correspondent à des tores ;
- ν_j de bords $ht_jh^{-\varepsilon_j}t_j^{-1}$ qui correspondent à des tores si $\varepsilon_j = 1$ et à des bouteilles de Klein si $\varepsilon_j = -1$;
- μ_k disques de bords $w_{a_k,b_k}(q_k, h)$, qui est un mot en q_k, h comportant a_k fois la lettre q_k et b_k fois la lettre h, mais dans un ordre très particulier qui sera précisé plus loin (Sous-section 4.1) ;

• des 3-cellules :

- ϵ dont le bord est pavé par deux exemplaires de δ et de chaque ν_j et un exemplaire de chaque ρ_k ;
- ζ_k dont le bord est pavé par deux exemplaires de μ_k et un exemplaire de ρ_k. Ce pavage, assez délicat, est lié à une propriété essentielle du mot $w_{a_k,b_k}(q_k, h)$, sera expliqué plus loin.

2.2. Groupes et générateurs de $H^*(M, \mathbb{Z}_p)$. On note $\hat{x}$ le dual de x. Sauf précision, les indices j sont des entiers vérifiant $1 \le j \le g'$ et sont absents si $g = 0$.

Théorème 2. Pour $p = 2$.
Les groupes de cohomologie à coefficients dans $\mathbb{Z}_2$ sont :

- $H^0(M, \mathbb{Z}_2) = \mathbb{Z}_2$ *et* $H^3(M, \mathbb{Z}_2) = \mathbb{Z}_2\{\gamma\}$.

$H^1(M, \mathbb{Z}_2)$ *et* $H^2(M, \mathbb{Z}_2)$ *dépendent des Cas 1,2,3 et non des* TYPES *:*
– Cas 1

- $H^1(M, \mathbb{Z}_2) = \mathbb{Z}_2^{g'+1} = \mathbb{Z}_2\{\theta_j, 1 \le j \le g'; \alpha\}$ *où* $\theta_j = [\hat{t}_j]$ *et* $\alpha = [\hat{h} - \sum b_k a_k^{-1} \hat{q}_k]$ *;*
- $H^2(M, \mathbb{Z}_2) = \mathbb{Z}_2^{g'+1} = \mathbb{Z}_2\{\varphi_j, 1 \le j \le g'; \beta\}$ *où* $\varphi_j = [\hat{\nu}_j]$ *et* $\beta = [\hat{\delta}]$.

– Cas 2

- $H^1(M, \mathbb{Z}_2) = \mathbb{Z}_2^{g'} = \mathbb{Z}_2\{\theta_j\}$ *où* $\theta_j = [\hat{t}_j]$ *;*
- $H^2(M, \mathbb{Z}_2) = \mathbb{Z}_2^{g'} = \mathbb{Z}_2\{\varphi_j\}$ *où* $\varphi_j = [\hat{\nu}_j]$.

– Cas 3

- $H^1(M, \mathbb{Z}_2) = \mathbb{Z}_2^{g'+n-1} = \mathbb{Z}_2\{\theta_j; \alpha_k, 0 < k \le n-1\}$ *où* $\theta_j = [\hat{t}_j]$ *et* $\alpha_k = [\hat{q}_k - \hat{q}_0]$ *;*
- $H^2(M, \mathbb{Z}_2) = \mathbb{Z}_2^{g'+n-1} = \mathbb{Z}_2\{\varphi_j; \beta_k\}$ *où* $\varphi_j = [\hat{\nu}_j]$ *et* $\beta_k = [\hat{\mu}_k]$ *pour* $0 < k$.

Pour $p > 2$.
Les groupes de cohomologie à coefficients dans $\mathbb{Z}_p$ sont :

- $H^0(M, \mathbb{Z}_p) = \mathbb{Z}_p$ *et* $H^3(M, \mathbb{Z}_p) = \mathbb{Z}_p\{\gamma\}$ *pour* o_1 *et* n_2 *tandis que* $H^3(M, \mathbb{Z}_p) = 0$ *pour* o_2, n_1, n_3, n_4.

$H^1(M, \mathbb{Z}_p)$ *et* $H^2(M, \mathbb{Z}_p)$ *dépendent des Cas 1,2,3 et du* TYPE *:*
TYPE o_1 *Les résultats sont les mêmes que lorsque* $p = 2$ *avec* $g' = 2g$ *éventuellement nul.*

TYPE o_2

– *Cas 1,2*

- $H^1(M,\mathbb{Z}_p) = \mathbb{Z}_p^{2g} = \mathbb{Z}_p\{\theta_j\}$ *où* $\theta_j = [\hat{t}_j]$ *;*
- $H^2(M,\mathbb{Z}_p) = \mathbb{Z}_p^{2g-1} = \mathbb{Z}_p\{\varphi_j;\beta\}$ *où* $\varphi_j = [\hat{v}_j + (-1)^j\hat{v}_1]$ *pour* $j > 2$ *et* $\beta = [\hat{\delta}]$.

– *Cas 3*

- $H^1(M,\mathbb{Z}_p) = \mathbb{Z}_p^{2g+n-1} = \mathbb{Z}_p\{\theta_j;\alpha_k\}$ *où* $\theta_j = [\hat{t}_j]$ *et* $\alpha_k = [\hat{q}_k - \hat{q}_0]$ *pour* $0 < k$ *;*
- $H^2(M,\mathbb{Z}_p) = \mathbb{Z}_p^{2g+n-1} = \mathbb{Z}_p\{\varphi_j;\beta_k\}$ *où* $\varphi_j = [\hat{v}_j + (-1)^j\hat{v}_1]$ *pour* $j > 2$ *et* $\beta_k = [\hat{\mu}_k]$.

TYPE n_1

– *Cas 1,2*

- $H^1(M,\mathbb{Z}_p) = \mathbb{Z}_p^{g} = \mathbb{Z}_p\{\theta_j;\alpha\}$ *où* $\theta_j = [\hat{t}_j - \hat{t}_1]$ *pour* $j > 1$ *et* $\alpha = [\frac{c}{2a}\hat{t}_1 + \hat{h} - \sum b_k a_k^{-1}\hat{q}_k]$, *la constante c étant égale à* 0 *dans le Cas 1 ;*
- $H^2 = \mathbb{Z}_p^{g-1} = \mathbb{Z}_p\{\varphi_j\}$ *où* $\varphi_j = [\hat{v}_j - \hat{v}_1]$ *pour* $j > 1$.

– *Cas 3*

- $H^1(M,\mathbb{Z}_p) = \mathbb{Z}_p^{g+n-1} = \mathbb{Z}_p\{\theta_j;\alpha_k\}$ *où* $\theta_j = [\hat{t}_j - \hat{t}_1]$ *pour* $j > 1$ *et* $\alpha_k = [\hat{q}_k - \frac{1}{2}\hat{t}_g]$ *;*
- $H^2(M,\mathbb{Z}_p) = \mathbb{Z}_p^{g+n-2} = \mathbb{Z}_p\{\varphi_j;\beta_k\}$ *où* $\varphi_j = [\hat{v}_j - \hat{v}_1]$ *pour* $j > 1$ *et* $\beta_k = [\hat{\mu}_k]$ *pour* $0 < k$.

TYPE n_2

– *Cas 1,2,3*

- $H^1(M,\mathbb{Z}_p) = \mathbb{Z}_p^{g-1+n} = \mathbb{Z}_p\{\theta_j, j > 1;\alpha_k\}$ *où* $\theta_j = [\hat{t}_j - \hat{t}_1]$ *pour* $j > 1$ *et* $\alpha_k = [\hat{q}_k - 1/2\hat{t}_g]$ *;*
- $H^2(M,\mathbb{Z}_p) = \mathbb{Z}_p^{n+g-1} = \mathbb{Z}_p\{\varphi_j;\beta_k\}$ *où* $\varphi_j = [\hat{v}_j]$ *pour* $j > 1$ *et* $\beta_k = [\hat{\mu}_k]$.

TYPE n_3

– *Cas 1,2,3*

- $H^1(M,\mathbb{Z}_p)$ *a les mêmes générateurs que pour le* TYPE n_2 *;*
- $H^2(M,\mathbb{Z}_p) = \mathbb{Z}_p^{g-2+n} = \mathbb{Z}_p\{\varphi_j;\beta_k\}$ *où* $\varphi_j = [\hat{v}_j]$ *pour* $j > 2$ *et* $\beta_k = [\hat{\mu}_k]$.

TYPE n_4

– *Cas 1,2,3*

- $H^1(M,\mathbb{Z}_p)$ *a les mêmes générateurs que pour le* TYPE n_2 *;*
- $H^2(M,\mathbb{Z}_p) = \mathbb{Z}_p^{g-2+n} = \mathbb{Z}_p\{\varphi_3;\varphi_j, j > 3;\beta_k\}$ *où* $\varphi_3 = [\hat{v}_2 - \hat{v}_1]$, $\varphi_j = [\hat{v}_j]$ *pour* $j > 3$ *et* $\beta_k = [\hat{\mu}_k]$.

Les quatre lemmes suivants constituent la preuve de ce théorème. Ils détaillent les bords des chaînes, les bords des cochaînes et les expressions de $H^1(M,\mathbb{Z}_p)$ et $H^2(M,\mathbb{Z}_p)$ pour un p premier quelconque.

De la décomposition cellulaire, on déduit la description suivante des bords des chaînes :

Lemme 3. *Bord des chaînes cellulaires*

$\partial\sigma = 0$, $\partial t_j = \partial q_k = \partial h = 0$, $\partial\rho_k = 0$,

$\partial\delta = \sum q_k$ *pour* o_i, $\partial\delta = 2\sum t_j + \sum q_k$ *pour* n_i,

$\partial v_j = 0$ *lorsque* $\varepsilon_j = 1$, $\partial v_j = 2h$ *lorsque* $\varepsilon_j = -1$,

$\partial\mu_k = a_k q_k + b_k h$,

$\partial\epsilon = \sum \rho_k$ *pour* o_1, $\partial\epsilon = \sum \rho_k + 2\sum(-1)^j \nu_j$ *pour* o_2, $\partial\epsilon = \sum \rho_k + 2\sum_{\epsilon_j=1} \nu_j$ *pour* n_i,
$\partial\zeta_k = -\rho_k$.

Par dualité, on obtient les bords des cochaînes :

Lemme 4. *Bord des cochaînes cellulaires*
$\partial\hat{\sigma} = 0$, $\partial\hat{\delta} = \partial\hat{\mu}_k = 0$, $\partial\hat{\epsilon} = \partial\hat{\zeta}_k = 0$,
$\partial\hat{t}_j = 0$ *pour* o_i, $\partial\hat{t}_j = 2\hat{\delta}$ *pour* n_i,
$\partial\hat{q}_k = \hat{\delta} + a_k\hat{\mu}_k$,
$\partial\hat{h} = \sum b_k\hat{\mu}_k + 2\sum_{\varepsilon_j=-1} \hat{\nu}_j$,
$\partial\hat{\nu}_j = 0$ *pour* o_1,n_2, *et pour* n_1,n_3,n_4 *lorsque* $\varepsilon_j = -1$,
$\partial\hat{\nu}_j = 2(-1)^j\hat{\epsilon}$ *pour* o_2, $\partial\hat{\nu}_j = 2\hat{\epsilon}$ *pour* n_1,n_3,n_4 *lorsque* $\varepsilon_j = 1$,
$\partial\hat{\rho}_k = \hat{\epsilon} - \hat{\zeta}_k$.

Quel que soit l'anneau de coefficients A, $H^0(M, A) = A$ est engendré par $1 := [\hat{\sigma}]$. Le groupe $H^3(M, \mathbb{Z}_p)$ est égal à A pour o_1 et n_2, et à $A/2A$ pour o_2, n_1, n_3, n_4. Il est engendré par $\gamma := [\hat{\epsilon}] = [\hat{\zeta}_k]$.

Lemme 5. *Présentation du groupe* $H^1(M, \mathbb{Z}_p)$
1) Quelque soit l'anneau de coefficients A, on a
$H^1(M, A) = \{x\hat{h} + \sum y_j\hat{t}_j + \sum z_k\hat{q}_k \mid x, y_j, z_k \in A, (*)\}$ *où la condition* $(*)$ *de cocycle est*

$$\forall k, a_k z_k + b_k x = 0,$$

avec en plus, pour n_i, $\sum z_k = 0$ *; pour* o_i, $\sum z_k = -2\sum y_j$ *; et pour* o_2, n_2, n_3, n_4, $2x = 0$.
2) Si l'anneau $A = \mathbb{Z}$, *ou* $\mathbb{Z}_p$ *avec* $p > 2$ *premier, ceci se simplifie en*
pour o_2, $H^1(M, A) = A^{2g} \times \{\sum z_k\hat{q}_k \mid z_k \in A, \forall k, a_k z_k = 0, \sum z_k = 0\}$ *;*
pour n_2, n_3, n_4, $H^1(M, A) = \{\sum y_j\hat{t}_j + \sum z_k\hat{q}_k \mid y_j, z_k \in A, \forall k, a_k z_k = 0, 2\sum y_j + \sum z_k = 0\}$.
3) Si l'anneau $A = \mathbb{Z}_2$, *ceci se simplifie pour tous les* TYPES *en*
$H^1(M, A) = \{x\hat{h} + \sum y_j\hat{t}_j + \sum z_k\hat{q}_k \mid x, y_j, z_k \in A, \forall k, a_k z_k + b_k x = 0, \sum z_k = 0\}$.

Lemme 6. *Présentation du groupe* $H^2(M, \mathbb{Z}_p)$
$H^2 = \{x\hat{\delta} + \sum y_j\hat{\nu}_j + \sum z_k\hat{\mu}_k \mid x, y_j, z_k \in A, (*)\}/Im(\partial)$ *où la condition* $(*)$ *est*
vide pour o_1, n_2 *; pour* o_2, $2\sum(-1)^j y_j = 0$ *; pour* n_1, n_3, n_4, $2\sum_{\varepsilon_j=1} y_j = 0$.
De plus $Im(\partial)$ *est engendré par les* $\hat{\delta} + a_k\hat{\mu}_k$, $\sum b_k\hat{\mu}_k + 2\sum_{\varepsilon_j=-1} \hat{\nu}_j$, *avec de plus* $2\hat{\delta}$ *pour* n_i.

3. Les théorèmes principaux

Théorème 7. *Pour* $p = 2$, *les seuls cup-produits* $\cup : H^1(M, \mathbb{Z}_2) \otimes H^1(M, \mathbb{Z}_2) \to H^2(M, \mathbb{Z}_2)$ *sont :*
– Dans le Cas 1 :

- $\boldsymbol{\theta_i \cup \theta_j}$
  - Pour les TYPES o_i, *les cup-produits* $\theta_i \cup \theta_j$ *sont nuls sauf* $\theta_{2i} \cup \theta_{2i-1} = \beta$ *;*
  - Pour les TYPES n_i, *les cup-produits* $\theta_i \cup \theta_j$ *sont nuls sauf* $\theta_i \cup \theta_i = \beta$.
- $\boldsymbol{\theta_j \cup \alpha}$
  - Pour tous les TYPES, *on a* $\theta_j \cup \alpha = \varphi_j$.
- $\boldsymbol{\alpha \cup \alpha}$
  - Pour les TYPES o_1 *et* n_1, *on a* $\alpha \cup \alpha = c/2\beta$ *;*

- *Pour les* Types o_2 *et* n_2, *on a* $\alpha \cup \alpha = c/2\beta + \sum_{1\le j} \varphi_j$ *;*
- *Pour le* Type n_3, *on a* $\alpha \cup \alpha = c/2\beta + \sum_{j>1} \varphi_j$ *;*
- *Pour le* Type n_4, *on a* $\alpha \cup \alpha = c/2\beta + \sum_{j>2} \varphi_j$.[2]

– Dans le Cas 2 :

- $\boldsymbol{\theta_i \cup \theta_j}$
  - *Pour tous les* Types, $\theta_i \cup \theta_j = 0$.

– Dans le Cas 3 :

- $\boldsymbol{\theta_i \cup \theta_j}$
  - *Pour tous les* Types, *on a* $\theta_i \cup \theta_j = 0$.
- $\boldsymbol{\theta_j \cup \alpha_k}$
  - *Pour tous les* Types, *on a* $\theta_j \cup \alpha_k = 0$.
- $\boldsymbol{\alpha_k \cup \alpha_i}$
  - *Pour tous les* Types, *on a* $\alpha_k \cup \alpha_i = \frac{a_0}{2} \sum_{0<\ell\le n-1} \beta_\ell + \delta_{k,\ell} \frac{a_k}{2} \beta_k$.

Théorème 8. *Pour* $p = 2$, *les seuls cup-produits* $\cup : H^1(M,\mathbb{Z}_2) \otimes H^2(M,\mathbb{Z}_2) \to H^3(M,\mathbb{Z}_2)$ *sont :*
– Dans les trois Cas :

- $\boldsymbol{\theta_i \cup \varphi_j}$
  - *Pour les* Types o_i, *les* $\theta_i \cup \varphi_j$ *non nuls sont :*
  si j *est impair* $\theta_{j+1} \cup \varphi_j = \gamma$, *si* j *est pair* $\theta_{j-1} \cup \varphi_j = \gamma$ *;*
  - *Pour les* Types n_i, *on a* $\theta_j \cup \varphi_j = \gamma$ *et 0 sinon.*

– Dans le Cas 1 :

- $\boldsymbol{\alpha \cup \varphi_j}$
  - *Pour les* Types o_1 *et* n_1, $\alpha \cup \varphi_j = 0$ *;*
  - *Pour les* Types o_2 *et* n_2, $\alpha \cup \varphi_j = \gamma$ *;*
  - *Pour le* Type n_3, $\alpha \cup \varphi_j = \gamma$ *si* $j \neq 1$ *et 0 sinon ;*
  - *Pour le* Type n_4, $\alpha \cup \varphi_j = \gamma$ *si* $j \neq 1, 2$ *et 0 sinon.*
- $\boldsymbol{\theta_i \cup \beta}$
  - *Pour tous les* Types, $\theta_i \cup \beta = 0$.
- $\boldsymbol{\alpha \cup \beta}$
  - *Pour tous les* Types, $\alpha \cup \beta = \gamma$.

– Dans le Cas 3 :

- $\boldsymbol{\alpha_k \cup \varphi_j}$
  - *Pour tous les* Types, $\alpha_k \cup \varphi_j = 0$.
- $\boldsymbol{\alpha_k \cup \beta_k}$
  - *Pour tous les* Types, $\alpha_k \cup \beta_k = \gamma$ *et 0 sinon.*
- $\boldsymbol{\theta_i \cup \beta_j}$
  - *Pour tous les* Types, $\theta_i \cup \beta_k = 0$.

Théorème 9. *Pour* $p > 2$,
– Dans le Cas 1, les seuls cup-produits $\cup : H^1(M,\mathbb{Z}_p) \otimes H^1(M,\mathbb{Z}_p) \to H^2(M,\mathbb{Z}_p)$ *sont :*

[2] Dans [5], Theorem 1.3 (i), le coefficient de β devrait être remplacé par $c/2$.

- $\boldsymbol{\theta_i \cup \theta_j}$
  - *Pour les* Types o_i, *les cup-produits* $\theta_i \cup \theta_j$ *sont nuls sauf* $\theta_{2i-1} \cup \theta_{2i} = \beta$ *;*
  - *Pour les* Types n_i, *les cup-produits* $\theta_i \cup \theta_j$ *sont nuls.*
- $\boldsymbol{\theta_j \cup \alpha}$
  - *Pour le* Type o_1, *on a* $\theta_j \cup \alpha = \varphi_j$ *;*
  - *Pour le* Type n_1, *on a* $\theta_j \cup \alpha = \varphi_j$, $j > 1$.

- $\boldsymbol{\alpha \cup \alpha}$
  - *Pour les* Types o_1 *et* n_1, *les cup-produits* $\alpha \cup \alpha$ *sont nuls.*

– Dans le Cas 2, les seuls cup-produits $\cup : H^1(M,\mathbb{Z}_p) \otimes H^1(M,\mathbb{Z}_p) \to H^2(M,\mathbb{Z}_p)$ *sont :*

- $\boldsymbol{\theta_i \cup \theta_j}$
  - *Pour le* Type o_2, *les cup-produits* $\theta_i \cup \theta_j$ *sont nuls sauf* $\theta_{2i-1} \cup \theta_{2i} = \beta$ *;*
  - *Pour tous les autres* Types, $\theta_i \cup \theta_j = 0$.
- $\boldsymbol{\theta_j \cup \alpha}$
  - *Pour le* Type n_1, *on a* $\theta_j \cup \alpha = \varphi_j$, $j > 1$.

– Dans le Cas 3, les seuls cup-produits $\cup : H^1(M,\mathbb{Z}_p) \otimes H^1(M,\mathbb{Z}_p) \to H^2(M,\mathbb{Z}_p)$ *sont :*

- $\boldsymbol{\theta_i \cup \theta_j}$
  - *Pour tous les* Types, *on a* $\theta_i \cup \theta_j = 0$.
- $\boldsymbol{\theta_j \cup \alpha_k}$
  - *Pour tous les* Types, *on a* $\theta_j \cup \alpha_k = 0$.
- $\boldsymbol{\alpha_k \cup \alpha_i}$
  - *Pour tous les* Types, *on a* $\alpha_k \cup \alpha_i = 0$ *sont nuls.*

Théorème 10. *Pour* $p > 2$, *les seuls cup-produits* $\cup : H^1(M,\mathbb{Z}_p) \otimes H^2(M,\mathbb{Z}_p) \to H^3(M,\mathbb{Z}_p)$ *sont :*
– Dans les trois Cas :

- $\boldsymbol{\theta_i \cup \varphi_j}$
  - *Pour le* Type o_1, *on a pour j impair* $\theta_{j+1} \cup \varphi_j = -\gamma$ *et pour j pair* $\theta_{j-1} \cup \varphi_j = \gamma$ *;*
  - *Pour le* Type n_2, *on a* $\theta_j \cup \varphi_j = \gamma$, *et 0 sinon.*

– Dans le Cas 1, pour tous les Types *:*

- $\boldsymbol{\theta_i \cup \beta = 0}$
- $\boldsymbol{\alpha \cup \beta = \gamma}$
- $\boldsymbol{\alpha \cup \varphi_j = 0}$

– Dans le Cas 3 :

- $\boldsymbol{\alpha_i \cup \beta_k}$
  - *Pour les* Types o_1 *et* n_2, *on a* $\alpha_i \cup \beta_k = 0$ *sauf si* $i = k$ *et dans cette situation on a* $\alpha_k \cup \beta_k = b_k^{-1}\gamma$.
- $\boldsymbol{\alpha_k \cup \varphi_j}$
  - *Pour le* Type o_1, *on a* $\alpha_k \cup \varphi_j = 0$.
- $\boldsymbol{\alpha_k \cup \varphi_j}$
  - *Pour le* Type n_2, *pour tout indice k, on a* $\alpha_k \cup \varphi_g = -\frac{1}{2}\gamma$.

4. Décomposition Δ-simpliciale

Avant de décrire le découpage Δ-simplicial, nous donnons la définition et les propriétés du mot $w_{a_k,b_k}(q_k,h)$ qui permet de paver la sphère bordant ζ_k comme décrit dans 2.1.

4.1. Définition et propriétés de $w_{\alpha,\beta}$. Le cas $a_k = 1, b_k \leq 0$ sera très simple, mais dans le cas général $a_k, b_k > 0$, pour pouvoir paver comme évoqué dans 2.1 la sphère bordant ζ_k, le bord $w_{a_k,b_k}(q_k,h)$ de μ_k doit être un mot tel qu'en effectuant sur ce mot une certaine permutation circulaire et en remplaçant un certain hq_k par q_kh, on retombe sur le mot de départ. C'est cette propriété qui permet le pavage de la sphère par deux exemplaires de μ_k et un exemplaire de ρ_k pour former le bord de la 3-cellule ζ_k.

DÉFINITION 11. Le mot $w_{\alpha,\beta}$ (pour α,β premiers entre eux) est défini récursivement par :
$w_{1,0}(a,t) = a, w_{0,1}(a,t) = t, w_{1,1}(a,t) = at$,
si $0 < \alpha < \beta, w_{\alpha,\alpha+\beta}(a,t) = w_{\alpha,\beta}(at,t)$,
si $0 < \beta < \alpha, w_{\alpha+\beta,\beta}(a,t) = w_{\alpha,\beta}(a,at)$, si bien que le mot $w_{\alpha,\beta}(a,t)$ contient α fois la lettre a et β fois la lettre t.

Par une preuve similaire à celle des articles [12], [10], [7], [9], on montre que ces mots $w_{\alpha,\beta}$ vérifient les relations suivantes :

Proposition 12. *Soient α,β,u,v entiers tels que*

$$\alpha u - \beta v = 1, \qquad 0 < u \leq \beta, \qquad 0 \leq v < \alpha,$$

alors

$$w_{\alpha,\beta}(a,t) = w_{\alpha-v,\beta-u}(a,t)w_{v,u}(a,t) = (w_{v,u}(a,t)t^{-1})at(a^{-1}w_{\alpha-v,\beta-u}(a,t)).$$

Notations 13. *Dans la suite, nous appliquerons ce théorème à $\alpha = a_k, \beta = b_k$ et noterons u_k, v_k les entiers u, v correspondants. En notant $w_{a_k,b_k}(q_k,h)$ sous la forme $x_{k,1} \dots x_{k,z_k}$ avec les $x_{k,i}$ égaux à q_k (pour a_k d'entre eux dont le premier) ou h (pour b_k d'entre eux dont le dernier) (donc $z_k = a_k + b_k$), le théorème exprime que pour $w_k = z_k - u_k - v_k + 1$, le mot $w_{a_k,b_k}(q_k,h)$ est aussi égal à $x_{k,w_k} \dots x_{k,z_k-1}q_khx_{k,2} \dots x_{k,w_k-1}$, et que de plus, le morceau $x_{k,w_k} \dots x_{k,z_k}$ de ce mot contient v_k fois q_k et u_k fois h.*

Dans le cas $b_k \leq 0$ (donc $a_k = 1$), nous poserons $u_k = 1, v_k = 0, w_k = z_k = 1 + |b_k|$, et $x_{k,1} = q_k$, $x_{k,\ell} = h$ pour $2 \leq \ell \leq z_k$.

4.2. Découpage Δ-simplicial. Transformons ce complexe cellulaire en complexe Δ-simplicial en rajoutant :
• un centre et des rayons aux 2-cellules δ et μ_k, pour remplacer chacune par une juxtaposition de triangles ;
• une "diagonale" aux ν_j, ρ_k, pour remplacer chacun par deux triangles ;
• pour chacune des 3-cellules ϵ, ζ_k, dont le bord est une sphère pavée par les 2-simplexes déjà construits : un centre, des rayons joignant ce centre aux sommets marqués sur la sphère ; des triangles joignant ce centre aux arêtes marquées sur la sphère, de manière à remplacer chaque 3-cellule par une juxtaposition de tétraèdres.

Plus précisément, on remplace la décomposition cellulaire ci-dessus par la décomposition Δ-simpliciale suivante.

1) Le 0-simplexe σ et les 1-simplexes $t_j, q_k, h,$.

2) Découpage des ρ_k**,** Figure 5 :

• des 1-simplexes g_k (d'origine et d'extrémité σ) et des 2-simplexes $\rho_{k,1}, \rho_{k,2}$, (de faces respectives $(h, g_k, q_k), (q_k, g_k, h)$).

3) Découpage des ν_j**,** Figures 6, 7, 8 :

• des 1-simplexes f_j (d'origine et d'extrémité σ) et des 2-simplexes $\nu_{j,2}$ (de faces (t_j, f_j, h)) et $\nu_{j,1}$ (de faces (h, f_j, t_j) si $\varepsilon_j = 1$, (h, t_j, f_j) si $\varepsilon_j = -1$).

4) Découpage de δ**,** Figures 9, 10 :
Dans le découpage de δ, ϵ, il faudra distinguer les TYPES o_1, o_2, n_1 à n_4 :

• Un 0-simplexe a, des 1-simplexes $e_0, \ldots, e_{2g'+m}$ (d'origine a et d'extrémité σ). On rappelle que le symbole g' est égal à $2g$ pour le $\Upsilon = o_i$, et à g pour le $\Upsilon = n_i$.

• des 2-simplexes $\delta_0, \ldots, \delta_{2g'+m}$, plus précisément :
− pour les TYPES o_1, o_2 : δ_i, de faces, respectivement
$(t_1, e_1, e_0), (t_2, e_2, e_1), (t_1, e_2, e_3), (t_2, e_3, e_4), \ldots, (q_0, e_{4g+1}, e_{4g}), \ldots, (q_m, e_0, e_{4g+m})$;
− pour les TYPES n_1 à n_4 :
$(t_1, e_1, e_0), (t_1, e_2, e_1), \ldots, (q_0, e_{2g+1}, e_{2g}), \ldots, (q_m, e_0, e_{2g+m})$.

5) Découpage de chaque μ_k**,** Figure 11, 12 :
Dans le découpage de μ_k, ζ_k il faudra distinguer le cas particulier $b_k \leq 0$ (et $a_k = 1$) du cas général :

• Un 0-simplexe c_k, des 1-simplexes $p_{k,1}, \ldots, p_{k,z_k}$ (d'origine c_k et d'extrémité σ) ;

• des 2-simplexes $\mu_{k,1}, \ldots, \mu_{k,z_k}$, de faces :

- si $b_k > 0$: $(x_{k,1}, p_{k,2}, p_{k,1}), \ldots, (x_{k,z_k}, p_{k,1}, p_{k,z_k})$
- si $b_k < 0$: $(q_k, p_{k,2}, p_{k,1}), (h, p_{k,2}, p_{k,3}), \ldots, (h, p_{k,z_k}, p_{k,1})$
- si $b_k = 0$: $(q_k, p_{k,1}, p_{k,1})$.

6) Découpage de ϵ**,** Figures 13 à 17 :

• un 0-simplexe b ;

• des 1-simplexes A^+, A^- (d'origine b, d'extrémité a) ;

• des 1-simplexes $S_0^+, \ldots, S_{2g'+m}^+, S_0^-, \ldots, S_{2g'+m}^-$ (d'origine b et d'extrémité σ),
et des 2-simplexes $E_0^+, \ldots, E_{2g'+m}^+, E_0^-, \ldots, E_{2g'+m}^-$ avec $E_\ell^\pm$ de faces $(e_\ell, S_\ell^\pm, A^\pm)$;

• des 2-simplexes $T_0^+, \ldots, T_{2g'+m}^+, T_0^-, \ldots T_{2g'+m}^-$, plus précisément :
- pour les TYPES o_1, o_2 : $T_0^\pm, \ldots, T_{4g+m}^\pm$ de faces
$(t_1, S_1^\pm, S_0^\pm), (t_2, S_2^\pm, S_1^\pm), (t_1, S_2^\pm, S_3^\pm), (t_2, S_3^\pm, S_4^\pm), \ldots, (q_m, S_0^\pm, S_{4g+m}^\pm)$;
- pour les TYPES n_1 à n_4 : $T_0^\pm, \ldots, T_{2g+m}^\pm$ de faces
$(t_1, S_1^\pm, S_0^\pm), (t_1, S_2^\pm, S_1^\pm), \ldots, (q_m, S_0^\pm, S_{2g+m}^\pm)$.

Notations 14. *Ici la notation $T_0^{\pm}$ de faces $(t_1, S_1^{\pm}, S_0^{\pm})$ signifie que les faces de T_0^+ sont (t_1, S_1^+, S_0^+) et celles de T_0^- sont (t_1, S_1^-, S_0^-) etc.*

• des 2-simplexes $H_0, \ldots, H_{2g'+m}$:
les faces de H_ℓ étant en général (h, S_ℓ^+, S_ℓ^-), mais étant (h, S_ℓ^-, S_ℓ^+) si $\ell = 2j-1 < 2g'$ avec $\varepsilon_j = -1$, i.e. dans les Types suivants : Type o_2, ℓ impair $< 4g$; Type n_2, ℓ impair $< 2g$; Type n_3, ℓ impair, $3 \leq \ell < 2g$; Type n_4, ℓ impair, $5 \leq \ell < 2g$;

• des 2-simplexes $F_0, \ldots, F_{2g'+m}$, de faces :
- pour le Type o_1 : $(f_1, S_1^+, S_0^-), (f_2, S_2^+, S_1^-), (f_1, S_2^+, S_3^-),$
$(f_2, S_3^+, S_4^-), \ldots, (g_m, S_0^+, S_{4g+m}^-)$;
- pour le Type o_2 : $(f_1, S_1^+, S_0^-), (f_2, S_2^-, S_1^+), (f_1, S_2^-, S_3^+),$
$(f_2, S_3^+, S_4^-), \ldots, (g_m, S_0^+, S_{4g+m}^-)$;
- pour le Type n_1 : $(f_1, S_1^+, S_0^-), (f_1, S_2^+, S_1^-), \ldots, (g_m, S_0^+, S_{2g+m}^-)$;
- pour le Type n_2 : $(f_1, S_1^+, S_0^-), (f_1, S_2^-, S_1^+), \ldots, (g_m, S_0^+, S_{2g+m}^-)$;
- pour le Type n_3 : $(f_1, S_1^+, S_0^-), (f_1, S_2^+, S_1^-), (f_2, S_3^+, S_2^-),$
$(f_2, S_4^-, S_3^+), \ldots, (g_m, S_0^+, S_{2g+m}^-)$;
- pour le Type n_4 : $(f_1, S_1^+, S_0^-), (f_1, S_2^+, S_1^-), (f_2, S_3^+, S_2^-), (f_2, S_4^+, S_3^-),$
$(f_3, S_5^+, S_4^-), (f_3, S_6^-, S_5^+), \ldots, (g_m, S_0^+, S_{2g+m}^-)$;

• des 3-simplexes $D_0^+, \ldots, D_{2g'+m}^+, D_0^-, \ldots, D_{2g'+m}^-$, plus précisément :
- pour les Types o_1, o_2 : $D_0^{\pm}, \ldots, D_{4g+m}^{\pm}$ de faces
$(\delta_0, T_0^{\pm}, E_1^{\pm}, E_0^{\pm}), (\delta_1, T_1^{\pm}, E_2^{\pm}, E_1^{\pm}), (\delta_2, T_2^{\pm}, E_2^{\pm}, E_3^{\pm}), (\delta_3, T_3^{\pm}, E_3^{\pm}, E_4^{\pm}),$
$\ldots, (\delta_{4g+m}, T_{4g+m}^{\pm}, E_0^{\pm}, E_{4g+m}^{\pm})$;
- pour les Types n_1 à n_4 : $D_0^{\pm}, \ldots, D_{2g+m}^{\pm}$ de faces
$(\delta_0, T_0^{\pm}, E_1^{\pm}, E_0^{\pm}), \ldots, (\delta_{2g+m}, T_{2g+m}^{\pm}, E_0^{\pm}, E_{2g+m}^{\pm})$;

• des 3-simplexes $N_{j,1}, N'_{j,1}, N_{j,2}, N'_{j,2}$ de faces,
- pour le Type o_1 :
si j impair, $(\nu_{j,1}, H_{2j-1}, F_{2j-2}, T_{2j-2}^-), (\nu_{j,1}, H_{2j}, F_{2j}, T_{2j}^-),$
$(\nu_{j,2}, T_{2j-2}^+, F_{2j-2}, H_{2j-2}), (\nu_{j,2}, T_{2j}^+, F_{2j}, H_{2j+1})$
si j pair, $(\nu_{j,1}, H_{2j-2}, F_{2j-3}, T_{2j-3}^-), (\nu_{j,1}, H_{2j-1}, F_{2j-1}, T_{2j-1}^-),$
$(\nu_{j,2}, T_{2j-3}^+, F_{2j-3}, H_{2j-3}), (\nu_{j,2}, T_{2j-1}^+, F_{2j-1}, H_{2j})$;
- pour le Type o_2 :
si j impair, $(\nu_{j,1}, H_{2j-1}, T_{2j-2}^-, F_{2j-2}), (\nu_{j,1}, H_{2j}, T_{2j}^+, F_{2j}),$
$(\nu_{j,2}, T_{2j-2}^+, F_{2j-2}, H_{2j-2}), (\nu_{j,2}, T_{2j}^-, F_{2j}, H_{2j+1}),$
si j pair, $(\nu_{j,1}, H_{2j-2}, T_{2j-3}^+, F_{2j-3}), (\nu_{j,1}, H_{2j-1}, T_{2j-1}^-, F_{2j-1}),$
$(\nu_{j,2}, T_{2j-3}^-, F_{2j-3}, H_{2j-3}), (\nu_{j,2}, T_{2j-1}^+, F_{2j-1}, H_{2j})$;
- pour les Types n_1 à n_4 :
si $\varepsilon_j = 1$, $(\nu_{j,1}, H_{2j-1}, F_{2j-2}, T_{2j-2}^-), (\nu_{j,1}, H_{2j}, F_{2j-1}, T_{2j-1}^-),$
$(\nu_{j,2}, T_{2j-2}^+, F_{2j-2}, H_{2j-2}), (\nu_{j,2}, T_{2j-1}^+, F_{2j-1}, H_{2j-1})$;
si $\varepsilon_j = -1$, $(\nu_{j,1}, H_{2j-1}, T_{2j-2}^-, F_{2j-2}), (\nu_{j,1}, H_{2j}, T_{2j-1}^+, F_{2j-1}),$
$(\nu_{j,2}, T_{2j-2}^+, F_{2j-2}, H_{2j-2}), (\nu_{j,2}, T_{2j-1}^-, F_{2j-1}, H_{2j-1})$;

• des 3-simplexes $R_{k,1}, R_{k,2}$,
de faces $(\rho_{k,1}, H_{2g'+k+1}, F_{2g'+k}, T_{2g'+k}^-), (\rho_{k,2}, T_{2g'+k}^+, F_{2g'+k}, H_{2g'+k})$
(avec par convention $H_{2g'+m+1} = H_0$).

7) Découpage de chaque ζ_k, Figures 18, 19, 20 :

• un 0-simplexe d_k ;

• des 1-simplexes C_k^+, C_k^- (d'origine d_k et d'extrémité c_k) et $S_{k,0}, \ldots, S_{k,z_k}$ (d'origine d_k et d'extrémité σ) ;

• des 2-simplexes $P_{k,1}^-, \ldots, P_{k,z_k}^-$ de faces $(p_{k,1}, S_{k,1}, C_k^-), \ldots, (p_{k,z_k}, S_{k,z_k}, C_k^-)$;

• des 2-simplexes $P_{k,1}^+, \ldots, P_{k,z_k}^+$ de faces
  - si $b_k > 0$, $(p_{k,1}, S_{k,w_k}, C_k^+), \ldots, (p_{k,z_k-w_k+1}, S_{k,z_k}, C_k^+)$, $(p_{k,z_k-w_k+2}, S_{k,0}, C_k^+), (p_{k,z_k-w_k+3}, S_{k,2}, C_k^+), \ldots, (p_{k,z_k}, S_{k,w_k-1}, C_k^+)$
  - si $b_k < 0$, $(p_{k,1}, S_{k,0}, C_k^+), (p_{k,2}, S_{k,3}, C_k^+), \ldots, (p_{k,z_k}, S_{k,1}, C_k^+)$
  - si $b_k = 0$, $(p_{k,1}, S_{k,0}, C_k^+)$;

• des 2-simplexes $X_{k,1}, \ldots, X_{k,z_k}$, de faces
  - si $b_k > 0$, $(x_{k,1}, S_{k,2}, S_{k,1}), \ldots, (x_{k,z_k}, S_{k,1}, S_{k,z_k})$,
  - si $b_k < 0$, $(q_k, S_{k,2}, S_{k,1}), (h, S_{k,2}, S_{k,3}), \ldots, (h, S_{k,z_k}, S_{k,1})$,
  - si $b_k = 0$, $(q_k, S_{k,1}, S_{k,1})$;

• des 2-simplexes Q_k, H'_k, G_k de faces
  - si $b_k > 0$, $(q_k, S_{k,0}, S_{k,z_k}), (h, S_{k,2}, S_{k,0}), (g_k, S_{k,2}, S_{k,z_k})$,
  - si $b_k < 0$, $(q_k, S_{k,3}, S_{k,0}), (h, S_{k,1}, S_{k,0}), (g_k, S_{k,2}, S_{k,0})$,
  - si $b_k = 0$, $(q_k, S_{k,0}, S_{k,0}), (h, S_{k,1}, S_{k,0}), (g_k, S_{k,1}, S_{k,0})$;

• des 3-simplexes $M_{k,1}^-, \ldots, M_{k,z_k}^-$, de faces
  - si $b_k > 0$, $(\mu_{k,1}, X_{k,1}, P_{k,2}^-, P_{k,1}^-), \ldots, (\mu_{k,z_k}, X_{k,z_k}, P_{k,1}^-, P_{k,z_k}^-)$,
  - si $b_k < 0$, $(\mu_{k,1}, X_{k,1}, P_{k,2}^-, P_{k,1}^-), (\mu_{k,2}, X_{k,2}, P_{k,2}^-, P_{k,3}^-), \ldots$, $(\mu_{k,z_k}, X_{k,z_k}, P_{k,z_k}^-, P_{k,1}^-)$,
  - si $b_k = 0$, $(\mu_{k,1}, X_{k,1}, P_{k,1}^-, P_{k,1}^-)$;

• des 3-simplexes $M_{k,1}^+, \ldots, M_{k,z_k}^+$ de faces
  - si $b_k > 0$, $(\mu_{k,1}, X_{k,w_k}, P_{k,2}^+, P_{k,1}^+), \ldots, (\mu_{k,z_k-w_k+1}, Q_k, P_{k,z_k-w_k+2}^+, P_{k,z_k-w_k+1}^+)$, $(\mu_{k,z_k-w_k+2}, H'_k, P_{k,z_k-w_k+3}^+, P_{k,z_k-w_k+2}^+), \ldots, (\mu_{k,z_k}, X_{k,w_k-1}, P_{k,1}^+, P_{k,z_k}^+)$,
  - si $b_k < 0$, $(\mu_{k,1}, Q_k, P_{k,2}^+, P_{k,1}^+), (\mu_{k,2}, X_{k,3}, P_{k,2}^+, P_{k,3}^+), \ldots$, $(\mu_{k,z_k-1}, X_{k,z_k}, P_{k,z_k-1}^+, P_{k,z_k}^+), (\mu_{k,z_k}, H'_k, P_{k,z_k}^+, P_{k,1}^+)$,
  - si $b_k = 0$, $(\mu_{k,1}, Q_k, P_{k,1}^+, P_{k,1}^+)$;

• des 3-simplexes $R'_{k,1}, R'_{k,2}$ de faces
  - si $b_k > 0$, $(\rho_{k,1}, H'_k, G_k, Q_k), (\rho_{k,2}, X_{k,1}, G_k, X_{k,z_k})$,
  - si $b_k < 0$, $(\rho_{k,1}, X_{k,2}, G_k, Q_k), (\rho_{k,2}, X_{k,1}, G_k, H'_k)$,
  - si $b_k = 0$, $(\rho_{k,1}, H'_k, G_k, Q_k), (\rho_{k,2}, X_{k,1}, G_k, H'_k)$.

5. Morphisme des cellules vers les Δ-simplexes

Définition 15. On note T l'application définie sur les générateurs du complexe des chaînes cellulaires vers ceux des chaînes Δ-simpliciales par :
• T envoie les 0- et 1-cellules σ et t_j, q_k, h sur les 0- et 1-Δ-simplexes du même nom,

- $T(\rho_k) = \rho_{k,1} - \rho_{k,2}$,
- $T(\nu_j) = \nu_{j,1} - \varepsilon_j \nu_{j,2}$,
- $T(\mu_k)$, $1 \leq \ell \leq z_k$ (voir Sous-section 4.1),
  - si $b_k \geq 0$: $T(\mu_k) = \sum \mu_{k,\ell}$,
  - si $b_k \leq 0$: $T(\mu_k) = \mu_{k,1} - \sum_{\ell>1} \mu_{k,\ell}$,
- $T(\delta)$
  - pour les Types o_i : $T(\delta) = \sum_{i=0}^{g-1}(\delta_{4i} + \delta_{4i+1} - \delta_{4i+2} - \delta_{4i+3}) + \sum_{\ell=4g}^{4g+m} \delta_\ell$,
  - pour les Types n_i : $T(\delta) = \sum \delta_\ell$,
- $T(\epsilon)$, en notant $D'_\ell := D^+_\ell - D^-_\ell$,
  - pour le Type o_1 : $T(\epsilon) = \sum_{k=0}^{m}(R_{k,1} - R_{k,2}) + \sum_{\ell=4g}^{4g+m} D'_\ell + \sum_{i=0}^{g-1}(D'_{4i} + D'_{4i+1} - D'_{4i+2} - D'_{4i+3}) + \sum(N_{j,1} - N_{j,2} - N'_{j,1} + N'_{j,2})$,
  - pour le Type o_2 : $T(\epsilon) = \sum_{k=0}^{m}(R_{k,1} - R_{k,2}) + \sum_{\ell=4g}^{4g+m} D'_\ell + \sum_{i=0}^{g-1}(D'_{4i} + D'_{4i+1} - D'_{4i+2} - D'_{4i+3}) + \sum(-1)^j(N_{j,1} + N_{j,2} + N'_{j,1} + N'_{j,2})$,
  - pour les Types n_i : $T(\epsilon) = \sum_{k=0}^{m}(R_{k,1} - R_{k,2}) + \sum_{\ell=2g}^{2g+m} D'_\ell + \sum_{i=0}^{2g-1} D'_j + \sum_{\varepsilon_j=1}(N_{j,1} - N_{j,2} + N'_{j,1} - N'_{j,2}) + \sum_{\varepsilon_j=-1}(-N_{j,1} - N_{j,2} + N'_{j,1} + N'_{j,2})$,
- $T(\zeta_k)$, en notant $M'_{k,\ell} := M^+_{k,\ell} - M^-_{k,\ell}$,
  - si $b_k \geq 0$: $T(\zeta_k) = -R'_{k,1} + R'_{k,2} + \sum M'_{k,\ell}$,
  - si $b_k \leq 0$: $T(\zeta_k) = -R'_{k,1} + R'_{k,2} + M'_{k,1} - \sum_{\ell>1} M'_{k,\ell}$.

Proposition 16. *L'application T définie ci-dessus est un quasi-isomorphisme du complexe des chaînes cellulaires vers celui des chaînes Δ-simpliciales.*
On en déduit un quasi-isomorphisme T^t, du complexe des cochaînes Δ-simpliciales vers celui des cochaînes cellulaires : $(T^t(f))(s) := f(T(s))$.

6. Relevé des cocycles cellulaires en cocycles Δ-simpliciaux

6.1. Bord du complexe des cochaînes Δ-simpliciales. Pour chaque générateur $\xi = [\hat{\xi}]$, le but des deux sections suivantes est de *choisir* un relevé de T^t, noté $R(\hat{\xi})$, i.e. tel que $T^t R(\hat{\xi}) = \hat{\xi}$ avec la propriété supplémentaire d'être un cocycle (et pas seulement une cochaîne).

Pour alléger la présentation, on n'écrira (en commençant à regrouper) que les bords qui seront utiles dans la partie suivante pour expliciter des représentants des générateurs.

Le bord est nul sur toutes les 3-cochaînes, et le bord de la 0-cochaîne $\hat{\sigma}+\hat{a}+\hat{b}+\sum \hat{c}_k+\sum \hat{d}_k$ est nul.

Posons $U_\ell = \hat{F}_\ell + \hat{\delta}_\ell + \hat{T}^\pm_\ell$. Ici et dans la suite cette notation est à comprendre de la façon suivante : $U_\ell = \hat{F}_\ell + \hat{\delta}_\ell + \hat{T}^+_\ell + \hat{T}^-_\ell$.

Bords des 1-cochaînes Δ-simpliciales :

Lemme 17. *Pour les* Types o_1, o_2
— $\partial \hat{t}_j = \varepsilon_j \hat{\nu}_{j,1} + \hat{\nu}_{j,2} + \hat{T}^\pm_{2j-2} + \hat{T}^\pm_{2j} + \hat{\delta}_{2j-2} + \hat{\delta}_{2j}$ *si j impair, et* $\varepsilon_j \hat{\nu}_{j,1} + \hat{\nu}_{j,2} + \hat{T}^\pm_{2j-3} + \hat{T}^\pm_{2j-1} + \hat{\delta}_{2j-3} + \hat{\delta}_{2j-1}$ *si j pair*
— $\partial \hat{f}_j = -\varepsilon_j \hat{\nu}_{j,1} - \hat{\nu}_{j,2} + \hat{F}_{2j-2} + \hat{F}_{2j}$ *si j impair,* $\hat{F}_{2j-3} + \hat{F}_{2j-1}$ *si j pair*
— $\partial(\hat{t}_j + \hat{f}_j) = U_\ell + U_{\ell-2}$ *avec $\ell = 2j$ si j impair et $\ell = 2j-1$ si j pair*

Pour les TYPES n_1 *à* n_4
— $\partial\hat{t}_j = \varepsilon_j\hat{v}_{j,1} + \hat{v}_{j,2} + \hat{T}^{\pm}_{2j-2} + \hat{T}^{\pm}_{2j-1} + \hat{\delta}_{2j-2} + \hat{\delta}_{2j-1}$
— $\partial\hat{f}_j = -\varepsilon_j\hat{v}_{j,1} - \hat{v}_{j,2} + \hat{F}_{2j-2} + \hat{F}_{2j-1}$

Pour les TYPES o_1, o_2 *et* n_1 *à* n_4
— $\partial(\hat{h} + \sum\hat{f}_j + \sum\hat{q}_k) = \sum(\hat{H}_\ell + \hat{F}_\ell) + \sum_k(\hat{H}'_k + \hat{G}_k + \sum_{x_{k,i}=h}(\hat{\mu}_{k,i} + \hat{X}_{k,i}))$
— $\partial\hat{q}_k = \hat{\rho}_{k,1} + \hat{\rho}_{k,2} + \hat{\delta}_{2g'+k} + \hat{T}^{\pm}_{2g'+k} + \sum_{x_{k,i}=q_k}(\hat{\mu}_{k,i} + \hat{X}_{k,i}) + \hat{Q}_k$
— $\partial\hat{g}_k = -\hat{\rho}_{k,1} - \hat{\rho}_{k,2} + \hat{F}_{2g'+k} + \hat{G}_k$
— $\partial\hat{p}_{k,\ell} = \hat{P}^{\pm}_{k,\ell} + \hat{\mu}_{k,\ell} - \hat{\mu}_{k,\ell-1}$ *si* $\ell > 1$ *et si* $b_k > 0$
— $\partial\hat{p}_{k,\ell} = \hat{P}^{\pm}_{k,\ell} - \hat{\mu}_{k,\ell} + \hat{\mu}_{k,\ell-1}$ *si* $\ell > 2$ *et si* $b_k < 0$
— $\partial\hat{p}_{k,2} = \hat{P}^{\pm}_{k,2} - \hat{\mu}_{k,2} - \hat{\mu}_{k,1}$
— $\partial(\hat{S}^{\pm}_0 + \hat{e}_0) = (\hat{T}^{\pm}_0 + \hat{H}_0 + \hat{F}_0) - (\hat{T}^{\pm}_{2g'+m} + \hat{H}_{2g'+m} + \hat{F}_{2g'+m})$. *Le symbole* g' *est défini dans Notation 1*

Pour les TYPES o_i *lorsque* $1 < \ell \leq 4g$ *et* $\ell = 2$ *ou* 3 *mod* 4
— $\partial(\hat{S}^{\pm}_\ell + \hat{S}^{\pm}_{\ell-1} + \hat{e}_\ell + \hat{e}_{\ell-1}) = -U_\ell - U_{\ell-2}$

Pour les TYPES n_i *lorsque* $1 < \ell \leq 2g'$, *et pour* o_i *et* n_i *lorsque* $2g' < \ell \leq 2g' + m$,
— $\partial(\hat{S}^{\pm}_\ell + \hat{e}_\ell) = U_\ell - U_{\ell-1}$

Pour les TYPES o_1 *et* n_1 *(et pour tous les* TYPES *si* $p = 2$*)*
— $\partial(\hat{A}^+ + \sum\hat{S}^+_\ell) = -\sum(\hat{H}_\ell + \hat{F}_\ell)$
— $\partial\hat{C}^+_k = \sum\hat{P}^+_{k,\ell}$
— *Bord des* $\hat{S}_{k,-}$
- *si* $b_k > 0$
  - $\partial\hat{S}_{k,0} = -\hat{Q}_k + \hat{H}'_k - \hat{P}^+_{k,z_k-w_k+2}$
  - $\partial\hat{S}_{k,1} = -\hat{X}_{k,z_k} + \hat{X}_{k,1} - \hat{P}^-_{k,1}$
  - $\partial\hat{S}_{k,2} = -\hat{H}'_k - \hat{G}_k - \hat{X}_{k,1} + \hat{X}_{k,2} - \hat{P}^-_{k,2} - \hat{P}^+_{k,z_k-w_k+3}$
  - $\partial\hat{S}_{k,\ell} = -\hat{X}_{k,\ell-1} + \hat{X}_{k,\ell} - \hat{P}^-_{k,\ell} - \hat{P}^+_{k,z_k-w_k+\ell+1}$ *si* $2 < \ell < w_k$
  - $\partial\hat{S}_{k,\ell} = -\hat{X}_{k,\ell-1} + \hat{X}_{k,\ell} - \hat{P}^-_{k,\ell} - \hat{P}^+_{k,\ell-w_k+1}$ *si* $w_k \leq \ell < z_k$
  - $\partial\hat{S}_{k,z_k} = \hat{Q}_k + \hat{G}_k - \hat{X}_{k,z_k-1} + \hat{X}_{k,z_k} - \hat{P}^-_{k,z_k} - \hat{P}^+_{k,z_k-w_k+1}$
- *si* $b_k < 0$
  - $\partial\hat{S}_{k,0} = \hat{Q}_k + \hat{H}'_k + \hat{G}_k - \hat{P}^+_{k,1}$
  - $\partial\hat{S}_{k,1} = -\hat{H}'_k + \hat{X}_{k,1} + \hat{X}_{k,z_k} - \hat{P}^-_{k,1} - \hat{P}^+_{k,z}$
  - $\partial\hat{S}_{k,2} = -\hat{G}_k - \hat{X}_{k,1} - \hat{X}_{k,2} - \hat{P}^-_{k,2}$
  - $\partial\hat{S}_{k,3} = -\hat{Q}_k + \hat{X}_{k,2} - \hat{X}_{k,3} - \hat{P}^-_{k,3} - \hat{P}^+_{k,2}$
  - $\partial\hat{S}_{k,\ell} = \hat{X}_{k,\ell-1} - \hat{X}_{k,\ell} - \hat{P}^-_{k,\ell} - \hat{P}^+_{k,\ell-1}$ *si* $\ell > 3$
- *si* $b_k = 0$
  - $\partial\hat{S}_{k,0} = \hat{H}'_k + \hat{G}_k - \hat{P}^+_{k,1}$
  - $\partial\hat{S}_{k,1} = -\hat{H}'_k - \hat{G}_k - \hat{P}^-_{k,1}$

Le bord de la 1-cellule Z_k est donné dans le lemme suivant.

Lemme 18. *Définissons* Y_k, Z_k, V_k *par :*

- *si* $b_k > 0$
  - $Y_k = \hat{H}'_k + \hat{G}_k + \hat{X}_{k,1} + \hat{\mu}_{k,1} - \sum_{2\leq\ell\leq z_k-w_k+2} \hat{P}^+_{k,\ell}$
  - $Z_k = \hat{q}_k + \hat{g}_k - v_k\hat{C}^+_k + \hat{S}_{k,0} - \sum_{\ell\geq 2}(\hat{S}_{k,\ell} + \hat{p}_{k,\ell})\mathrm{card}\{i \geq \ell \mid x_{k,i} = q_k\}$
  - $V_k = u_k\hat{C}^+_k + \hat{S}_{k,0} + \sum_{\ell\geq 2}(\hat{S}_{k,\ell} + \hat{p}_{k,\ell})\mathrm{card}\{i \geq \ell \mid x_{k,i} = h\}$
- *si* $b_k \leq 0$ *(donc* $a_k = u_k = 1$ *et* $v_k = 0$*)*
  - $Y_k = \hat{Q}_k + \hat{G}_k + \hat{X}_{k,1} + \hat{\mu}_{k,1}$
  - $Z_k = \hat{q}_k + \hat{g}_k$
  - $V_k = \hat{C}^+_k + \hat{S}_{k,0} - \sum_{\ell\geq 2}(\hat{S}_{k,\ell} + \hat{p}_{k,\ell})(z_k - \ell + 1)$.

Alors $\partial Z_k = U_{G+k} + a_k Y_k$ *et* $\sum_{x_{k,i}=h}(\hat{X}_{k,i} + \hat{\mu}_{k,i}) = b_k Y_k - \hat{H}'_k - \hat{G}_k + \partial V_k$.

Preuve. Le cas $b_k \leq 0$ est facile.

Dans le cas $b_k > 0$, détaillons la preuve.
$\partial(\hat{q}_k + \hat{g}_k) = U_{G+k} + \hat{G}_k + \hat{Q}_k + \sum_{x_{k,i}=q_k}(\hat{\mu}_{k,i} + \hat{X}_{k,i})$, or
$\hat{X}_{k,i} + \hat{\mu}_{k,i} - \hat{X}_{k,1} - \hat{\mu}_{k,1} - \hat{H}'_k - \hat{G}_k - \partial\sum_{2\leq\ell\leq i}(\hat{S}_{k,\ell} + \hat{p}_{k,\ell}) + \sum_{2\leq\ell\leq i}\hat{P}^+_{k,\ell}$ est égal :
- si $2 \leq i < w_k$, à $\sum_{2\leq\ell\leq i}\hat{P}^+_{k,z_k-w_k+\ell+1}$,
- si $w_k \leq i < z_k$, à $\sum_{2\leq\ell<w_k}\hat{P}^+_{k,z_k-w_k+\ell+1} + \sum_{w_k\leq\ell\leq i}\hat{P}^+_{k,\ell-w_k+1}$, d'où

$$\begin{aligned}
&\sum_{x_{k,i}=q_k}(\hat{X}_{k,i} + \hat{\mu}_{k,i}) - a_k(\hat{X}_{k,1} + \hat{\mu}_{k,1}) - (a_k - 1)(\hat{H}'_k + \hat{G}_k)\\
&\quad - \partial\sum_{\ell\geq 2}(\hat{S}_{k,\ell} + \hat{p}_{k,\ell})\mathrm{card}\{i \geq \ell \mid x_{k,i} = q_k\}\\
&\quad = -\sum_{\ell\geq 2}\hat{P}^+_{k,\ell}\mathrm{card}\{i \geq \ell \mid x_{k,i} = q_k\} + \sum_{\ell<z_k-w_k+2}\hat{P}^+_{k,\ell}\mathrm{card}\{i \geq \ell + w_k - 1 \mid x_{k,i} = q_k\}\\
&\quad + \sum_{\ell>z_k-w_k+2}\hat{P}^+_{k,\ell}\mathrm{card}\{i \geq \ell + w_k - 1 - z_k \mid x_{k,i} = q_k\}.
\end{aligned}$$

Dans cette expression, le coefficient de $\hat{P}^+_{k,\ell}$ vaut (compte tenu des propriétés de $w_{\alpha,\beta}$ détaillées dans 4.1)

si $\ell = 1, \mathrm{card}\{i \geq w_k \mid x_{k,i} = q_k\} = v_k$

si $\ell = z_k - w_k + 2, -\mathrm{card}\{i \geq z_k - w_k + 2 \mid x_{k,i} = q_k\} = 1 - \mathrm{card}\{i < w_k \mid x_{k,i} = q_k\} = 1 - (a_k - v_k)$

si $2 \leq \ell \leq z_k - w_k + 2, \mathrm{card}\{i \geq \ell + w_k - 1 \mid x_{k,i} = q_k\} - \mathrm{card}\{i \geq \ell \mid x_{k,i} = q_k\} = \mathrm{card}\{i \mid \ell \leq i < z_k - w_k + 1 \text{ et } x_{k,i} = q_k\} - \mathrm{card}\{i \geq \ell \mid x_{k,i} = q_k\} = -\mathrm{card}\{i \geq z_k - w_k + 1 \mid x_{k,i} = q_k\} = -\mathrm{card}\{i < w_k \mid x_{k,i} = q_k\} = -(a_k - v_k)$,

si $\ell > z_k - w_k + 2, \mathrm{card}\{i \geq \ell + w_k - 1 - z_k \mid x_{k,i} = q_k\} - \mathrm{card}\{i \geq \ell \mid x_{k,i} = q_k\} = \mathrm{card}\{i \geq w_k \mid x_{k,i} = q_k\} + \mathrm{card}\{i \mid \ell + w_k - 1 - z_k \leq i < w_k \text{ et } x_{k,i} = q_k\} - \mathrm{card}\{i \geq \ell \mid x_{k,i} = q_k\} = v_k$.

On en déduit que $\sum_{x_{k,i}=q_k}(\hat{X}_{k,i} + \hat{\mu}_{k,i}) = a_k Y_k - \hat{Q}_k - \hat{G}_k + \partial[v_k\hat{C}^+_k - \hat{S}_{k,0} + \sum_{\ell\geq 2}(\hat{S}_{k,\ell} + \hat{p}_{k,\ell})\mathrm{card}\{i \geq \ell \mid x_{k,i} = q_k\}]$, si bien que ∂Z_k est égal au résultat annoncé.

On a déjà calculé $\sum_{x_{k,i}=q_k}(\hat{X}_{k,i} + \hat{\mu}_{k,i})$. On va en déduire $\sum_{x_{k,i}=h}(\hat{X}_{k,i} + \hat{\mu}_{k,i})$ par différence, en calculant $\sum_i(\hat{X}_{k,i} + \hat{\mu}_{k,i})$. Rappelons que pour $1 \leq i < z_k$,
$\hat{X}_{k,i} + \hat{\mu}_{k,i} - \hat{X}_{k,1} - \hat{\mu}_{k,1} - \hat{H}'_k - \hat{G}_k - \partial\sum_{2\leq\ell\leq i}(\hat{S}_{k,\ell} + \hat{p}_{k,\ell}) + \sum_{2\leq\ell\leq i}\hat{P}^+_{k,\ell}$ était égal :
- si $2 \leq i < w_k$, à $\sum_{2\leq\ell\leq i}\hat{P}^+_{k,z_k-w_k+\ell+1}$
- si $w_k \leq i < z_k$, à $\sum_{2\leq\ell<w_k}\hat{P}^+_{k,z_k-w_k+\ell+1} + \sum_{w_k\leq\ell\leq i}\hat{P}^+_{k,\ell-w_k+1}$.

De plus, pour $i = z_k$, on a presque la même formule que pour $w_k \le i < z_k$, mais en remplaçant $-\hat{G}_k$ par $+\hat{Q}_k$.

D'où
$\sum_i(\hat{X}_{k,i} + \hat{\mu}_{k,i}) - z_k(\hat{X}_{k,1} + \hat{\mu}_{k,1}) - (z_k - 1)\hat{H}'_k - (z_k - 2)\hat{G}_k + \hat{Q}_k - \partial \sum_{\ell\ge2}(\hat{S}_{k,\ell} + \hat{p}_{k,\ell})\mathrm{card}\{i \ge \ell\} = -\sum_{\ell\ge2} \hat{P}^+_{k,\ell}(z_k - \ell + 1) + \sum_{\ell<z_k-w_k+2} \hat{P}^+_{k,\ell}(z_k - \ell + 2 - w_k) + \sum_{\ell>z_k-w_k+2} \hat{P}^+_{k,\ell}(2z_k - \ell + 2 - w_k) = (u_k + v_k)\partial\hat{C}^+_k - (a_k + b_k)\sum_{2\le\ell\le z_k-w_k+2} \hat{P}^+_{k,\ell}$,
si bien que par différence, $\sum_{x_{k,i}=h}(\hat{X}_{k,i} + \hat{\mu}_{k,i})$ est égal au résultat annoncé. □

Bord des 2-cochaînes Δ-simpliciales

Lemme 19. *Pour tous les* Types*, on a d'abord*
— $\partial(\hat{\delta}_0 + \hat{T}^\pm_0 + \hat{F}_0) = 0$
— $\partial(\hat{\mu}_{k,1} + \hat{X}_{k,1} + \hat{G}_k - \sum_{2\le\ell\le z_k-w_k+1} \hat{P}^+_{k,\ell}) = 0.$

Pour les Types o_i *(avec* $\varepsilon = 1$ *pour* o_1 *et* $= -1$ *pour* o_2*)*
- si j impair
— $\partial(\hat{v}_{j,1} + \hat{H}_{2j-1} + \hat{F}_{2j-1}) = \hat{N}'_{j,1} + \varepsilon\hat{N}_{j+1,1}$
— $\partial(\hat{v}_{j,1} + \varepsilon\hat{H}_{2j-1} + \varepsilon\hat{F}_{2j-1} + \hat{H}_{2j}) = (1 - \varepsilon)\hat{N}_{j,1}$ *et*
— $\partial(\hat{F}_{2j-2} + \hat{H}_{2j-2} + \hat{F}_{2j-3}) = \varepsilon(\hat{N}_{j,1} + \hat{N}'_{j-1,1})$
- si j pair
— $\partial(\hat{v}_{j,1} + \hat{H}_{2j-1} + \hat{F}_{2j-2}) = \hat{N}_{j,1} + \varepsilon\hat{N}'_{j-1,1}$ *et*
— $\partial(\hat{v}_{j,1} + \varepsilon\hat{H}_{2j-1} + \varepsilon\hat{F}_{2j-2} + \hat{H}_{2j-2}) = (1 - \varepsilon)\hat{N}'_{j,1}$
— $\partial(\hat{\mu}_{k,1} + \hat{X}_{k,1} + \hat{G}_k - \sum_{2\le\ell\le z_k-w_k+1} \hat{P}^+_{k,\ell}) = 0.$

Pour les Types n_i
— $\partial(\hat{\mu}_{k,1} + \hat{X}_{k,1} + \hat{G}_k - \sum_{2\le\ell\le z_k-w_k+1} \hat{P}^+_{k,\ell}) = 0$
— $\partial(\hat{v}_{j,1} + \hat{H}_{2j-1} + \hat{F}_{2j-1}) = (1 + \varepsilon_j)\hat{N}'_{j,1}$
— $\partial(\hat{v}_{j,2} + \hat{H}_{2j-1} + \varepsilon_j\hat{F}_{2j-2}) = (1 + \varepsilon_j)\hat{N}_{j,2}$
— $\partial\hat{H}_{2j-2} = -\hat{N}'_{j-1,1} - \hat{N}_{j,2}.$

6.2. Relevé des 0 et 1-cocycles cellulaires. Ayant décrit les cobords, on est prêt à *choisir* des relevés qui soient des *cocycles* relevant mod p un représentant des divers générateurs.

Le 0-cocycle cellulaire $\hat{\sigma}$ se relève en $1 = \hat{\sigma} + \hat{a} + \hat{b} + \sum \hat{d}_k$.
Grâce au lemme 18, les 1-cocycles sont relevés comme suit :

Définition 20. Relevés des 1-cocycles
1) Pour le générateur θ_j :
pour les Types o_i et pour tout p, $\theta_j = [\hat{t}_j]$. On peut relever $\hat{t}_j$ par
$R\hat{t}_j = \hat{t}_j + \hat{f}_j + \hat{e}_\ell + \hat{S}^\pm_\ell + \hat{e}_{\ell-1} + \hat{S}^\pm_{\ell-1}$

pour les Types n_i, il faut distinguer selon p
— si $p = 2$, alors on a $\theta_j = [\hat{t}_j]$. On peut relever $\hat{t}_j$ par
$R\hat{t}_j = \hat{t}_j + \hat{f}_j + \hat{e}_{\ell-1} + \hat{S}^\pm_{\ell-1}$;
— si $p > 2$ alors on a $\theta_j = [\hat{t}_j - \hat{t}_1]$ qui se relève par

$R(\hat t_j - \hat t_1) = \hat t_j + \hat f_j - (\hat t_1 + \hat f_1) - 2\sum_{u=2}^{2j-2}(\hat e_u + \hat S^{\pm}_u) - (\hat e_1 + \hat S^{\pm}_1) - (\hat e_{2j-1} + \hat S^{\pm}_{2j-1})$.
Dans les deux situations, on a pris $\ell = 2j$ si j est impair et $\ell = 2j-1$ si j est pair.

2) Pour le générateur α_k :
pour tous les TYPES et pour tout p, si $0 \le k < n-1$, on commence par relever $\hat q_k - \hat q_{k-1}$ par
$R(\hat q_k - \hat q_{k-1}) = Z_k - Z_{k-1} - \hat S^{\pm}_{2g'+k} - \hat e_{2g'+k}$, avec $Z_k = \hat q_k + \hat g_k - v_k\hat C^+_k + \hat S_{k,0} - \sum_{\ell\ge 2}(\hat S_{k,\ell} + \hat p_{k,\ell})\mathrm{card}\{i \ge \ell \mid x_{k,i} = q_k\}$;

pour les TYPES o_i, n_i, quand $p = 2$ et pour les TYPES o_i quand $p > 2$, le générateur α_k est $\alpha_k = [\hat q_k - \hat q_0]$. En additionnant, on trouve le relevé
$R(\hat q_k - \hat q_0) = Z_k - Z_0 - \sum_{i=1}^{k}(\hat S^{\pm}_{2g'+i} + \hat e_{2g'+i})$, où Z_u est défini dans Lemme 18 ;

pour tous les TYPES n_i, quand $p > 2$, $\alpha_k = [\hat q_k - 1/2\hat t_g]$. Il faut rajouter à la somme précédente le relevé de $\alpha_0 = [\hat q_0 - 1/2\hat t_g]$ qui est choisi égal à
$R(\hat q_0 - 1/2\hat t_g) = Z_0 - 1/2(\hat t_g + \hat f_g) - (\hat e_{2g} + \hat S^{\pm}_{2g}) - 1/2(\hat e_{2g-1} + \hat S^{\pm}_{2g-1})$. On obtient :
$R(\hat q_k - \frac{1}{2}\hat t_g) = Z_k - \frac{1}{2}(\hat t_g + \hat f_g) - \sum_{i=-1}^{k}(\hat S^{\pm}_{2g'+i} + \hat e_{2g'+i})$.

3) Pour le générateur $\alpha = [c/2a\hat t_1 + \hat h - \sum b_k a_k^{-1}\hat q_k]$. Avec la notation $c_k = b_k a/a_k$, on a :

pour les TYPES o_1 et n_1, dans le Cas 1 (on a $c = 0$), lorsque $p > 2$ et pour tous les TYPES, dans le Cas 1, lorsque $p = 2$, on peut relever $\hat h - \sum b_k a_k^{-1}\hat q_k$ par
$R(\hat h - \sum b_k a_k^{-1}\hat q_k) = \hat h + \sum \hat f_j + \sum \hat g_k + \hat A^+ + \sum \hat S^{+}_{\ell} - \sum b_k a_k^{-1} Z_k - \sum V_k - 1/a[c_0(\hat e_{2g'+1} + \hat S^{\pm}_{2g'+1}) + (c_0 + c_1)(\hat e_{2g'+2} + \hat S^{\pm}_{2g'+2}) + \ldots + (c_0 + \ldots + c_{m-1})(\hat e_{2g'+m} + \hat S^{\pm}_{2g'+m})]$;

pour le TYPE n_1, dans le Cas 2, on peut relever $c/2a\hat t_1 + \hat h - \sum b_k a_k^{-1}\hat q_k$ par
$R(c/2a\hat t_1 + \hat h - \sum b_k a_k^{-1}\hat q_k) = \hat h + \sum \hat f_j + \sum \hat q_k + \hat A^+ + \sum \hat S^{+}_{\ell} - \sum b_k a_k^{-1} Z_k - \sum V_k - 1/a[c_0(\hat e_{2g'+1} + \hat S^{\pm}_{2g'+1}) + (c_0 + c_1)(\hat e_{2g'+2} + \hat S^{\pm}_{2g'+2}) + \ldots + (c_0 + \ldots + c_{m-1})(\hat e_{2g'+m} + \hat S^{\pm}_{2g'+m})] + c/2a[(\hat t_1 + \hat f_1) - (\hat S^{\pm}_1 + \hat e_1) - 2(\hat S^{\pm}_0 + \hat e_0)]$
avec

- si $b_k > 0$,
  – $Z_k = \hat q_k + \hat g_k - v_k\hat C^+_k + \hat S_{k,0} - \sum_{\ell\ge 2}(\hat S_{k,\ell} + \hat p_{k,\ell})\mathrm{card}\{i \ge \ell \mid x_{k,i} = q_k\}$,
  – $V_k = u_k\hat C^+_k + \hat S_{k,0} + \sum_{\ell\ge 2}(\hat S_{k,\ell} + \hat p_{k,\ell})\mathrm{card}\{i \ge \ell \mid x_{k,i} = h\}$;

- si $b_k \le 0$,
  – $Z_k = \hat q_k + \hat g_k$,
  – $V_k = \hat C^+_k + \hat S_{k,0} - \sum_{\ell\ge 2}(\hat S_{k,\ell} + \hat p_{k,\ell})(z_k - \ell + 1)$.

Pour justifier (lorsque cela n'est pas évident) ces choix de relevés, on fait les remarques suivantes :

On rappelle la notation $U_\ell = \hat F_\ell + \hat\delta_\ell + \hat T^{\pm}_\ell$.

1) Pour le générateur θ_j :
pour o_i, pour tout p, $\partial(\hat t_j + \hat f_j) = U_\ell + U_{\ell-2}$ avec :
– si j impair : $\ell = 2j$ et

$$\partial(\hat e_\ell + \hat S^{\pm}_\ell) = -U_\ell - U_{\ell-1}, \qquad \partial(\hat e_{\ell-1} + \hat S^{\pm}_{\ell-1}) = U_{\ell-1} - U_{\ell-2},$$

– si j pair : $\ell = 2j-1$ et

$$\partial(\hat{e}_\ell + \hat{S}^\pm_\ell) = -U_\ell + U_{\ell-1}, \qquad \partial(\hat{e}_{\ell-1} + \hat{S}^\pm_{\ell-1}) = -U_{\ell-1} - U_{\ell-2},$$

– donc quelle que soit la parité de j,

$$\partial(\hat{t}_j + \hat{f}_j) = -\partial(\hat{e}_\ell + \hat{S}^\pm_\ell + \hat{e}_{\ell-1} + \hat{S}^\pm_{\ell-1}).$$

Pour tout p, le relevé du cocycle $\theta_j = \hat{t}_j$ est :
$R\hat{t}_j = \hat{t}_j + \hat{f}_j + \hat{e}_\ell + \hat{S}^\pm_\ell + \hat{e}_{\ell-1} + \hat{S}^\pm_{\ell-1}$.

pour n_i, pour tout p, $\partial(\hat{t}_j + \hat{f}_j) = U_{2j-1} + U_{2j-2}$ et $\partial(\hat{e}_\ell + \hat{S}^\pm_\ell) = U_\ell - U_{\ell-1}$,
– si $p = 2$, on peut relever $\theta_j = \hat{t}_j$ par
$R\hat{t}_j = \hat{t}_j + \hat{f}_j + \hat{e}_{\ell-1} + \hat{S}^\pm_{\ell-1}$,
– si $p > 2$, on peut (pour relever $\theta_j = \hat{t}_j - \hat{t}_1$) relever $\hat{t}_j - \hat{t}_{j-1}$ par $(\hat{t}_j + \hat{f}_j) - (\hat{t}_{j-1} + \hat{f}_{j-1}) - (\hat{e}_{2j-1} + \hat{S}^\pm_{2j-1}) - (\hat{e}_{2j-2} + \hat{S}^\pm_{2j-2})$.

2) Pour les générateurs α_k : On va se servir des Z_k du lemme, puisqu'ils contiennent $\hat{q}_k$ plus des cochaînes Δ-simpliciales dont l'image cellulaire (par T^t) est nulle. D'après le lemme, pour tout $k \in [0, n[$ on a, modulo p : $\partial Z_k = U_{2g'+k}$, or pour $2g' < \ell \leq 2g' + m$ on a : $\partial(\hat{e}_\ell + \hat{S}^\pm_\ell) = U_\ell - U_{\ell-1}$. Ceci permet ($\forall p$, $\forall o_i, n_i$) de relever $\hat{q}_k - \hat{q}_{k-1}$ (pour $0 < k < n$) par $Z_k - Z_{k-1} - (\hat{e}_{2g'+k} + \hat{S}^\pm_{2g'+k})$.

Pour les TYPES n_i et $p > 2$, il faut relever en plus $\alpha_0 = \hat{q}_0 - 1/2\hat{t}_g$. On se sert de

$$\partial[Z_0 - 1/2(\hat{t}_g + \hat{f}_g)] = U_{2g} - 1/2(U_{2g-1} + U_{2g-2}) = (U_{2g} - U_{2g-1}) + 1/2(U_{2g-1} - U_{2g-2}),$$

ce qui, puisqu'ici $U_\ell - U_{\ell-1} = \partial(\hat{e}_\ell + \hat{S}^\pm_\ell)$, permet de relever α_0 par :
$Z_0 - 1/2(\hat{t}_g + \hat{f}_g) - (\hat{e}_{2g} + \hat{S}^\pm_{2g}) - 1/2(\hat{e}_{2g-1} + \hat{S}^\pm_{2g-1})$.

3) Pour le générateur α pour $c/2a\hat{t}_1 + \hat{h} - \sum b_k a_k^{-1}\hat{q}_k$:

On a $\partial(\hat{h} + \sum \hat{f}_j + \sum \hat{q}_k + \hat{A}^+ + \sum \hat{S}^+_\ell) = \sum_k(\hat{H}'_k + \hat{G}_k + \sum_{x_{k,i}=h}(\hat{\mu}_{k,i} + \hat{X}_{k,i}))$ or d'après le lemme, pour k fixé,
$\hat{H}'_k + \hat{G}_k + \sum_{x_{k,i}=h}(\hat{\mu}_{k,i} + \hat{X}_{k,i}) = b_k Y_k + \partial V_k = b_k a_k^{-1}(\partial Z_k - U_{2g'+k}) + \partial V_k$.
Donc on a $\partial(\hat{h} + \sum \hat{f}_j + \sum \hat{q}_k + \hat{A}^+ + \sum \hat{S}^+_\ell - \sum b_k a_k^{-1} Z_k - \sum V_k) = -\sum b_k a_k^{-1} U_{2g'+k} = -1/a \sum c_k U_{2g'+k}$ avec $\sum c_k = c$ et $U_{2g'+k} - U_{2g'+k-1} = \partial(\hat{e}_{2g'+k} + \hat{S}^\pm_{2g'+k})$, d'où
$-\sum c_k U_{2g'+k} = \partial[c_0(\hat{e}_{2g'+1} + \hat{S}^\pm_{2g'+1}) + (c_0 + c_1)(\hat{e}_{2g'+2} + \hat{S}^\pm_{2g'+2}) + \ldots + (c_0 + \ldots + c_{m-1})(\hat{e}_{2g'+m} + \hat{S}^\pm_{2g'+m})] - cU_{2g'+m}$.

Dans les Cas 1 (de o_1 et n_1), $c = 0 \bmod p$, on peut relever $\hat{h} - \sum b_k a_k^{-1}\hat{q}_k$ par $\hat{h} + \sum \hat{f}_j + \sum \hat{q}_k + \hat{A}^+ + \sum \hat{S}^+_\ell - \sum b_k a_k^{-1} Z_k - \sum V_k - 1/a[c_0(\hat{e}_{2g'+1} + \hat{S}^\pm_{2g'+1}) + (c_0 + c_1)(\hat{e}_{2g'+2} + \hat{S}^\pm_{2g'+2}) + \ldots + (c_0 + \ldots + c_{m-1})(\hat{e}_{2g'+m} + \hat{S}^\pm_{2g'+m})]$.

Dans le Cas 2 de n_1, comme $\partial(\hat{S}^\pm_0 + \hat{e}_0) = U_0 - U_{2g'+m}$ et $\partial(\hat{S}^\pm_1 + \hat{e}_1) = U_1 - U_0$ et $\partial(\hat{t}_1 + \hat{f}_1) = U_0 + U_1$, on peut relever $c/2a\hat{t}_1 + \hat{h} - \sum b_k a_k^{-1}\hat{q}_k$ par la même expression que dans les Cas 1, à laquelle on ajoute $c/2a[(\hat{t}_1 + \hat{f}_1) - (\hat{S}^\pm_1 + \hat{e}_1) - 2(\hat{S}^\pm_0 + \hat{e}_0)]$.

6.3. Relevé des 2-cocycles cellulaires.

DÉFINITION 21. Relevés des 2-cocycles

4) Pour le générateur $\boldsymbol{\beta} = [\hat{\delta}]$, dans tous les Cas et pour tous les TYPES. On relève $\hat{\delta}$ par :
$R\hat{\delta} = U_0 = \hat{\delta}_0 + \hat{T}_0^{\pm} + \hat{F}_0$.

5) Relevé de $\boldsymbol{\beta_k} = [\hat{\mu}_k]$, valable dans tous les Cas, que p divise a_k ou pas et que b_k soit positif ou pas. On relève $\hat{\mu}_k$ par :
$R\hat{\mu}_k = \hat{\mu}_{k,1} + \hat{X}_{k,1} + \hat{G}_k - \sum_{2\leq\ell\leq z_k-w_k+1} \hat{P}^+_{k,\ell}$.

6) Pour le générateur $\boldsymbol{\varphi_j}$ pour $p \geq 2$.
pour o_i, si $\varepsilon = 1$, on relève $\hat{v}_j$ par :
$R\hat{v}_j = \hat{v}_{j,1} + \hat{H}_{2j-1} + \hat{F}_{2j-1} + \hat{H}_{2j}$ si j impair,
$R\hat{v}_j = \hat{v}_{j,1} + \hat{H}_{2j-1} + \hat{F}_{2j-2} + \hat{H}_{2j-2}$ si j pair.

pour n_i, si $\varepsilon_j = -1$, on relève $\hat{v}_j$ par
$R\hat{v}_j = \hat{v}_{j,1} + \hat{H}_{2j-1} + \hat{F}_{2j-1}$.

Il n'est pas nécessaire de définir le relevé de φ_j pour les autres TYPES car pour $p > 2$, les cup-produits $H^1(M,\mathbb{Z}_p)\otimes H^2(M,\mathbb{Z}_p) \to H^3(M,\mathbb{Z}_p)$ ne seront à calculer que pour les TYPES o_1 et n_2.

7. Calcul des cup-produits pour $p = 2$

7.1. Formules d'Alexander-Whitney. Méthode des coefficients. D'après la formule d'Alexander-Whitney [8], le cup-produit de deux cochaînes Δ-simpliciales f de degré p et g de degré q est défini sur tout $p+q$-simplexe par

$$(f \cup g)(v_0,\dots,v_{p+q}) = f(v_0,\dots,v_p)g(v_p,\dots,v_{p+q}).$$

On en déduit immédiatement que le générateur 1 de $H^0(M,\mathbb{Z}_p)$ est l'élément neutre pour le $\cup$-produit.

Si $\varphi = f\cup g$ avec f, g deux 1-cochaînes Δ-simpliciales, on obtient, pour tout 2-Δ-simplexe $s = (s_0, s_1, s_2)$, de sommets (v_0, v_1, v_2) et de faces $s_0 = (v_1, v_2)$, $s_1 = (v_0, v_2)$, $s_2 = (v_0, v_1)$, $\varphi(s) = f(s_2)g(s_0)$.

Heureusement, si f, g sont des 1-cocycles, pour connaître la classe du 2-cocycle φ, il ne sera pas nécessaire de l'évaluer sur les (nombreux !) 2-simplexes. En effet, soit $\varphi' = T^t(\varphi)$ son image dans le complexe cellulaire (voir 5),

$$\varphi' = x\hat{\delta} + \sum_{j=1}^{g'} y_j\hat{v}_j + \sum z_k\hat{\rho}_k + \sum_{k=0}^{m} r_k\hat{\mu}_k.$$

Comme $0 = \partial\varphi'$, les z_k sont nuls. De plus, la classe de cohomologie de φ' (donc de φ) est

- dans le Cas 1 : $(x + \sum_{k=0}^m r_k)\beta + \sum_{j=1}^{g'} y_j\varphi_j$,
- dans le Cas 2 : $\sum_{j=1}^{g'} y_j\varphi_j$,
- dans le Cas 3 : $\sum_{k=0}^{n-1} r_k\beta_k + \sum_{j=1}^{g'} y_j\varphi_j$, en posant $\beta_0 = -\sum_{k=1}^{n-1}\beta_k$.

REMARQUE 22. Pour calculer la classe de cohomologie $[\varphi]$, il suffira d'évaluer (mod 2) $x = \varphi(\sum\delta_\ell)$ (dans le Cas 1), les $r_k = \varphi(\sum\mu_{k,\ell})$ (dans les Cas 1 et 3), et les $y_j = \varphi(\nu_{j,1} - \varepsilon_j\nu_{j,2})$ (dans les trois Cas).

Les preuves ne sont données que pour les cup-produits qui ne sont pas nuls pour des raisons classiques de topologie, voir par exemple Aaslepp [1].

7.2. Les cup-produits, pour $p = 2$**,** $\cup : H^1(M,\mathbb{Z}_2)\otimes H^1(M,\mathbb{Z}_2) \to H^2(M,\mathbb{Z}_2)$**.** Cette sous-section prouve le théorème 7.

Preuve.

Calcul de $\theta_i \cup \theta_j$

Quand ils apparaissent, les r_k et les y_j sont nuls.

TYPES o_i

• Il suffit de calculer x pour le Cas 1. On a, voir la Sous-section 4.2, Découpage Δ-simplicial :
$x = R\hat{t}_i(e_0)R\hat{t}_j(t_1) + R\hat{t}_i(e_1)R\hat{t}_j(t_2) + R\hat{t}_i(e_3)R\hat{t}_j(t_1) + R\hat{t}_i(e_4)R\hat{t}_j(t_2) + \dots$
vaut 1 si et seulement si i impair et $j = i + 1$ ou i pair et $j = i - 1$. Et x vaut 0 sinon.

CONCLUSION : POUR LES TYPES o_i, LES CUP-PRODUITS $\theta_i \cup \theta_j$ SONT NULS SAUF DANS LE CAS 1, OÙ ON A $\theta_{2i} \cup \theta_{2i-1} = \beta$.

TYPES n_i, $\theta_j = [\hat{t}_j]$ et le relevé de θ_j est $R\hat{t}_j = \hat{t}_j + \hat{f}_j + \hat{e}_{\ell-1} + \hat{S}^{\pm}_{\ell-1}$.
• Calcul de x : $x = R\hat{t}_i(e_0)R\hat{t}_j(t_1) + R\hat{t}_i(e_1)R\hat{t}_j(t_1) + \dots$ vaut 1 si et seulement si $i = j$ et vaut 0 sinon.

CONCLUSION : POUR LES TYPES n_i, LES CUP-PRODUITS $\theta_i \cup \theta_j$ SONT NULS SAUF DANS LE CAS 1 ET SI $i = j$, ALORS ON A $\theta_i \cup \theta_i = \beta$.

Calcul de $\theta_i \cup \alpha$

Pour tous les TYPES, $\alpha = [\hat{h} + \sum b_j\hat{q}_j]$ n'est générateur que dans le Cas 1.
Le relevé de α est
$R(\hat{h} + \sum b_j\hat{q}_j) = \hat{h} + \sum \hat{f}_j + \sum \hat{q}_k + \hat{A}^+ + \sum \hat{S}^+_\ell - \sum b_k a_k^{-1} Z_k - \sum V_k - \frac{1}{a}[c_0(\hat{e}_{2g'+1} + \hat{S}^{\pm}_{2g'+1}) + (c_0 + c_1)(\hat{e}_{2g'+2} + \hat{S}^{\pm}_{2g'+2}) + \dots + (c_0 + \dots + c_{m-1})(\hat{e}_{2g'+m} + \hat{S}^{\pm}_{2g'+m})]$.

• Calcul du coefficient x.
Dans le découpage Δ-simplicial de δ, l'indice des Δ-simplexes δ_u varie de 0 à $4g + m$.
Pour $u \leq 4g - 1$, le Δ-simplexe δ_u est $\delta_u = (t_., e_., e_.)$ et $R(\hat{h} - \sum b_k a_k^{-1}\hat{q}_k)$ (le relevé de α) appliqué à $(\delta_u)_0 = t_.$ est nul.
Pour $u \geq 4g$, le Δ-simplexe δ_u est $\delta_u = (q_., e_., e_.)$ et $R(\hat{t}_j)$ le relevé de θ_j appliqué à $(\delta_u)_2 = e_.$ est nul. Le coefficient x est nul.

• Il ne reste plus qu'à calculer y_i. Or

$$\begin{aligned} y_i = &\ R\hat{t}_j(v_{i,1})_2 R(\hat{h} + \textstyle\sum b_j\hat{q}_j)(v_{i,1})_0 - \varepsilon_j R\hat{t}_j(v_{i,2})_2 R(\hat{h} + \sum b_j\hat{q}_j)(v_{i,2})_0 \\ = &\ R\hat{t}_j(v_{i,1})_2, \end{aligned}$$

et $R(\hat{h} + \sum b_j\hat{q}_j)(v_{i,1})_0 = R(\hat{h} + \sum b_j\hat{q}_j)(h) = 1$ et $R\hat{t}_j(v_{i,2})_2 = R\hat{t}_j(h) = 0$. Comme de plus, $(v_{i,1})_2 = t_i$ ou f_i, on obtient $y_i = 1$ si et seulement si $i = j$ et $y_i = 0$ sinon.

CONCLUSION : $\theta_j \cup \alpha$ N'INTERVIENT QUE DANS LE CAS 1. POUR TOUS LES TYPES, ON A $\theta_j \cup \alpha = \varphi_j$.

Calcul de $\alpha_i \cup \alpha_j$
Pour tous les Types, les générateurs $\alpha_k = [\hat{q}_k - \hat{q}_0]$ n'interviennent que dans le Cas 3. Nous devons calculer les coefficients $r_\ell, 0 \leq \ell \leq n-1$ et y_i.

• Calcul des coefficients $r_\ell = \sum_w R(\hat{q}_k - \hat{q}_0)(\mu_{\ell,w})_2 R(\hat{q}_j - \hat{q}_0)(\mu_{\ell,w})_0$, avec $(\mu_{\ell,w})_0 = x_{\ell,w}$ et $(\mu_{\ell,w})_2 = p_{\ell,w}$
1) Dans $R(\hat{q}_j - \hat{q}_0)$ interviennent Z_j et Z_0. Dans chaque Z_u, on voit
$\hat{q}_u - \sum_{s\geq 1} \hat{p}_{u,s}\mathrm{card}\{t \geq s \mid x_{u,t} = q_u\}$.
-Si $u = j$, $R(\hat{q}_j - \hat{q}_0)(\mu_{\ell,w})_0 = R(\hat{q}_j - \hat{q}_0)(x_{\ell,w}) = 0$ sauf si $\ell = j$ et ceci pour tous les a_j indices w tels que $x_{j,w} = q_j$. Dans ces situations $R(\hat{q}_j - \hat{q}_0)(\mu_{j,w})_0 = 1$.
- Si $u = 0$, pour n'importe quel indice $j \neq 0$, $R(\hat{q}_j - \hat{q}_0)(\mu_{\ell,w})_0 = 0$ sauf si $\ell = 0$ et ceci pour tous les a_0 indices w tels que $x_{0,w} = q_0$. Dans ces situations $R(\hat{q}_j - \hat{q}_0)(\mu_{0,w})_0 = 1$.
2) $R(\hat{q}_k - \hat{q}_0)(\mu_{\ell,w})_2 = R(\hat{q}_k - \hat{q}_0)(p_{\ell,w}) = 0$ sauf si
i) $\ell = j = k$ et pour tous les w tels que $x_{k,w} = q_k$. Dans ces situations on a $R(\hat{q}_k - \hat{q}_0)(p_{k,w}) = \mathrm{card}\{t \geq w \mid x_{k,t} = q_k\}$;
ii) $\ell = 0$ et pour tous les w tels que $x_{0,w} = q_0$. Dans ces situations, pour n'importe quel indice $k \neq 0$, on a $R(\hat{q}_k - \hat{q}_0)(p_{0,w}) = \mathrm{card}\{t \geq w \mid x_{0,t} = q_0\}$.

Si $k = j, 0 \leq k \leq n-1$, nous avons obtenu

$$r_k = \sum_{\substack{w\geq 1 \\ x_{k,w}=q_k}} R(\hat{q}_k - \hat{q}_0)(\mu_{k,w})_2 = \sum_{w=1}^{w=a_k-1} (a_k - w) = \frac{a_k(a_k-1)}{2} = \frac{a_k}{2}.$$

Le dernier calcul est fait modulo 2.

• Calcul des coefficients
$y_i = R(\hat{q}_k - \hat{q}_0)(\nu_{i,1})_2 R(\hat{q}_j - \hat{q}_0)(\nu_{i,1})_0 - \varepsilon_i R(\hat{q}_k - \hat{q}_0)(\nu_{i,2})_2 R(\hat{q}_j - \hat{q}_0)(\nu_{i,2})_0$.
Nous avons $(\nu_{i,1})_2 = t_i$ si $\varepsilon_i = 1$ et $(\nu_{i,1})_2 = f_i$ si $\varepsilon_i = -1$; $(\nu_{i,1})_0 = (\nu_{i,2})_2 = h; (\nu_{i,2})_0 = t_i$.
Aucun de ces éléments n'intervient dans $R(\hat{q}_u - \hat{q}_0)$. On a que pour tout $i, y_i = 0$.

Il reste à remarquer que les calculs précédents sont valables pour tous les Types.

Conclusion : Les cup-produits $\alpha_i \cup \alpha_j$ n'interviennent que dans le Cas 3. Pour tous les Types, $\alpha_i \cup \alpha_j = \frac{a_0}{2}\beta_0 + \delta_{i,j}\frac{a_j}{2}\beta_j$, où $\beta_0 = \sum_{1\leq k\leq n-1} \beta_k$ et $\delta_{i,j}$ est le symbole de Kronecker.

Calcul de $\alpha \cup \alpha$
Pour tous les Types, le générateur α n'intervient que dans le Cas 1. On rappelle que r est le nombre de b_k pairs et on les a rangés entre 0 et $r-1$.

• Calcul du coefficient x.
Le calcul se fait par la formule :

$$T'(R(\hat{h} + \sum b_j\hat{q}_j) \cup R(\hat{h} + \sum b_j\hat{q}_j))(\delta) = (R(\hat{h} + \sum b_j\hat{q}_j) \cup R(\hat{h} + \sum b_j\hat{q}_j))(T(\delta)).$$

Si $\ell \leq 2g' - 1$, on a $R(\hat{h} + \sum b_j\hat{q}_j)(\delta_\ell)_0 = 0$.
Mais si $\ell = 2g' + k, 0 \leq k \leq m-1$, on a

$$\begin{aligned}&(R(\hat{h} + \sum b_j\hat{q}_j) \cup R(\hat{h} + \sum b_j\hat{q}_j))(q_k, e_{2g'+k+1}, e_{2g'+k}) \\ &= R(\hat{h} + \sum b_j\hat{q}_j)(q_k) R(\hat{h} + \sum b_j\hat{q}_j)(e_{2g'+k}).\end{aligned}$$

On a d'abord $R(\hat{h} + \sum b_j\hat{q}_j)(q_k) = 1$ si et seulement si $k \geq r - 1$.
Ensuite on calcule $R(\hat{h} + \sum b_j\hat{q}_j)(e_{2g'+k}) = (c_0 + c_1 + \cdots + c_{k-1})$ où $c_u = \frac{b_u a}{a_u}$ qui est non nul seulement si $u < r$. On obtient $(c_0 + c_1 + \cdots + c_{k-1}) = 1$ si et seulement si $k - r$ est impair.
- **Si** r **impair,** k doit être pair et comme on est dans le Cas où $c = 0$, on doit avoir $m - r$ pair donc m impair. Le nombre de k pairs entre $r + 1$ pair et $m - 1$ pair, $r + 1 \leq k \leq m - 1$, est $x = \frac{m-r}{2}$.
- **Si** r **est pair,** alors k est impair et m est pair. Le nombre de k impairs entre $r + 1$ impair et $m - 1$ impair, $r + 1 \leq k \leq m - 1$, est $x = \frac{m-r}{2}$.
On en déduit que
$(R(\hat{h} + \sum b_j\hat{q}_j) \cup R(\hat{h} + \sum b_j\hat{q}_j))(\delta_\ell) = 1$ si et seulement si $\ell = 2g' + r + 2i$ pour un $i > 0$ et donc que $x = \frac{m-r}{2} = \frac{1}{2}\sum_r^{m-1} 1$.

Le calcul de x a été fait pour les TYPES o_i. Pour les TYPES n_i, $T(\delta) = \sum \delta_\ell$. Par conséquent ce calcul est valable aussi pour les TYPES n_i.

• Calcul des coefficients r_k
On rappelle que $(\mu_{k,.})_0 = x_{k,.}$ et $(\mu_{k,.})_2 = p_{k,.}$ et $r_k = \sum_{\ell=0}^{m-1} R(\hat{h} + \sum b_j\hat{q}_j)(p_{k,\ell})R(\hat{h} + \sum b_j\hat{q}_j)(x_{k,\ell})$.
Si $b_k > 0$

- si $0 \leq k \leq r - 1$, les b_k sont pairs. Le terme intervenant dans chaque $R(\hat{h} + \sum b_j\hat{q}_j)$ est $\sum_t V_t$, plus précisement
$$\sum_t \sum_{u\geq 1} \hat{p}_{t,u}\mathrm{card}\{i \geq u \mid x_{t,i} = h\}.$$
Calculons $R(\hat{h} + \sum b_j\hat{q}_j)(x_{k,\ell})$.
- Si ℓ est tel que $x_{k,\ell} = h$, ce qui arrive pour b_k d'entre eux, alors $R(\hat{h}+\sum b_j\hat{q}_j)(x_{k,\ell}) = 1$ et $r_k = \sum_{\ell=1}^{b_k-1} R(\hat{h} + \sum b_j\hat{q}_j)(p_{k,\ell})$. On a
$r_k = \sum_{\ell=1,x_{k,\ell}=h}^{m-1} \mathrm{card}\{i \geq \ell \mid x_{\ell,i} = h\} = \sum_{\ell=1}^{b_k-1}(b_k - \ell) = \frac{b_k}{2}$.
La dernière égalité est calculée modulo 2.
- Si ℓ est tel $x_{k,\ell} = q_k$, alors $R(\hat{h} + \sum b_j\hat{q}_j)(x_{k,\ell}) = 0$.
On conclut que, si $b_k > 0$ et $0 \leq k \leq r - 1$, on a $r_k = \frac{b_k}{2}$.
- si $k \geq r$, les b_k sont impairs, les $z_k = a_k + b_k$ sont pairs. La somme intervenant dans chaque $R(\hat{h} + \sum b_j\hat{q}_j)$ est $\hat{h} + \sum_{u=r}^{m-1} Z_u + \sum V_t$. Que ℓ soit tel que $x_{k,\ell} = h$ ou $x_{k,\ell} = q_k$, on a $R(\hat{h} + \sum b_j\hat{q}_j)(x_{k,\ell}) = 1$ d'où
$$\begin{aligned} r_k = &\ \sum_\ell R(\hat{h} + \sum b_j\hat{q}_j)(p_{k,\ell}) \\ = &\ \sum_{\ell=1,x_{k,\ell}=q_k}^{m-1} \mathrm{card}\{i \geq \ell \mid x_{\ell,i} = q_k\} + \sum_{\ell=1,x_{k,\ell}=h}^{m-1} \mathrm{card}\{i \geq \ell \mid x_{\ell,i} = h\} \\ = &\ \sum_{\ell=1}^{z_k-1}(z_k - \ell) = \frac{z_k}{2}. \end{aligned}$$
La dernière égalité est calculée modulo 2.

Si $b_k \leq 0$ on trouve les mêmes résultats que pour $b_k > 0$, puisque r_k devient (mod 2)

- si $k \leq r$, alors $z_k = 1 + b_k$ est impair. Ce qui change est l'expression de V_t et ce qui nous intéresse est maintenant
$\sum_t \sum_{u\geq 1} \hat{p}_{t,u}(z_k - u + 1)$. On a encore
$R(\hat{h} + \sum b_j\hat{q}_j)(x_{k,\ell})$ est égal à 1 si $x_{k,\ell} = h$ et à 0 sinon, d'où

$$r_k = \sum_{\ell=1, x_{k,\ell}=h} R(\hat{h} + \sum b_j \hat{q}_j)(p_{k,\ell}) = \sum_{\ell=1}^{b_k-1} (z_k - \ell + 1) = \frac{b_k}{2} = \frac{a_k b_k}{2}.$$

Les égalités sont calculées modulo 2.

- si $k \geq r$, alors z_k est pair. On a en plus $Z_u = \hat{q}_u + \hat{g}_u$. Comme précédemment, que ℓ soit tel que $x_{k,\ell} = h$ ou $x_{k,\ell} = q_k$, on a $R(\hat{h} + \sum b_j \hat{q}_j)(x_{k,\ell}) = 1$ d'où

$$r_k = \sum_{\ell=1}^{z_k} (z_k - \ell + 1) = \frac{z_k - 2}{2} = \frac{-b_k - 1}{2} = \frac{b_k + 1}{2} = \frac{a_k + b_k}{2} = \frac{1 + a_k b_k}{2}.$$

Les égalités sont calculées modulo 2.

Maintenant, on rappelle que dans le Cas 1, on a $\beta = [\hat{\delta}] = [\hat{\mu}_k] = \beta_k$. Le coefficient de β est $(\sum r_k) - x = \sum_{0 \leq k \leq r-1} \frac{a_k b_k}{2} + \sum_{r \leq k \leq m-1} \frac{(a_k b_k)}{2} = \frac{1}{2} \sum a_k b_k = \frac{c}{2}$.

Remarquons que ces calculs sont valables pour tous les TYPES.

• Calcul des coefficients y_j

On rappelle que

$$\begin{aligned} y_j &= R(\hat{h} + \textstyle\sum b_j \hat{q}_j)(\nu_{j,1})_2 R(\hat{h} + \sum b_j \hat{q}_j)(\nu_{j,1})_0 \\ &\quad - \varepsilon_j R(\hat{h} + \textstyle\sum b_j \hat{q}_j)(\nu_{j,2})_2 R(\hat{h} + \sum b_j \hat{q}_j)(\nu_{j,2})_0 . \end{aligned}$$

Pour tous les TYPES, on a $R(\hat{h} + \sum b_j \hat{q}_j)(\nu_{j,2})_0 = 0$.

Comme $R(\hat{h} + \sum b_j \hat{q}_j)((\nu_{i,1})_0) = R(\hat{h} + \sum b_j \hat{q}_j)(h) = 1$, on a $y_j = R(\hat{h} + \sum b_j \hat{q}_j)(\nu_{j,1})_2$. Alors si $\varepsilon_j = 1$, $y_j = R(\hat{h} + \sum b_j \hat{q}_j)(t_j) = 0$, tandis que si $\varepsilon_j = -1$, $y_j = R(\hat{h} + \sum b_j \hat{q}_j)(f_j) = 1$.

CONCLUSION : $\alpha \cup \alpha$ N'EXISTE QUE DANS LE CAS 1. POUR LES TYPES o_1 ET n_1, ON A $\alpha \cup \alpha = \frac{c}{2}\beta$. POUR LES TYPES o_2 ET n_2, ON A $\alpha \cup \alpha = \frac{c}{2}\beta + \sum_{j \geq 1} \varphi_j$. POUR LE TYPE n_3, ON A $\alpha \cup \alpha = \frac{c}{2}\beta + \sum_{j>1} \varphi_j$. POUR LE TYPE n_4, ON A $\alpha \cup \alpha = \frac{c}{2}\beta + \sum_{j>2} \varphi_j$. □

REMARQUE 23. Pour les TYPES o_1 et n_2 ceci correspond bien au résultat de [3], [4], [5], puisque pour a pair $\begin{pmatrix} a \\ 2 \end{pmatrix}$ est congru mod 2 à $a/2$.

7.3. Les cup-produits, pour $p = 2$, $\cup : H^1(M, \mathbb{Z}_2) \otimes H^2(M, \mathbb{Z}_2) \to H^3(M, \mathbb{Z}_2)$. Dans cette sous-section, nous utiliserons le procédé suivant.

1) Pour $[\xi_1]$ un générateur du $H^1(M, \mathbb{Z}_2)$ et $[\xi_2]$ un générateur du $H^2(M, \mathbb{Z}_2)$, on choisit un représentant ξ_1 et ξ_2. Soient $R(\xi_1)$ et $R(\xi_2)$ les cocycles Δ-simpliciaux qui sont des sections de T^t données dans la Section 6.

2) D'après la formule d'Alexander-Whitney, si f est un 1-cocycle Δ-simplicial, g un 2-cocycle Δ-simplicial et s un 3-Δ-simplexe de faces $s_0 = (v_1, v_2, v_3)$, $s_1 = (v_0, v_2, v_3)$, $s_2 = (v_0, v_1, v_3)$ et $s_3 = (v_0, v_1, v_2)$ alors $f \cup g(s) = f(v_0, v_1) g(s_0)$, et on trouve (v_0, v_1) en prenant la dernière arête de s_2 ou s_3, i.e. $(v_0, v_1) = (s_2)_2 = (s_3)_2$.

3) Quand la combinaison C des 3-simplexes telle que $R(\xi_1) \cup R(\xi_2) = C$ a été trouvée, on obtient finalement $[\xi_1] \cup [\xi_2] = [T^t C]$.

Cette sous-section prouve le théorème 8.

Preuve.

Calcul de $\theta_i \cup \varphi_j$

Ce cup-produit intervient pour tous les TYPES, dans les trois Cas.

$\theta_i = [\hat{t}_i]$ pour $1 \leq i \leq g'$ et $\varphi_j = [\hat{v}_j]$ pour $1 \leq j \leq g'$.

Le relevé de φ_j contient $\hat{v}_{j,1}$. Les seuls 3-simplexes s dont la face s_0 est $\hat{v}_{j,1}$ sont uniquement $s = N_{j,1}$ ou $s = N'_{j,1}$. Pour les différents TYPES, les découpages Δ-simpliciaux de $N_{j,1}$ et $N'_{j,1}$ sont différents.

Le relevé de θ_i est

$R(\hat{t}_i) = \hat{t}_i + \hat{f}_i + \hat{e}_\ell + \hat{S}^{\pm}_\ell + \hat{e}_{\ell-1} + \hat{S}^{\pm}_{\ell-1}$,

- si i est impair , $\ell = 2i$ ce qui donne ici $\ell = 2$ modulo 4,

- si i est pair $\ell = 2i - 1$ ce qui donne ici $\ell = 3$ modulo 4.

TYPE o_1, $\varepsilon_j = 1$, on trouve, en comparant les valeurs modulo 4 et les parités :

- pour j impair, $(N_{j,1})_3 = T^-_{2j-2}$ et $(N'_{j,1})_3 = T^-_{2j}$,
  - comme $2j - 2 = 0$ modulo 4, on a $((N_{j,1})_3)_2 = (T^-_{2j-2})_2 = S^-_{2j-2}$,
    - si i est impair, $2i$ et $2i-1$ ne sont pas égaux modulo 4 à $2j-2$, on a $R(\hat{t}_i)((N_{j,1})_3)_2 = 0$,
    - si i est pair, $2i - 1$ et $2i - 2$ ne sont pas égaux modulo 4 à $2j - 2$, on a $R(\hat{t}_i)((N_{j,1})_3)_2 = 0$,
  - comme $2j = 2$ modulo 4, on a $((N'_{j,1})_3)_2 = (T^-_{2j})_2 = S^-_{2j+1}$,
    - si i est impair, comme $2j + 1$ et $2i$ ne sont pas de la même parité, on a $R(\hat{t}_i)((N'_{j,1})_3)_2 = 0$,
    - si i est pair et $i = j + 1$ alors $R(\hat{t}_{j+1})((N'_{j,1})_3)_2 = 1$,
- pour j pair, $(N_{j,1})_3 = T^-_{2j-3}$ et $(N'_{j,1})_3 = T^-_{2j-1}$,
  - comme $2j - 3 = 1$ modulo 4, on a $((N_{j,1})_3)_2 = (T^-_{2j-3})_2 = S^-_{2j-3}$,
    - si i est impair et $i = j - 1$, on a $R(\hat{t}_{j-1})((N_{j,1})_3)_2 = 1$,
    - si i est pair, $2i - 1$ et $2i - 2$ ne sont pas égaux modulo 4 à $2j - 3$, on a $R(\hat{t}_i)((N_{j,1})_3)_2 = 0$,
  - comme $2j = 2$ modulo 4, on a $((N'_{j,1})_3)_2 = (T^-_{2j-1})_2 = S^-_{2j}$,
    - si i est impair, $2i$ et $2i-1$ ne sont pas égaux modulo 4 à $2j$, on a $R(\hat{t}_i)((N'_{j,1})_3)_2 = 0$,
    - si i est pair, comme $2j$ et $2i-1$ ne sont pas de la même parité, on a $R(\hat{t}_i)((N'_{j,1})_3)_2 = 0$.

De plus on a $T^t[N_{j,1}] = T^t[N'_{j,1}] = \epsilon$, d'où la conclusion :

CONCLUSION : DANS TOUS LES CAS, POUR LE TYPE o_1, LES SEULS $\theta_i \cup \varphi_j$ NON NULS SONT :

- SI j EST IMPAIR $\theta_{j+1} \cup \varphi_j = \gamma$,

- SI j EST PAIR $\theta_{j-1} \cup \varphi_j = \gamma$.

TYPE o_2, $\varepsilon_j = -1$, on trouve

- pour j impair, $(N_{j,1})_2 = T^-_{2j-2}$ et $(N'_{j,1})_2 = T^+_{2j}$,
  - comme $2j - 2$ est égal à 0 modulo 4, on a $((N_{j,1})_3)_2 = (T^-_{2j-2})_2 = S^-_{2j-2}$,
  - comme $2j$ est égal à 2 modulo 4, on a $((N'_{j,1})_3)_2 = (T^+_{2j})_2 = S^+_{2j+1}$,
- pour j pair, $(N_{j,1})_2 = T^+_{2j-3}$ et $(N'_{j,1})_2 = T^-_{2j-1}$,
  - comme $2j - 3$ est égal à 1 modulo 4, on a $((N_{j,1})_3)_2 = (T^+_{2j-3})_2 = S^+_{2j-3}$,
  - comme $2j - 1$ est égal à 3 modulo 4, on a $((N'_{j,1})_3)_2 = (T^-_{2j-1})_2 = S^-_{2j}$.

Peu importe qu'on applique $R(\hat{t}_i)$ à un $S^+_{..}$ ou à un $S^-_{..}$, on obtient les mêmes conditions sur les indices que pour le TYPE o_1. On a encore $T^t[N_{j,1}] = T^t[N'_{j,1}] = \epsilon$, d'où la même conclusion que pour le Type o_1 :

CONCLUSION : DANS TOUS LES CAS, POUR LE TYPE o_2, LES SEULS $\theta_i \cup \varphi_j$ NON NULS SONT :
- SI j EST IMPAIR $\theta_{j+1} \cup \varphi_j = \gamma$,
- SI j EST PAIR $\theta_{j-1} \cup \varphi_j = \gamma$.

TYPE n_1, $\varepsilon_j = 1$, pour tous j, on a $(N_{j,1})_3 = T^-_{2j-2}$ et $(N'_{j,1})_3 = T^-_{2j-1}$. Comme plus haut, en comparant les valeurs modulo 4 et les parités, on trouve :

- pour j impair,
  - $((N_{j,1})_3)_2 = (T^-_{2j-2})_2 = S^-_{2j-2}$,
    - pour i impair, on a $R(\hat{t}_i)((N_{j,1})_3)_2 = 0$,
    - pour i pair, on a $R(\hat{t}_i)((N_{j,1})_3)_2 = 0$,
  - $((N'_{j,1})_3)_2 = (T^-_{2j-1})_2 = S^-_{2j-1}$,
    - pour i impair et $i = j$, on a $R(\hat{t}_j)((N'_{j,1})_3)_2 = 1$,
    - pour i pair, on a $R(\hat{t}_i)((N'_{j,1})_3)_2 = 0$,
- pour j pair,
  - $((N_{j,1})_3)_2 = (T^-_{2j-2})_2 = S^-_{2j-1}$,
    - pour i impair, on a $R(\hat{t}_i)((N_{j,1})_3)_2 = 0$,
    - pour i pair, on a $R(\hat{t}_i)((N_{j,1})_3)_2 = 0$,
  - $((N'_{j,1})_3)_2 = (T^-_{2j-1})_2 = S^-_{2j}$,
    - pour i impair et $i = j$, on a $R(\hat{t}_j)((N'_{j,1})_3)_2 = 0$,
    - pour i pair, on a $R(\hat{t}_i)((N'_{j,1})_3)_2 = 1$.

CONCLUSION : DANS LES TROIS CAS, POUR LES TYPES n_1, ON A $\theta_j \cup \varphi_j = \gamma$ ET 0 SINON.

TYPE n_2, $\varepsilon_j = -1$ pour tous j, on a $((N_{j,1})_2)_2 = (T^-_{2j-2})_2 = S^-_{2j-2}$ et $((N'_{j,1})_2) = (T^+_{2j-1})_2 = S^+_{2j-1}$. Comme pour le TYPE n_1, en comparant les valeurs modulo 4 et les parités, on trouve la même conclusion puisque le signe $\pm$ de l'arête $S^\pm_{.}$ ne change rien au calcul.

CONCLUSION : DANS LES TROIS CAS, POUR LES TYPES n_2, $\theta_j \cup \varphi_j = \gamma$ ET 0 SINON.

TYPES n_3, n_4 en utilisant les résultats précédents pour $\varepsilon_j = 1$ et $\varepsilon_j = -1$, on a la conclusion :

CONCLUSION : DANS LES TROIS CAS, POUR LES TYPES n_3 ET n_4, ON A $\theta_j \cup \varphi_j = \gamma$ ET 0 SINON.

Calcul de $\alpha \cup \varphi_j$

Ce cup-produit intervient pour tous les TYPES seulement dans le Cas 1.
$\alpha = [\hat{h} + \sum b_k \hat{q}_k]$ et $\varphi_j = [\hat{v}_j]$.
D'après l'étude précédente, on sait déjà que le relevé de φ_j contient $\hat{v}_{j,1}$. Les seuls 3-simplexes s dont la face s_0 est $\hat{v}_{j,1}$ sont uniquement $s = N_{j,1}$ ou $s = N'_{j,1}$. On sait aussi que les arêtes $(s_3)_2$ ou $(s_2)_2$ sont $S^\pm_u$ avec $1 \leq u \leq g'$.
Dans le relevé de α n'interviennent que les S^+_u. L'étude précédente mène à la conclusion :

CONCLUSION : LOSQUE $\varepsilon_j = 1$, $\alpha \cup \varphi_j = 0$ ET LORSQUE $\varepsilon_j = -1$, $\alpha \cup \varphi_j = \gamma$.

Calcul de $\alpha \cup \beta$

Ce cup-produit intervient pour tous les TYPES seulement dans le Cas 1.

Maintenant, pour tous les TYPES, dans le relevé de α, il y a l'arête A^+. Comme $T^t(D_0^+) = \epsilon$, on a la conclusion :

CONCLUSION : DANS LE CAS 1, POUR TOUS LES TYPES, ON A TOUJOURS $\alpha \cup \beta = \gamma$.

Calcul de $\alpha_i \cup \beta_k$

Ce cup-produit intervient pour tous les TYPES mais seulement dans le Cas 3.

Le relevé de β_k est $R(\hat{\mu}_k) = \hat{\mu}_{k,1} + \hat{X}_{k,1} + \hat{G}_k - \sum_{1\leq\ell\leq z_k - w_{k+1}} \hat{P}_{k,\ell}$. Le seul 3-simplexe s tel que $R(\hat{\mu}_k)(s_0) = 1$ est $s = M^{\pm}_{k,1}$. On a $s_3 = P^{\pm}_{k,1}$ et $(P^{\pm}_{k,1})_2 = C^{\pm}_k$. Dans le relevé de α_i apparaît seulement (via Z_i) C^+_i.

On vérifie que $T^t(M^{\pm}_{k,1}) = \zeta_k$ et on a $\gamma = [\hat{\zeta}_k]$.

CONCLUSION : DANS LE CAS 3, POUR TOUS LES TYPES, $\alpha_k \cup \beta_k = \gamma$ ET 0 SINON.

$\theta_i \cup \beta_k$ et $\alpha_k \cup \varphi_j$ Pour des raisons topologiques, ces cup-produits sont nuls.

Calcul de $\theta_i \cup \beta$

Ce cup-produit intervient pour tous les TYPES mais seulement dans le Cas 1.

On a $\theta_i = [\hat{t}_i]$ et $\beta = [\hat{\delta}]$.

On cherche un 3-simplexe s tel que $R(\hat{\delta})(s_0) \neq 0$ sachant que $R(\hat{\delta}) = \hat{\delta}_0 + \hat{T}^{\pm}_0 + \hat{F}_0$. Le seul possible 3-simplexe est $s = D^{\pm}_0$ pour lequel $(s_3)_2 = (E^{\pm}_0)_2 = A^{\pm}$. Comme l'arête $A^{\pm}$ n'intervient pas dans le relevé de θ_i, on a :

CONCLUSION : DANS LE CAS 1, POUR TOUS LES TYPES, ON A $\theta_i \cup \beta = 0$. □

8. Calcul des cup-produits pour $p > 2$

Ce calcul est à la fois plus compliqué (1 et -1 ne sont plus égaux, et les générateurs diffèrent selon les TYPES) et plus simple (la plupart des cup-produits seront nuls).

8.1. Les cup-produits, pour $p > 2$, $\cup : H^1(M,\mathbb{Z}_p)\otimes H^1(M,\mathbb{Z}_p) \to H^2(M,\mathbb{Z}_p)$. Par la même méthode des coefficients, en calculant maintenant modulo p, cette sous-section prouve le théorème 9.

Preuve.

Calcul de $\theta_i \cup \theta_j$

- Dans le Cas 1

TYPE o_1, o_2, $\theta_j = [\hat{t}_j]$.

• Il y a seulement à calculer x mais en prenant garde aux signes dans $T(\delta)$:

$T(\delta) = \sum_{i=0}^{g-1}(\delta_{4i} + \delta_{4i+1} - \delta_{4i+2} - \delta_{4i+3}) + \sum_{\ell=4g}^{4g+m} \delta_\ell$ donne alors $x = 1$ si i impair et $j = i+1$, mais $x = -1$ si i pair et $j = i-1$.

CONCLUSION : DANS LE CAS 1, POUR LES TYPES o_1, o_2, LES CUP-PRODUITS $\theta_i \cup \theta_j$ SONT NULS SAUF $\theta_{2k-1} \cup \theta_{2k} = \beta, k > 0$.

TYPES n_i, $\theta_j = [\hat{t}_j - \hat{t}_1]$.

On a $R(\hat{t}_j - \hat{t}_1) = \hat{t}_j + \hat{f}_j - (\hat{t}_1 + \hat{f}_1) - \sum\left(\hat{S}^{\pm}_\ell + \hat{e}_\ell\right)$.

• Les coefficients r_i et y_ℓ sont encore nuls.

• On ne calcule pas x car β n'est pas un générateur du $H^2(M, \mathbb{Z}_p)$.

CONCLUSION : DANS LE CAS 1, POUR LES TYPES n_i, LES CUP-PRODUITS $\theta_i \cup \theta_j$ SONT TOUS NULS.

- Dans le Cas 2

TYPE o_1, $\theta_j = [\hat{t}_j]$.

• Comme les relevés sont les mêmes que pour $p = 2$, les coefficients r_k et y_ℓ sont encore nuls.

• On ne calcule pas x car β n'est pas un générateur du $H^2(M, \mathbb{Z}_p)$.

CONCLUSION : DANS LE CAS 2, POUR LES TYPES o_1, LES CUP-PRODUITS $\theta_i \cup \theta_j$ SONT TOUS NULS.

TYPE o_2, $\theta_j = [\hat{t}_j]$.

• Comme les relevés sont les mêmes que pour $p = 2$, les coefficients r_k et y_ℓ sont encore nuls.

• Il y a seulement à calculer x mais en prenant garde aux signes dans $T(\delta)$, comme dans le Cas 1 pour les TYPES o_i.

CONCLUSION : DANS LE CAS 2, POUR LES TYPES o_2, LES CUP-PRODUITS $\theta_i \cup \theta_j$ SONT NULS SAUF $\theta_{2k-1} \cup \theta_{2k} = \beta, k > 0$.

TYPES n_i. La situation est la même que dans le Cas 1.

CONCLUSION : DANS LE CAS 2, POUR LES TYPES n_i, LES CUP-PRODUITS $\theta_i \cup \theta_j$ SONT TOUS NULS.

- Dans le Cas 3

TYPES o_i, n_i.

• Comme les relevés sont les mêmes que pour $p = 2$, les coefficients r_k et y_ℓ sont encore nuls.

• On ne calcule pas x car β n'est pas un générateur du $H^2(M, \mathbb{Z}_p)$.

CONCLUSION : DANS LE CAS 3, POUR LES TYPES o_i, n_i, LES CUP-PRODUITS $\theta_i \cup \theta_j$ SONT TOUS NULS.

Calcul de $\theta_j \cup \alpha$

Ce cup-produit n'intervient que dans le Cas 1 pour le TYPE o_1 et dans les Cas 1 et 2 pour le TYPE n_1 .

- Dans le Cas 1

TYPE o_1, $\theta_j = [\hat{t}_j]$ et $\alpha = [\hat{h} - \sum b_k a_k^{-1} \hat{q}_k]$.

• Calcul du coefficient x.

Dans $T(\delta)$, l'indice des Δ-simplexes δ_u varie de 0 à $4g + m$. Pour $u \leq 4g - 1$, le Δ-simplexe δ_u est $\delta_u = (t_., e_., e_.)$ et $R(\hat{h} - \sum b_k a_k^{-1} \hat{q}_k)$ le relevé de α appliqué à $(\delta_u)_0 = t_.$ est nul. Lorsque $u \geq 4g$, le Δ-simplexe δ_u est $\delta_u = (q_., e_., e_.)$ et $R(\hat{t}_j)$ le relevé de θ_j appliqué à $(\delta_u)_2 = e_.$ est nul. Le coefficient x est nul.

• Calcul du coefficient y_j.

Pour le TYPE o_1, on a $T(\nu_j) = \nu_{j,1} + \nu_{j,2}$, puisque tous les $\varepsilon_j = 1$ et $\nu_{j,1} = (h, f_j, t_j), \nu_{j,2} = (t_j, f_j, h)$. On voit que seulement

$$R(\hat{h} - \sum b_k a_k^{-1} \hat{q}_k)((\nu_{j,1})_0) = 1, R(\hat{t}_j)((\nu_{j,1})_2) = 1.$$

CONCLUSION : LES CUP-PRODUITS $\theta_j \cup \alpha$ SONT NULS SAUF POUR LE TYPE o_1, DANS LE CAS 1 ET ALORS $\theta_j \cup \alpha = \varphi_j$.

TYPE n_1, $\theta_j = [\hat{t}_j - \hat{t}_1]$ et $\alpha = [\hat{h} - \sum b_k a_k^{-1} \hat{q}_k]$.
Dans le relevé de θ_j intervient $t_1 + f_1$ mais ce terme ne donne pas de contribution car il suffit de calculer y_j pour $j > 1$ puisque φ_1 n'est pas un générateur de $H^2(M, \mathbb{Z}_p)$. Alors la conclusion est la même que pour le TYPE o_1 avec une restriction sur l'indice j.

CONCLUSION : DANS LES CAS 1, POUR LE TYPE n_1, $\theta_j \cup \alpha = \varphi_j$, $j > 1$.

-Dans le Cas 2
TYPE n_1, $\theta_j = [\hat{t}_j - \hat{t}_1]$ et $\alpha = [\hat{h} - \sum b_k a_k^{-1} \hat{q}_k]$.
La conclusion est la même que dans le Cas 1.

CONCLUSION : DANS LES CAS 2, POUR LE TYPE n_1, $\theta_j \cup \alpha = \varphi_j$, $j > 1$.

Calcul de $\alpha \cup \alpha$

Ce cup-produit n'intervient que dans le Cas 1 pour le TYPE o_1 et dans les Cas 1 et 2 pour le TYPE n_1.

- Dans le Cas 1

TYPE o_1, $\alpha = [\hat{h} - \sum b_k a_k^{-1} \hat{q}_k]$.
Le relevé de α est $R(\hat{h} - \sum b_k a_k^{-1} \hat{q}_k) = \hat{h} + \sum \hat{f}_j + \sum \hat{g}_k + \hat{A}^+ + \sum \hat{S}_\ell^+ - \sum b_k a_k^{-1} Z_k - \sum V_k - \frac{1}{a}[c_0(\hat{e}_{2g'+1} + \hat{S}^\pm_{2g'+1}) + (c_0 + c_1)(\hat{e}_{2g'+2} + \hat{S}^\pm_{2g'+2}) + \ldots + (c_0 + \ldots + c_{m-1})(\hat{e}_{2g'+m} + \hat{S}^\pm_{2g'+m})]$.
• Calcul du coefficient x.
Comme $R(\hat{h} - \sum b_k a_k^{-1} \hat{q}_k)(t_j) = 0$, on a

$$x = \sum R(\hat{h} - \sum b_k a_k^{-1} \hat{q}_k)(e_{2g'+k}) R(\hat{h} - \sum b_k a_k^{-1} \hat{q}_k)(q_k).$$

• Calcul des coefficients r_k.

- Si $b_k > 0$,

$$\begin{aligned} r_k &= \sum R(\hat{h} - \textstyle\sum b_k a_k^{-1} \hat{q}_k)(p_{k,\ell}) R(\hat{h} - \sum b_k a_k^{-1} \hat{q}_k)(x_{k,\ell}) \\ &= \textstyle\sum_{x_{k,\ell}=q_k} (-b_k/a_k)[(b_k/a_k)\mathrm{card}\{i \geq \ell \mid x_{k,i} = q_k\} - \mathrm{card}\{i \geq \ell \mid x_{k,i} = h\}] \\ &\quad + \textstyle\sum_{x_{k,\ell}=h} [(b_k/a_k)\mathrm{card}\{i \geq \ell \mid x_{k,i} = q_k\} - \mathrm{card}\{i \geq \ell \mid x_{k,i} = h\} \\ &= \frac{-1}{a_k^2} \textstyle\sum_{i \geq \ell} s_i s_\ell, \end{aligned}$$

  avec $s_i = b_k$ si $x_{k,i} = q_k$ et $s_i = -a_k$ si $x_{k,i} = h$. Cet *entier* $\sum_{i \geq \ell} s_i s_\ell$ est égal à : $\sum_{i \geq \ell} s_i s_\ell = \frac{1}{2}[\sum(s_\ell^2) - (\sum s_\ell)^2] = \frac{1}{2}(a_k b_k^2 + b_k a_k^2 - 0) = \frac{a_k b_k(a_k + b_k)}{2}$,
  donc $r_k = -\frac{b_k(a_k+b_k)}{2a_k}$.
- Si $b_k \leq 0$,

$$\begin{aligned} r_k = \;& R(\hat{h} - \textstyle\sum b_k a_k^{-1} \hat{q}_k)(q_k)\alpha(p_{k,1}) - R(\hat{h} - \sum b_k a_k^{-1} \hat{q}_k(p_{k,3} + \\ & \ldots + p_{k,1}) R(\hat{h} - \textstyle\sum b_k a_k^{-1} \hat{q}_k)(h) \\ = \;& -\textstyle\sum_{\ell > 2} \alpha(p_{k,\ell}) = -\sum_{\ell > 2}(z_k - \ell + 1) = -\frac{(z_k-2)(z_k-1)}{2}, \end{aligned}$$

  or $z_k = 1 - b_k$ et $a_k = 1$ d'où
  $r_k = -\frac{b_k(a_k+b_k)}{2a_k}$, comme dans le cas $b_k > 0$.

• Calcul des coefficients y_ℓ.
On a

$$\begin{aligned} y_j &= R(\hat{h} - \sum b_k a_k^{-1} \hat{q}_k)(t_j) R(\hat{h} - \sum b_k a_k^{-1} \hat{q}_k)(h) \\ &\quad - R(\hat{h} - \sum b_k a_k^{-1} \hat{q}_k)(h) R(\hat{h} - \sum b_k a_k^{-1} \hat{q}_k)(t_j) \\ &= 0. \end{aligned}$$

Il reste $\alpha \cup \alpha = [x\hat{\delta} + \sum r_k \hat{\mu}_k] = N[\hat{\delta}]$, avec

$$N = x - \sum \frac{r_k}{a_k} = \sum_{k=0}^{m} \frac{b_k}{a_k} (\sum_{i<k} \frac{b_i}{a_i}) + \sum \frac{b_k(a_k + b_k)}{2a_k^2} = \frac{c(a+c)}{2} a^{-2}.$$

Comme c est divisible par $p > 2$, N est congru mod p à 0.

CONCLUSION : DANS LE CAS 1, POUR LE TYPE o_1, $\alpha \cup \alpha = 0$.

TYPE n_1, $\alpha = [\frac{c}{2}\hat{t}_1] + \hat{h} - \sum b_k a_k^{-1} \hat{q}_k]$.
Le relevé de α est $R(\hat{h} - \sum b_k a_k^{-1} \hat{q}_k) = \hat{h} + \sum \hat{f}_j + \sum \hat{g}_k + \hat{A}^+ + \sum \hat{S}_\ell^+ - \sum b_k a_k^{-1} Z_k - \sum V_k - \frac{1}{a}[c_0(\hat{e}_{2g'+1} + \hat{S}^\pm_{2g'+1}) + (c_0 + c_1)(\hat{e}_{2g'+2} + \hat{S}^\pm_{2g'+2}) + \ldots + (c_0 + \ldots + c_{m-1})(\hat{e}_{2g'+m} + \hat{S}^\pm_{2g'+m})] + \frac{c}{2} a\Big((\hat{t}_1 + \hat{f}_1) - (\hat{S}^\pm_1 + \hat{e}_1) - 2(\hat{S}^\pm_0 + \hat{e}_0)\Big)$.
Comme p divise c, le nouveau dernier facteur n'intervient pas dans le calcul des coefficients. De plus pour ce TYPE, on a $[\hat{\delta}] = 0$.

CONCLUSION : DANS LE CAS 1, POUR LE TYPE n_1, $\alpha \cup \alpha = 0$.

- Dans le Cas 2
Pour le TYPE n_1, la situation est la même que dans le Cas 1.

CONCLUSION : DANS LE CAS 2, POUR LE TYPE n_1, $\alpha \cup \alpha = 0$.

Calcul de $\alpha_k \cup \alpha_j$

Ce cup-produit intervient dans le Cas 3 pour tous les TYPES. Le déroulement de la preuve est la même que pour $p = 2$. Il faut maintenant tenir compte des signes $\pm$ et de la divisibilité par p.
TYPE o_i. Le générateur α_k est alors $\alpha_k = [\hat{q}_k - \hat{q}_0]$ pour $1 \le k \le n-1$. Nous devons calculer les coefficients r_ℓ et y_i.
• Calcul des coefficients $r_\ell = \sum_w R(\hat{q}_k - \hat{q}_0)(\mu_{\ell,w})_2 R(\hat{q}_j - \hat{q}_0)(\mu_{\ell,w})_0$, avec $(\mu_{\ell,w})_0 = x_{\ell,w}$ et $(\mu_{\ell,w})_2 = p_{\ell,w}$.

1) Dans $R(\hat{q}_j - \hat{q}_0)$ interviennent Z_j et $-Z_0$ et, dans Z_u on voit $\hat{q}_u - \sum_{s\ge1} \hat{p}_{u,s}\mathrm{card}\{t \ge s \mid x_{u,t} = q_u\}$.
-Si $u = j$, $R(\hat{q}_j - \hat{q}_0)(\mu_{\ell,w})_0 = R(\hat{q}_j - \hat{q}_0)(x_{\ell,w}) = 0$ sauf si $\ell = j$ et ceci pour tous les a_j indices w tels que $x_{j,w} = q_j$. Dans ces situations $R(\hat{q}_j - \hat{q}_0)(\mu_{j,w})_0 = 1$.
- Si $u = 0$, $R(\hat{q}_j - \hat{q}_0)(\mu_{\ell,w})_0 = 0$ sauf si $\ell = 0$ et ceci pour tous les a_0 indices w tels que $x_{0,w} = q_0$. Dans ces situations $R(\hat{q}_j - \hat{q}_0)(\mu_{0,w})_0 = -1$.

2) $R(\hat{q}_k - \hat{q}_0)(\mu_{\ell,w})_2 = R(\hat{q}_k - \hat{q}_0)(p_{\ell,w}) = 0$ sauf si
i) $\ell = j = k$ et pour tous les w tels que $x_{k,w} = q_k$. Dans ces situations on a $R(\hat{q}_k - \hat{q}_0)(p_{k,w}) = -\mathrm{card}\{t \ge w \mid x_{k,t} = q_k\}$;

ii) $\ell = 0$ et pour tous les w tels que $x_{0,w} = q_0$. Dans ces situations on a $R(\hat{q}_k - \hat{q}_0)(p_{0,w}) = -\mathrm{card}\{t \geq w \mid x_{0,t} = q_0\}$.

Si $k = j$, nous avons obtenu

$$r_k = -\sum_{\substack{w\geq 1\\ x_{k,w}=q_k}} R(\hat{q}_k - \hat{q}_0)(\mu_{k,w})_2 = -\sum_{w=1}^{w=a_k-1}(a_k - w) = -\frac{a_k(a_k-1)}{2}.$$

Comme $p \mid a_k$, tous les r_k sont nuls. (Remarquons que ceci n'est pas vrai quand $p = 2$.)

• Calcul des coefficients

$$y_i = R(\hat{q}_k - \hat{q}_0)(\nu_{i,1})_2 R(\hat{q}_j - \hat{q}_0)(\nu_{i,1})_0 - \varepsilon_i R(\hat{q}_k - \hat{q}_0)(\nu_{i,2})_2 R(\hat{q}_j - \hat{q}_0)(\nu_{i,2})_0.$$

Nous avons

$(\nu_{i,1})_2 = t_i$ si $\varepsilon_i = 1$ et $(\nu_{i,1})_2 = f_i$ si $\varepsilon_i = -1$;

$(\nu_{i,1})_0 = (\nu_{i,2})_2 = h; (\nu_{i,2})_0 = t_i$.

Aucun de ces éléments n'intervient dans $R(\hat{q}_u - \hat{q}_0)$. On a que pour tout $i, y_i = 0$.

- Il reste à remarquer que les calculs précédents sont valables pour les TYPES o_1 et o_2.

CONCLUSION : POUR LES TYPES o_i, TOUS LES CUP-PRODUITS $\alpha_k \cup \alpha_j$ SONT NULS.

Pour les TYPES n_i. Maintenant le générateur est $\alpha = [\hat{q}_k - \frac{1}{2}\hat{t}_g]$.

• Calcul des r_k. La différence avec le paragraphe précédent est que le terme Z_0 n'intervient pas. Les calculs des r_k restent les mêmes et les r_k sont nuls puisque $p \mid a_k$.

• Dans les $R(\hat{q}_k - \frac{1}{2}\hat{t}_g)$ il y a maintenant $\frac{1}{2}t_g$ mais $R(\hat{q}_j - \frac{1}{2}\hat{t}_g)(\nu_{i,1})_0 = R(\hat{q}_j - \frac{1}{2}\hat{t}_g)(h) = 0$ et $R(\hat{q}_k - \frac{1}{2}\hat{t}_g)(\nu_{i,1})_2 = R(\hat{q}_k - \frac{1}{2}\hat{t}_g)(h) = 0$. Ici aussi tous les y_i sont nuls.

CONCLUSION : POUR LES TYPES n_i, TOUS LES CUP-PRODUITS $\alpha_k \cup \alpha_j$ SONT NULS. □

8.2. Les cup-produits, pour $p > 2$, $\cup : H^1(M, \mathbb{Z}_p) \otimes H^2(M, \mathbb{Z}_p) \to H^3(M, \mathbb{Z}_p)$. Il suffit de considérer les TYPES o_1 et n_2, car dans le cas non orientable, $H^3(M, A)$ à coefficients dans un anneau A vaut $A/2A$. Il est nul si $A = \mathbb{Z}_p$ avec $p > 2$.

On rappelle que si f est un 1-cocycle, g un 2-cocycle, et s un 3-simplexe de faces $s_0 = (v_1, v_2, v_3)$, $s_1 = (v_0, v_2, v_3)$, $s_2 = (v_0, v_1, v_3)$ et $s_3 = (v_0, v_1, v_2)$ alors $f \cup g(s) = f(v_0, v_1)g(s_0)$, et on trouve (v_0, v_1) en prenant la dernière arête de s_2 ou s_3, i.e. $(v_0, v_1) = (s_2)_2 = (s_3)_2$.

Mais aussi, si g est un 2-cocycle, f un 1-cocycle et $s = (s_0, s_1, s_2, s_3)$ un 3-simplexe de faces $s_0 = (v_1, v_2, v_3)$, $s_2 = (v_0, v_2, v_3)$ et $s_3 = (v_0, v_1, v_2)$, où les v_i sont les sommets, alors $g \cup f(s) = g(s_3)f(v_2, v_3)$. On trouve (v_2, v_3) en prenant la première arête de s_1 ou de s_0, i.e. $(v_2, v_3) = (s_1)_0 = (s_0)_0$.

Dans ces dimensions de cocycles, on a $f \cup g = (-1)^{1\times 2} g \cup f = g \cup f$.

Cette sous-section prouve le théorème 10.

Preuve. **Calcul de $\theta_i \cup \varphi_j$**

Ces cup-produits interviennent dans les trois Cas.

TYPE o_1, $\theta_i = [\hat{t}_i], 1 \leq i \leq 2g$ et $\varphi_j = [\hat{v}_j], 1 \leq j \leq 2g$.

Comme pour $p = 2$, on trouve $R(\hat{t}_i) \cup R(\hat{v}_j) = 0$ sauf

- si j est impair, $R(\hat{t}_{j+1}) \cup R(\hat{v}_j) = N'_{j,2}$

- si j est pair $R(\hat{t}_{j-1}) \cup R(\hat{v}_j) = N_{j,2}$.

Pour $p > 2$, on a
- pour j impair, $T^t(N'_{j,2}) = -\epsilon$ d'où $\theta_{j+1} \cup \varphi_j = -\gamma$
- pour j pair, $T^t(N'_{j-1,2}) = \epsilon$ d'où $\theta_{j-1} \cup \varphi_j = \gamma$.

Conclusion : Dans les trois Cas, pour le Type o_1, on a
- pour j impair $\theta_{j+1} \cup \varphi_j = -\gamma$
- pour j pair $\theta_{j-1} \cup \varphi_j = \gamma$.

Type n_2.
On a $\theta_i = [\hat{t}_i - \hat{t}_1]$, $i > 1$, et $\varphi_j = [\hat{v}_j]$, $j > 1$. Pour le Type n_2, tous les ε_j sont égaux à -1. Le relevé de θ_i n'est plus le même que pour $p = 2$, mais on a encore $R(\hat{t}_i - \hat{t}_1) \cup R(\hat{v}_j) = 0$ sauf si $i = j$. De plus on a $T^t(N'_{j,2}) = \epsilon$, d'où la conclusion :

Conclusion : Dans les trois Cas, pour le Type n_2, on a $\theta_j \cup \varphi_j = \gamma$, et 0 sinon.

Calcul de $\theta_i \cup \beta$, $\alpha \cup \beta$, $\alpha \cup \varphi_j$

Ces cup-produits n'interviennent que pour le Type o_1 dans le Cas 1.

La preuve est exactement la même que pour $p = 2$, d'où la conclusion :

Conclusion : On a toujours $\theta_i \cup \beta = 0$, $\alpha \cup \beta = \gamma$, $\alpha \cup \varphi_j = 0$.

Calcul de $\alpha_i \cup \beta_k$

Ces cup-produits n'interviennent que dans le Cas 3. Les calculs suivants ne dépendent pas des Types.

Comme pour $p = 2$, le seul 3-simplexe s tel que $R(\hat{\mu}_k)(s_0) = 1$ est $s = M^{\pm}_{k,1}$. On a $s_3 = P^{\pm}_{k,1}$ et $(P^{\pm}_{k,1})_2 = C^{\pm}_k$. Dans le relevé de α_i apparaît seulement (via Z_k) C^+_k, affecté du coefficient $-v_k$, si $i = k$.

Du fait que $a_k u_k - b_k v_k = 1$ et que p divise a_k, on $-v_k = b_k^{-1}$ dans $\mathbb{Z}_p$. On vérifie que $T^t(M^{\pm}_{k,1}) = \zeta_k$ et on a $\gamma = [\hat{\zeta}_k]$.

Conclusion : Dans le Cas 3, pour les Types o_1 et n_2, $\alpha_i \cup \beta_k = 0$ sauf si $i = k$ et dans cette situation on a $\alpha_k \cup \beta_k = b_k^{-1}\gamma$.

Calcul de $\alpha_k \cup \varphi_j$ Ces cup-produits n'interviennent que dans le Cas 3.
Type o_1, $\alpha_k = [\hat{q}_k - \hat{q}_0]$, $1 \leq k \leq m$ et $\varphi_j = [\hat{v}_j]$, $1 \leq j \leq 2g$.
La preuve est exactement la même que pour $p = 2$, d'où la conclusion :

Conclusion : Dans le Cas 3, pour le Type o_1, tous les cup-produits $\alpha_k \cup \varphi_j$ sont nuls.

Type n_2, $\alpha_k = [\hat{q}_k - \frac{1}{2}\hat{t}_g]$, $0 \leq k \leq m$ et $\varphi_j = [\hat{v}_j]$, $1 < j \leq g$.
Comme pour $p = 2$, les seuls 3-simplexes s tels que $R(\hat{v}_j)s_0 \neq 0$ sont $s = N_{j,1}$ et $s = N'_{j,1}$ car on a $(N'_{j,1})_0 = (N_{j,1})_0 = v_{j,1}$. On a $((N_{j,1})_3)_2 = (F_{2j-2})_2 = S^-_{2j-2}$ et $((N'_{j,1})_3)_2 = (F_{2j-1})_2 = S^+_{2j-1}$.
- Le relevé de α_k est maintenant
$R(\hat{q}_k - \frac{1}{2}\hat{t}_g) = Z_k - \sum_{\ell=0}^{k}(\hat{e}_{2g+\ell} + \hat{S}^{\pm}_{2g+\ell}) - \frac{1}{2}(\hat{e}_{2g-1} + \hat{S}^{\pm}_{2g-1})$. Par conséquent, on obtient $R(\hat{q}_k - \frac{1}{2}\hat{t}_g)((N_{j,1})_3)_2 = 0$, $R(\hat{q}_k - \frac{1}{2}\hat{t}_g)((N'_{j,1}))_3)_2 = -\frac{1}{2}$ lorsque $j = g$ d'où $R(\hat{q}_k - \frac{1}{2}\hat{t}_g) \cup R(\hat{v}_j) = -\frac{1}{2}T^t(N'_{g,1})$. Comme $T^t(N'_{g,1}) = \epsilon$, on a la conclusion :

Conclusion : Dans le Cas 3, pour le Type n_2, pour tous indices k, on a $\alpha_k \cup \varphi_g = -\frac{1}{2}\gamma$. □

REMARQUE 24. Les quelques différences de signe avec les résultats obtenus précédemment (voir par exemple [5]) s'expliquent par le fait que les générateurs notés α sont de signe opposé. De plus les β_k qui apparaissent naturellement ici sont des multiples des générateurs notés b_k dans [5], ce qui modifie certains produits par ces facteurs. Pour n_2 nous avons choisi (pour éviter de distinguer inutilement les cas $n = 0$ et $n > 0$) des générateurs du $H^1(M, \mathbb{Z}_p)$ différents, mais ces perturbations sont tuées dans les produits.

9. Figures

Figure 1: Décomposition cellulaire, TYPE o_1

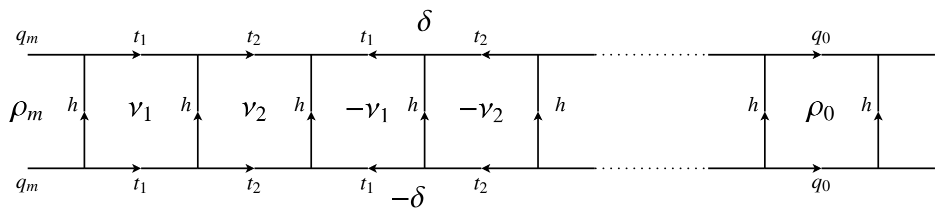


Figure 2: Décomposition cellulaire, TYPE o_2

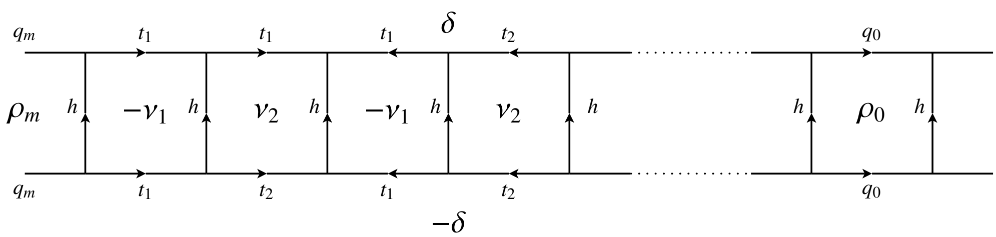


Figure 3: Décomposition cellulaire, TYPE n_i

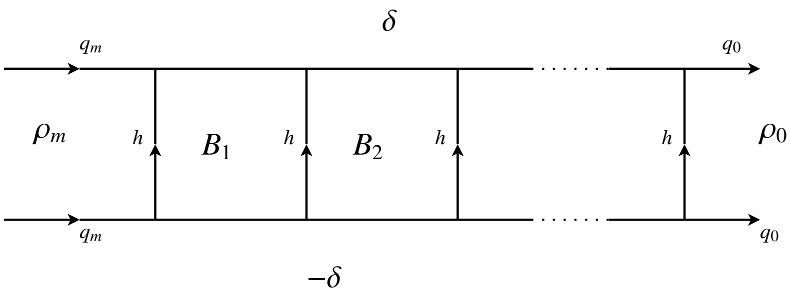


Figure 4: Description de B_j pour les Types n_1, n_2

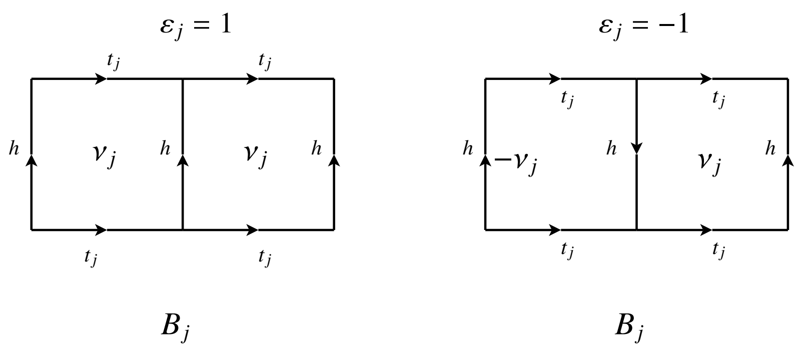


Figure 5: Décomposition simpliciale de ρ_k

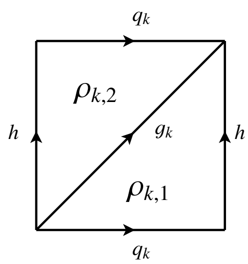


Figure 6: Décomposition simpliciale de ν_1, Type o_1

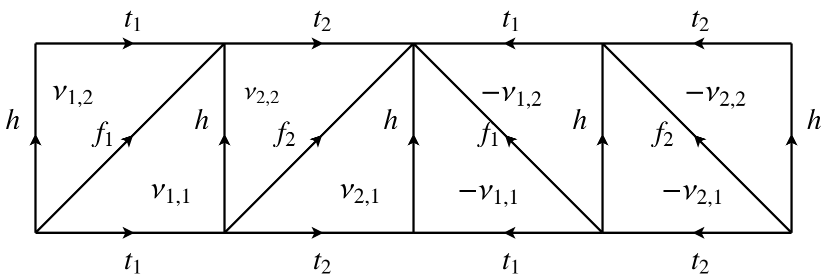


Figure 7: Décomposition simpliciale de $-\nu_1$, Type o_2

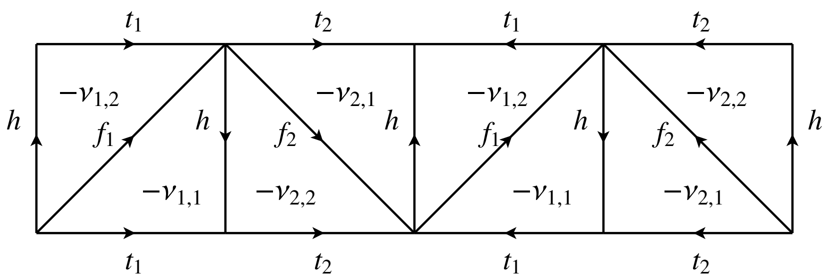


Figure 8: Décomposition simpliciale de $-\nu_j$ quand $\varepsilon_j = 1$ et quand $\varepsilon_j = -1$

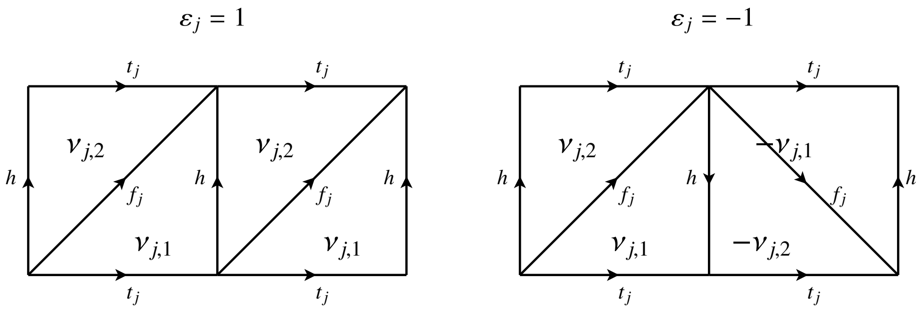


Figure 9: Décomposition simpliciale de δ, TYPE o_i

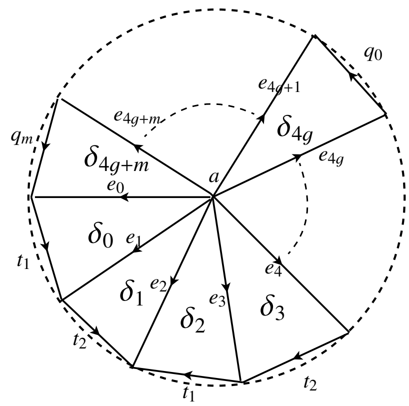


Figure 10: Décomposition simpliciale de δ, TYPE n_i

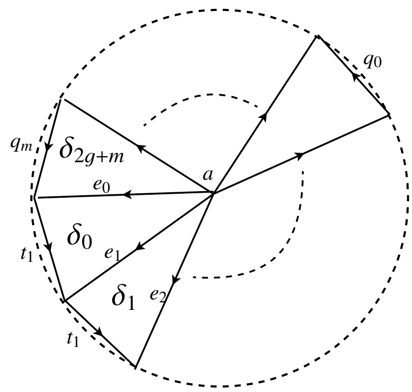


Figure 11: Décomposition simpliciale de μ_k pour $b_k > 0$

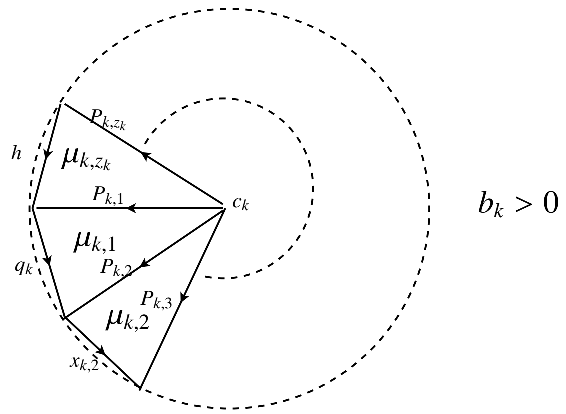


Figure 12: Décomposition simpliciale de μ_k pour $b_k = 0$

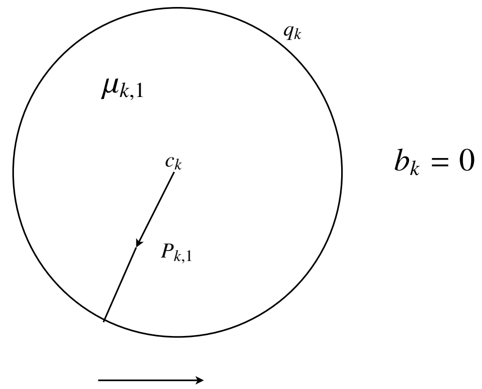


Figure 13: Codage des points carrés sur le 3-simplexe D_0^+

Les figures suivantes sont des projections des décompositions simpliciales de chacun des 3-simplexes. Les sommets sont des points carrés. Ils représentent la projection d'une arête. Ci-dessous, nous donnons en exemple le codage des points carrés sur le 3-simplexe D_0^+.

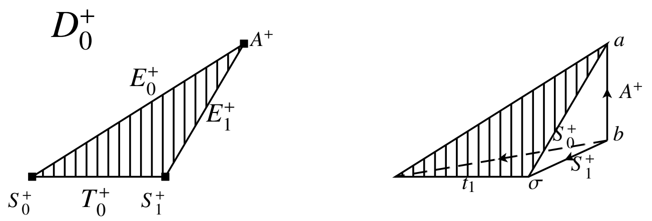
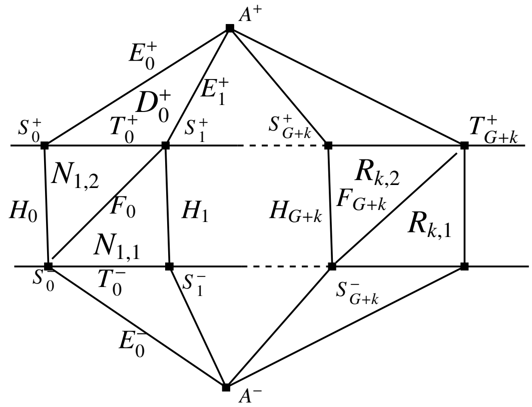


Figure 14: Parties communes des décompositions simpliciales de ϵ pour tous les TYPES



Les quatre figures suivantes sont les détails de la partie centrale de la figure ci-dessus, pour le début de la longue relation.

Figure 15: Partie centrale pour la décomposition simpliciale de ϵ pour le TYPE o_1

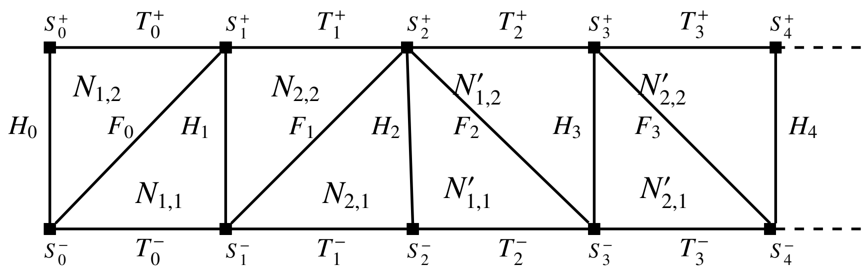


Figure 16: Partie centrale pour la décomposition simpliciale de ϵ pour le TYPE o_2

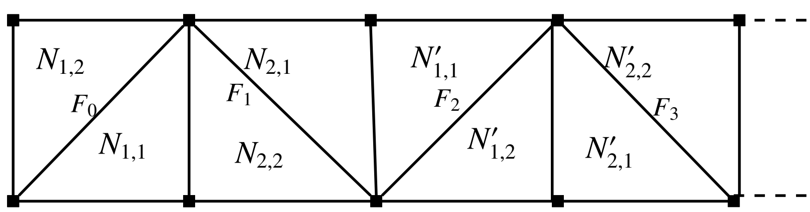


Figure 17: Partie centrale pour la décomposition simpliciale de ϵ pour les Types n_i

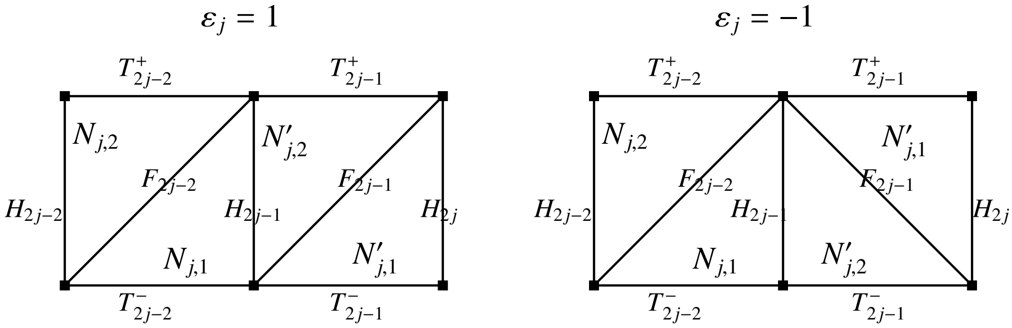


Figure 18: Décomposition simpliciale de ζ_k pour $b_k > 0$ et $a_k = 5, b_k = 2$, $w_{k,2}(q_k, h) = q_k^3 h q_k^2 h = x_{k,1} \cdots x_{k,7}$

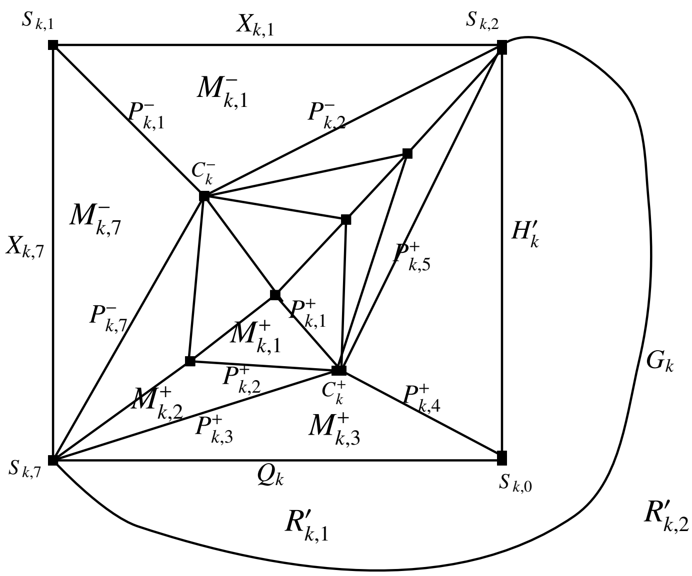


Figure 19: Décomposition simpliciale de ζ_k pour $b_k < 0$

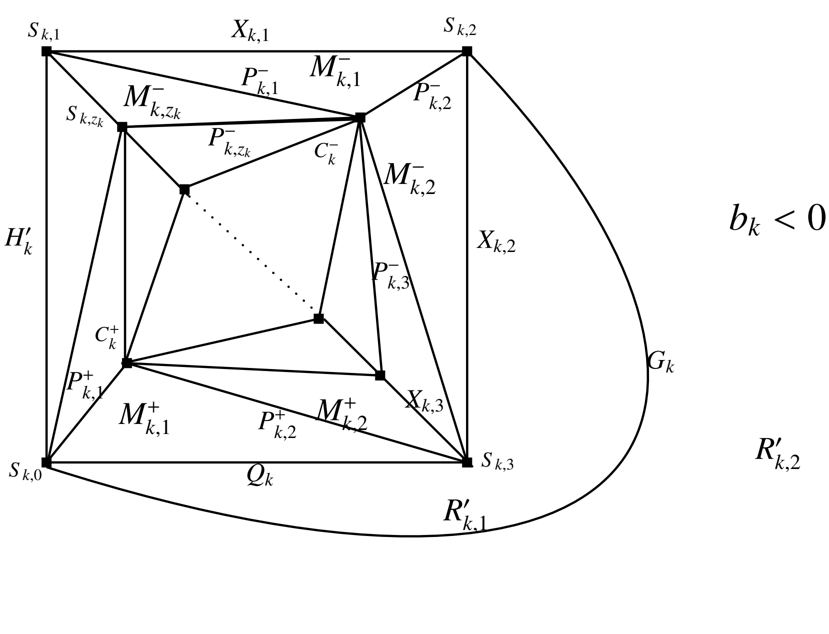
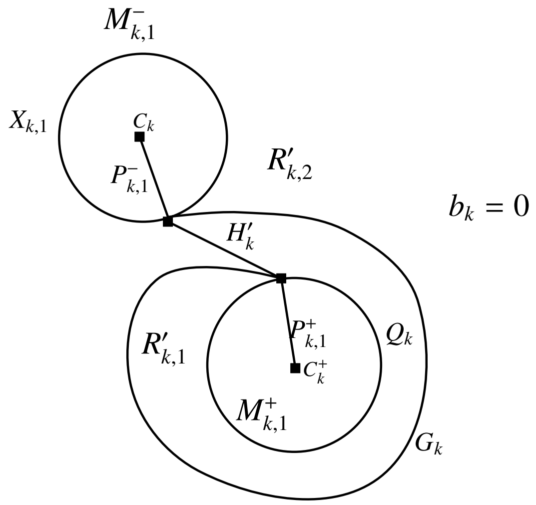


Figure 20: Décomposition simpliciale de ζ_k pour $b_k = 0$



References

[1] K. Aaslepp, M. Drawe, C. Hayat-Legr, C. A. Sczesny and H. Zieschang: *On the cohomology of Seifert and graph manifolds*, Topology and its Applications **127** (2003), 3–32.

[2] A. Bauval and C. Hayat: *L'anneau de cohomologie des variétés de Seifert*, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I **351** (2013), 81–85.

[3] J. Bryden, C. Hayat, H. Zieschang and P. Zvengrowski: *L'anneau de cohomologie d'une variété de Seifert*, C. R. Acad. Sci. Paris, Sér. **1 324** (1997), 323-326.

[4] J. Bryden, C. Hayat, H. Zieschang and P. Zvengrowski: *The cohomology ring of a class of Seifert manifolds*, Topology and its Applications **105** (2000), 123-156.

[5] J. Bryden and P. Zvengrowski: *The cohomology ring of the orientable Seifert manifolds.II*, Topology and its Applications **127** (2003), 123-156.

[6] D.L. Gonçalves, C. Hayat and P. Zvengrowski: *The Borsuk-Ulam theorem for manifolds, with applications to dimensions two and three*, Proceedings of the International Conference Bratislava Topology Symposium (2009) "Group Actions and Homogeneous Spaces" editors J. Korbaš, M. Morimoto, K. Pawałowski.

[7] F. Gonzàlez-Acuña and A. Ramirez: *A composition formula in the rank two free group*, Pro. Amer. Math. **127**, (1999), 2779-2782.

[8] A. Hatcher: Algebraic Topology, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 2002.

[9] C. Hayat, S. Matveev and H. Zieschang: *Primitive elements in the free product of two finite cyclic groups*, Experiment. Math. **10** (2001), 497-508.

[10] M. Lustig, E-M. Thiele and H. Zieschang: *Computer calculation of the degree of maps into Poincaré homology sphere*, Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg **65**, (1995), 277-281.

[11] P. Orlik: Seifert Manifolds, Lecture Notes in Math. **291**, Springer-Verlag, New York, 1972.

[12] R.P. Osborne and H. Zieschang: *Primitives in the freegroup on two generators*, Invent. Math. **63** (1981), 17-24.

[13] H. Seifert: Topologie Dreidimensionaler Gefaserter Räume, (German) Acta Math. **60** (1932), 147-238; english translation appears as "Topology of 3-dimensional fibered spaces" in the book "A textbook of topology" by H. Seifert and W. Threlfall *Academic Press*, 1980.

[14] H. Seifert and W. Threlfall: A textbook of topology, Academic Press, Inc. [Harcourt Brace Jovanovich, Publishers], New York-London, 1980.

[15] S. Tomoda and P. Zvengrowski: *Remarks on the cohomology of finite fundamental groups of 3-manifolds*, The Zieschang Gedenkschrift, 519-556, Geom. Topol. Monogr., 14, Geom. Topol. Publ., Coventry, 2008.

Anne Bauval
Institut de Mathématiques de Toulouse
Equipe Emile Picard, UMR 5580
Université Toulouse III
118 Route de Narbonne, 31400 Toulouse
France
e-mail: bauval@math.univ-toulouse.fr

Claude Hayat
Institut de Mathématiques de Toulouse
Equipe Emile Picard, UMR 5580
Université Toulouse III
118 Route de Narbonne, 31400 Toulouse
France
e-mail: hayat@math.univ-toulouse.fr