SUR LES FONCTIONS ABSOLUMENT MONOTONES.

Par

SERGE BERNSTEIN.

à KHARKOW.

Introduction.

Les fonctions absolument monotones jouent le même rôle fondamental dans la théorie des fonctions analytiques d'une variable réelle que les fonctions (simplement) monotones pour la classe générale des fonctions à variation bornée.[1] Il semble donc qu'une étude systématique des propriétés des fonctions absolument monotones est indispensable pour bien pénétrer la nature des fonctions analytiques réelles. Le présent Mémoire a pour but de contribuer à cette étude.

En établissant des inégalités générales auxquelles satisfont les fonctions absolument monotones sur un segment limité ou infini, j'ai étudié surtout, quel est le segment maximum, où une fonction, prenant avec un nombre fini ou infini de ses dérivées successives des valeurs données en un point, peut rester absolument monotone, et d'autre part, dans quels cas ces données suffisent pour la déterminer complètement.

Cette étude est naturellement liée à la théorie des séries divergentes, et, comme conséquence particulière, nous en déduisons une nouvelle méthode, indépendante des fractions continues, pour résoudre le problème général des moments.[2]

---

[1] S. BERNSTEIN, »*Leçons sur les propriétés extrémales* etc.» (Collection de Monographies publiée sous la direction de M. E. Borel), Première Note (pp. 193—197).

[2] Je rappellerai que la théorie classique des moments de Stieltjes a été complétée recemment par M. H. HAMBURGER, »*Stieltjessches Momentenproblem*», Math. Ann. Bd. 81 (235—315), Bd. 82 (120—164) et M. T. CARLEMAN, »*Sur les équations intégrales singulières à noyaux réel et symétrique;* je signalerai aussi les Mémoires de M. HAUSDORFF »*Summationsmethoden und Momentfolgen*», Math. Zeitschrift Bd. 9 et »*Momentproblem für endliches Intervall*» (dont j'ai pris connaissance pendant la rédaction de ce travail) qui aborde le problème des moments par des méthodes présentant certaines analogies avec les miennes.

1 — 2822. *Acta mathematica.* 52. Imprimé le 27 février 1928.

Table des matières.

PREMIER CHAPITRE.

Détermination des fonctions absolument monotones sur le demiaxe négatif.

§ 1. *Conditions nécessaires pour qu'une fonction soit absolument monotone sur un segment fini.* Si la fonction $f(x)$ est absolument monotone pour $x \geqq 0$, on a

$$f(x) = A_0 + A_1 x + \cdots + A_n x^n + \cdots, \tag{1}$$

tous les coefficients A_n de ce développement étant *non négatifs*. Lorsque x croît, la fonction $f(x)$ ne peut cesser d'être absolument monotone, et le rayon R de convergence de la série limite du coté droit l'intervalle où la fonction $f(x)$ est absolument monotone, à l'extérieur duquel elle devient infinie[1] (il n'est pas exclu que $f(R)$ ou ses dérivées à partir d'un certain ordre soient également infinies). L'extrémité gauche de cet intervalle sera nécessairement 0, si l'un des coefficients est nul; mais la réciproque n'est pas vraie, comme le montre l'exemple de la fonction

$$\varphi(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}(1 + x) = 1 + x + \cdots + \frac{x^{2n}}{2n!} + \frac{x^{2n+1}}{2n!} + \cdots, \tag{2}$$

dont les dérivées d'ordres $2n$ assez élevés deviennent négatives pour des valeurs de $x < 0$ aussi voisines de 0 qu'on veut, puisque

$$\varphi^{(2n)}(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}(1 + x) - n(e^{-x} - e^x).$$

Nous allons rechercher d'abord des conditions *nécessaires* pour que la monotonie absolue de $f(x)$ puisse se prolonger pour $x < 0$ jusqu'à une certaine valeur négative $-c$. Ce problème peut être posé même dans le cas, où le rayon R de convergence de la série (1) est *nul*, auquel cas 0 sera l'extrémité droite de l'intervalle de monotonie.

Avant de formuler les théorèmes, il sera commode, pour abréger l'écriture, d'adopter les notations symboliques

---

[1] Nous nous plaçons ici au point de vue purement reel; peu nous importe par conséquent la ou les valeurs qu'on ferait prendre à la fonction $f(x)$ pour $x > R$, en la prolongeant à travers le plan de la variable complexe. Dans le dernier chapitre seulement nous serons amenés à envisager également nos fonctions pour des valeurs complexes de la variable $z = x + iy$, en supposant toujours cependant la partie réelle de $x \leq R$.

$$(a_p, a_{p+2}, \ldots, a_{p+2h}) = \begin{vmatrix} a_p \; a_{p+1} \cdots a_{p+h} \\ a_{p+1} \cdots\cdots a_{p+h+1} \\ \cdot \;\cdot \;\cdot \;\cdot \;\cdot \;\cdot \\ \cdot \;\cdot \;\cdot \;\cdot \;\cdot \;\cdot \\ a_{p+h} \cdots a_{p+2h} \end{vmatrix} \tag{3}$$

chaque fois qu'on aura des déterminants symmétriques dans lesquels tous les éléments situés sur une même parallèle à la diagonale non principale sont égaux entre eux. D'autre part, nous aurons à considérer les dérivées successives de $f(x)$ par rapport à $\log (x + c)$ et nous écrirons

$$\frac{d f(x)}{d \log (x+c)} = (x + c) f'(x),$$

$$\frac{d^2 f(x)}{d \log (x+c)^2} = (x + c) [(x + c) f'(x)]' = (x + c) f'(x) + (x + c)^2 f''(x) \tag{4}$$

. . . .

$$\frac{d^n f(x)}{d \log (x+c)^n} = (x + c) f'(x) + B_2^n (x + c)^2 f''(x) + \cdots$$
$$+ B_{n-1}^n (x + c)^{n-1} f^{(n-1)}(x) + (x + c)^n f^{(n)}(x),$$

où les constantes positives $B_\varkappa^n$ ont pour valeurs

$$B_\varkappa^n = \frac{1}{(\varkappa - 1)!} [\varkappa^{n-1} - C_{\varkappa-1}^1 (\varkappa - 1)^{n-1} + C_{\varkappa-1}^2 (\varkappa - 2)^{n-1} - \cdots], \tag{5}$$

comme on s'en assure, en remarquant que

$$\frac{d^n x^p}{d \log x^n} = p^n x^p.$$

Ceci posé, nous avons la proposition suivante:

Théorème I. *Si* $f(0), f'(0), \ldots, f^{(n)}(0)$ *sont les dérivées d'une fonction absolument monotone sur le segment* $(-c, 0)$, *on a*

$$\left(f(0), \frac{d^2 f(0)}{d \log c^2}, \ldots, \frac{d^{2h} f(0)}{d \log c^{2h}}\right) \geq 0, \left(\frac{d f(0)}{d \log c}, \ldots, \frac{d^{2h+1} f(0)}{d \log c^{2h+1}}\right) \geq 0 \tag{6}$$

quel que soit h.

En effet, par hypothèse, on a un développement à coefficients non négatifs

$$f(x) = a_0 + a_1(x+c) + \cdots + a_\varkappa (x+c)^\varkappa + \cdots \tag{7}$$

qui convergera pour $x = 0$ avec ses dérivées vers $f(0), f'(0), \ldots, f^{(n)}(0)$ respectivement.

Chaque déterminant tel que

$$\left(f(x), \frac{d^2 f(x)}{d \log (x+c)^2}, \ldots, \frac{d^{2h} f(x)}{d \log (x+c)^{2h}}\right) = \sum b_\varkappa (x+c)^\varkappa \tag{8}$$

pourra donc également être développé en série suivant les puissances de $x+c$, absolument convergente pour $-2c < x \leq 0$. Nous allons voir que l'on a de plus $b_\varkappa \geq 0$. A cet effet, remarquons que

$$\frac{d^n f(x)}{d \log (x+c)^n} = a_1(x+c) + \cdots + \varkappa^n a_\varkappa (x+c)^\varkappa + \cdots; \tag{9}$$

donc, $\lambda_0, \lambda_1, \ldots, \lambda_h$ étant des entiers quelconques différents entre eux positifs satisfaisant à l'équation

$$\lambda_0 + \lambda_1 + \cdots + \lambda_h = \varkappa$$

et $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_h$ des entiers positifs quelconques différents entre eux satisfaisant à l'équation

$$\mu_1 + \mu_2 + \cdots + \mu_h = \varkappa,$$

on obtient le terme $b_\varkappa (x+c)^\varkappa$, si dans le déterminant considéré on prend dans chaque colonne les termes à la puissance $\lambda_0, \lambda_1, \ldots \lambda_h$ respectivement, ou bien en prenant le terme libre dans la première colonne et les puissances $\mu_1, \mu_2, \ldots \mu_h$ aux autres colonnes. Par conséquent, $b_\varkappa$ se compose de termes de la forme

$$a_{\lambda_0} a_{\lambda_1} \ldots a_{\lambda_h} \begin{vmatrix} 1 + 1 + \cdots + 1 & \lambda_0 + \lambda_1 + \cdots + \lambda_h & \ldots & \lambda_0^h + \cdots + \lambda_h^h \\ \lambda_0 + \lambda_1 + \cdots + \lambda_h & \ldots & \ldots & \ldots \\ \lambda_0^2 + \cdots + \lambda_h^2 & \ldots & \ldots & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \lambda_0^h + \cdots + \lambda_h^h & \ldots & \ldots & \lambda_0^{2h} + \cdots + \lambda_h^{2h} \end{vmatrix} = \tag{10}$$

$$= a_{\lambda_0} \ldots a_{\lambda_h} \prod_{i,j} (\lambda_i - \lambda_j)^2 \geq 0$$

et de la forme

$$a_0\, a_{\mu_1} \cdots a_{\mu_h} \prod_{i,j} (\mu_i - \mu_j)^2 \geq 0. \tag{10bis}$$

De là résulte d'abord le théorème énoncé, car le même raisonnement s'applique aussi à $f'(x)$.

De plus les déterminants tels que (8) étant absolument monotones sur $(-c, 0)$, si l'un d'eux s'annule pour une valeur $x > -c$, il est nul identiquement. On a ainsi le

Théorème II. *Si pour une fonction absolument monotone sur* $(-c, 0)$ *on a*

$$\left(\frac{d^p f(0)}{d \log c^p}, \ldots, \frac{d^{p+2h} f(0)}{d \log c^{p+2h}}\right) = 0, \tag{11}$$

on a identiquement

$$\left(\frac{d^p f(x)}{d \log (x+c)^p}, \ldots, \frac{d^{p+2h} f(x)}{d \log (x+c)^{p+2h}}\right) = 0. \tag{12}$$

D'ailleurs de (10) et (10^{bis}) nous concluons que le déterminant (8) sera nul dans le cas et dans le cas seulement, où la fonction supposée absolument monotone $f(x)$ se réduit à un polynôme contenant moins que $(h+1)$ termes. Nous pouvons donc énoncer le

Théorème III. *Si pour une fonction absolument montone on a*

$$\left(f(0), \ldots, \frac{d^{2h} f(0)}{d \log c^{2h}}\right) = 0,$$

on a également, quels que soient $\varkappa \geq h$ *et* $q > 0$,

$$\left(\frac{d^q f(0)}{d \log c^q}, \ldots, \frac{d^{q+2\varkappa} f(0)}{d \log c^{q+2\varkappa}}\right) = 0;$$

de même, si l'on a

$$\left(\frac{d^p f(0)}{d \log c^p}, \ldots, \frac{d^{p+2h} f(0)}{d \log c^{p+2h}}\right) = 0,$$

on a aussi, quels que soient $\varkappa \geq h$ *et* $q > 0$,

$$\left(\frac{d^q f(0)}{d \log c^q}, \ldots, \frac{d^{q+2\varkappa} f(0)}{d \log c^{q+2\varkappa}}\right) = 0$$

et de plus

$$\left(f(0), \ldots, \frac{d^{2\varkappa+2} f(0)}{d \log c^{2\varkappa+2}}\right) = 0.$$

§ 2. *Conditions nécessaires pour qu'une fonction soit absolument monotone jusqu'à* $-\infty$. Supposons à présent que c croît indéfiniment. Alors il résulte de (4) que, x et n étant fixes,

$$\lim_{c=\infty} \frac{1}{c^n} \frac{d^n f(x)}{d \log (x+c)^n} = f^{(n)}(x). \tag{13}$$

Donc par un passage immédiat à la limite le théorème I conduit au

Théorème I^bis^. *Si une fonction est absolument monotone sur le demiaxe négatif, on a*

$$(f(0), \ldots, f^{(2h)}(0)) \geq 0, \ (f^{(p)}(0), \ldots, f^{(p+2h)}(0)) \geq 0 \tag{14}$$

quels que soient p et h.

Pour obtenir une proposition analogue au théorème II, il faut remarquer que, n étant un nombre fixe ainsi que x et h, on a

$$\lim_{c=\infty} \frac{d^n}{d x^n} \left(f(x), \frac{d^2 f(x)}{c^2 d \log (x+c)^2}, \ldots, \frac{d^{2h} f(x)}{c^{2h} d \log (x+c)^{2h}}\right) = \frac{d^n}{d x^n} (f(x), \ldots, f^{(2h)}(x)),$$

d'où il résulte que les déterminants

$$(f(x), \ldots, f^{(2h)}(x)),$$

sont absolument monotones sur le demiaxe négatif, et on a

Théorème II^bis^. *Si*

$$(f^{(p)}(0), \ldots, f^{(p+2h)}(0)) = 0, \tag{15}$$

on a identiquement

$$(f^{(p)}(x), \ldots, f^{(p+2h)}(x)) = 0, \tag{16$^{\text{bis}}$}$$

pourvu que la fonction $f(x)$ *soit absolument monotone sur le demiaxe négatif.*

Or, l'intégrale générale de l'équation différentielle

$$(f(x), \ldots, f^{(2h)}(x)) = 0 \tag{16}$$

est égale à

$$f(x) = A_1 e^{\alpha_1 x} + \cdots + A_h e^{\alpha_h x} \tag{17}$$

qui contient les $2h$ constantes arbitraires: A_i et α_i. Il est évident que cette fonction sera absolument monotone, si tous les paramètres sont réels et non négatifs. Réciproquement, *pour que $f(x)$ soit absolument monotone il est nécessaire que tous les paramètres A_i et α_i soient réels et non négatifs.*

En effet, admettons comme nous en avons le droit, que $f(x)$ ne satisfait pas à une équation différentielle du même type d'ordre inférieur; cela signifie d'une part, qu'aucun des coefficients A_i n'est nul, et d'autre part, que tous les déterminants

$$(f(0), \ldots f^{(2\varkappa)}(0)) > 0, \quad (f^{(p)}(0), \ldots f^{(p+2l)}(0)) > 0,$$

quels que soient $\varkappa, p, l$, pourvu que $\varkappa < h$, $p + 2l < 2h$. Donc la forme quadratique

$$\sum f^{(l+m)}(0)\, Y_l\, Y_m = \sum \sum A_i\, \alpha_i^{l+m}\, Y_l\, Y_m = \sum A_i\, Z_i^2$$

de h variables réelles $Y_0, \ldots, Y_{h-1}$ ou bien de h variables $Z_i = \sum_{l=0}^{h-1} \alpha_i^l\, Y_l$ doit être définie. Il n'est donc pas possible que certains des exposants α_i soient complexes, car alors, tous les Y_i étant réels, deux des formes linéaires Z_i seraient conjuguées $x \pm iy$ ainsi que les coefficients correspondants $A_i = a \pm ib$, de sorte que, en introduisant les deux formes linéaires réelles x et y au lieu de Z_i et de sa con juguée, on aurait les deux termes

$$a(x^2 - y^2) + 2bxy$$

qui ne peuvent appartenir à une forme quadratique définie. Par conséquent, tous les α_i sont réels et tous les $A_i > 0$. Mais, puisque le même raisonnement est applicable à

$$f'(x) = A_1 \alpha_1 e^{\alpha_1 x} + \cdots + A_h \alpha_h e^{\alpha_h x}$$

nous devons en conclure que tous les $\alpha_i > 0$.

Dans le cas, où $f(x)$ satisfait à l'équation (16^{bis}) au lieu de (16), on a

$$f(x) = A_0 + \sum^{h} A_i e^{\alpha_i x} \tag{17^{bis}}$$

car les puissances de x qui pourraient provenir de l'intégration de (17), doivent disparaître, quand la fonction est absolument monotone jusqu'à $-\infty$. Nous pouvons ainsi formuler le

Théorème III$^{\text{bis}}$. *Si, $f(x)$ étant absolument monotone sur le demiaxe négatif, on a*

$$(f(0), \ldots, f^{(2h)}(0)) = 0,$$

on a aussi, quels que soient $\varkappa \geq h$ et q,

$$(f^{(q)}(0), \ldots, f^{(q+2\varkappa)}(0)) = 0;$$

de même, si l'on a

$$(f^{(p)}(0), \ldots, f^{(p+2h)}(0)) = 0,$$

on a également, pour $\varkappa \geq h$ et $q > 0$ quelconques,

$$(f^{(q)}(0), \ldots, f^{(q+2\varkappa)}(0) = 0, \qquad (f(0), \ldots, f^{(2\varkappa+2)}(0)) = 0.$$

Il est clair que, si par un procédé quelconque on démontrait directement les théorèmes I$^{\text{bis}}$, II$^{\text{bis}}$, III$^{\text{bis}}$, on en tirerait immédiatement les théorèmes I, II et III par le simple changement de variables $x = \log(y+c)$. Mais on remarque alors que, tandis qu'une fonction absolument monotone de y pour $y \geq -c$ se réduit par ce changement à une fonction de x absolument monotone pour $x > -\infty$, la réciproque *n'est pas vraie.* En particulier, nous pouvons d'après ce qui précède formuler le

Théorème A. *Quelles que soient les valeurs $f(0), f'(0), \ldots, f^{(n)}(0)$ satisfaisant aux $(n+1)$ inégalités*

$$(f(0), \ldots f^{(2k)}(0)) > 0, \ (f'(0), \ldots, f^{(2k'+1)}(0)) > 0, \tag{18}$$

où $2k \leq n$, $2k'+1 \leq n$, il existe des fonctions absolument monotones jusqu'à $-\infty$ qui pour $x=0$ prennent avec leurs dérivées des n premiers ordres les valeurs respectives $f(0), \ldots, f^{(n)}(0)$.

Une telle fonction $f(x)$ sera donnée, par exemple, en supposant n impair, pour fixer les idées, par la solution correspondante de l'équation différentielle

$$(f(x), \ldots, f^{(n+1)}(x)) = 0, \tag{16}$$

ou bien par la solution de l'équation différentielle

$$(f'(x), \ldots, f^{(n+2)}(x)) = 0,$$

où on ajoute une valeur initiale quelconque supplémentaire $f^{(n+1)}(0)$ assujettie à la condition

$$(f(0), \ldots, f^{(n+1)}(0)) > 0.$$

Or, il est évident, au contraire, que les inégalités (6) (le signe d'égalité exclu) ne seraient plus suffisantes, pour affirmer l'existence d'une fonction absolument monotone sur le segment $(-c, 0)$, car la somme finie d'exponentielles qui résout la question dans le cas du demiaxe se transforme actuellement en une somme de puissances *non entières*, en général, qui n'est pas, par conséquent, une fonction absolument monotone. C'est pour cela que le problème de la détermination des fonctions absolument monotones sur un segment fini présente des particularités spéciales *de nature arithmétique*, et il convient d'examiner d'abord celui des fonctions dont la monotonie absolue s'étend jusqu'à $-\infty$.

§ 3. *Conditions nécessaires et suffisantes pour qu'une fonction absolument monotone sur le demiaxe négatif existe et soit complètement déterminée par un nombre fini de valeurs* $f(0), f'(0), \ldots, f^{(n)}(0)$. Des théorèmes $\mathrm{I}^{\mathrm{bis}}$, $\mathrm{II}^{\mathrm{bis}}$, $\mathrm{III}^{\mathrm{bis}}$ et A résulte immédiatement cette conséquence importante:

Théorème B. *Pour qu'il existe une seule fonction $f(x)$ absolument monotone sur le demiaxe négatif prenant avec ses dérivées des n premiers ordres les valeurs $f(0), \ldots, f^{(n)}(0)$ à l'origine, il est nécessaire et suffisant que l'on ait*

$$\begin{gathered}(f(0), \ldots, f^{(2h)}(0)) > 0, \ (f'(0), \ldots, f^{(2h'+1)}(0)) > 0 \qquad (2h < n' \leq n,\ 2h'+1 < n') \\ (f(0), \ldots, f^{(2\varkappa)}(0)) = 0, \ (f'(0), \ldots, f^{(2\varkappa'+1)}(0)) = 0; \quad (n' \leq 2\varkappa \leq n,\ n' \leq 2\varkappa'+1 \leq n)\end{gathered} \tag{19}$$

la fonction $f(x)$ sera alors une somme d'exponentielles

$$f_{n'}(x) = \sum A_i e^{\alpha_i x}$$

dépendant de $n' \leq n$ paramètres.

En effet, en vertu du théorème A, les conditions (19) sont suffisantes pour qu'il existe au moins une fonction $f(x)$ absolument monotone prenant avec ses dérivées des $n'-1$ premiers ordres les valeurs respectives $f(0), f'(0), \ldots, f^{(n'-1)}(0)$ à l'origine; mais, à cause de $\mathrm{II}^{\mathrm{bis}}$ et $\mathrm{III}^{\mathrm{bis}}$, cette fonction est unique, et existe effectivement, si on ajoute les valeurs des dérivées $f^{n'}(0), \ldots, f^{(n)}(0)$ satisfaisant également à (19). Au contraire, si les conditions (19) n'étaient pas remplies, il n'existerait pas de fonction absolument monotone répondant aux conditions initiales données, d'après le théorème $\mathrm{I}^{\mathrm{bis}}$, si l'un au moins des déterminants considérés était négatif; il faudrait donc, en vertu de $\mathrm{III}^{\mathrm{bis}}$, qu'aucun de ces déterminants ne soit nul, mais alors il résulterait du théorème A que la fonction $f(x)$ n'est pas unique.

Ainsi, par exemple, on peut définir *la fonction* e^x *comme la seule fonction absolument monotone sur tout le demiaxe négatif qui prend à l'origine, ainsi que sa dérivée première, la valeur un.*

§ 4. *Conditions suffisantes pour l'existence d'une fonction $f(x)$ absolument monotone sur le demiaxe négatif et prenant à l'origine avec ses dérivées de tous les ordres les valeurs données* $f(0), f'(0), \ldots, f^{(n)}(0), \ldots$. Il n'y a pas de difficultés de reconnaître à présent que la réciproque du théorème $\mathrm{I}^{\mathrm{bis}}$ est éxacte; d'une façon plus précise, le théorème B se trouve complété par le

Théorème C. *Il existe toujours au moins une fonction $f(x)$ absolument monotone sur le demiaxe négatif qui prend à l'origine avec ses dérivées de tous les ordres les valeurs respectives* $f(0),\ f'(0), \ldots, f^{(n)}(0), \ldots,$ *pourvu que celles-ci vérifient l'infinité d'inégalités*

$$(f(0), \ldots, f^{(2h)}(0)) > 0, \ (f'(0), \ldots, f^{(2h+1)}(0)) > 0 \tag{18}$$

pour toutes les valeurs entières de h.

L'existence se démontre par la construction effective de la fonction en question que l'on obtient de la façon suivante. Soient

$$f_2(x) = A_1'\, e^{\alpha_1' x}, \ldots, f_{2h}(x) = A_1^{(h)}\, e^{\alpha_1^{(h)} x} + \cdots + A_h^{(h)}\, e^{\alpha_h^{(h)} x}, \tag{20}$$

les sommes exponentielles successives déterminées par les valeurs initiales $f(0), \ldots,$ $f^{(2h-1)}(0)$. Je dis que, h croissant indéfiniment, ces fonctions absolument monotones tendent pour $x \leq 0$ vers une fonction $f(x)$ qui est absolument monotone et satisfait à toutes les conditions initiales exigées.

A cet effet, remarquons *qu'une équation*

$$a_1\, e^{\lambda_1 x} + a_2\, e^{\lambda_2 x} + \cdots + a_n\, e^{\lambda_n x} = 0$$

où $\lambda_1 < \lambda_2 < \cdots < \lambda_n$ *admet au plus autant de racines réelles* (comptées avec leur ordre de multiplicité) *que les coefficients* $a_1, \ldots, a_n$ *présentent de variations de signe.* Nous en concluons que, *si la fonction absolument monotone*

$$S_n(x) = C_1\, e^{\lambda_1 x} + \cdots + C_n\, e^{\lambda_n x} \tag{21}$$

satisfait aux mêmes conditions initiales que $f_{2h}(x)$, on a nécessairement

$$S_n(x) \geq f_{2h}(x), \tag{22}$$

l'égalité pour une valeur de $x \gtrless 0$ entrainant, en outre, l'identité $S_n(x) \equiv f_{2h}(x)$.

En effet, les coefficients de la différence

$$P(x) = S_n(x) - f_{2h}(x)$$

présenteront au plus $2h$ variations de signe, de sorte que, sauf la racine 0 d'ordre $2h$, la fonction $P(x)$ ne peut s'annuler pour aucune autre valeur réelle sans être identiquement nulle. D'ailleurs, pour que les variations de signe des coefficients puissent atteindre $2h$, il est manifestement nécessaire que l'exposant maximum dans $P(x)$ soit celui de $S_n(x)$, ce qui entraine que $P(x) > 0$ pour x positif et très grand; donc on a bien (22) pour toute valeur de $x \gtrless 0$, car $P(x)$ ne change pas de signe même au passage à l'origine.

Par conséquent, on a pour toute valeur $x \gtrless 0$

$$f_2(x) < f_4(x) < \cdots < f_{2h}(x) \cdots,$$

et pour $x < 0$, on peut ajouter encore que $f_{2h}(x) < f(0)$.

Donc pour chaque valeur de $x < 0$, $f_{2h}(x)$ tend vers une limite déterminée $f(x)$. D'ailleurs toutes les différences finies étant non négatives

$$f(x+\delta) - f(x) \geq 0, \quad f(x+2\delta) - 2f(x+\delta) + f(x) \geq 0, \ldots,$$

la fonction $f(x)$ est *absolument monotone*; et puisque, δ étant fixe,

$$f'(x) < \frac{f(x+\delta) - f(x)}{\delta} < \frac{f_{2h}(x+\delta) - f_{2h}(x)}{\delta} + \frac{\varepsilon_{2h}}{\delta} < f'(0) + \frac{\varepsilon_{2h}}{\delta},$$

nous en concluons que $f'(x) \leq f'(0)$, car h croissant indéfiniment $\lim \frac{\varepsilon_{2h}}{\delta} = 0$. On vérifie de même que $f^{(n)}(x) \leq f^{(n)}(0)$. Il en résulte que $\lim f_{2h}^{(n)}(x) = f^{(n)}(x)$. Il suffira de supposer $n = 1$, car le raisonnement se répétera de proche en proche. A cet effet, remarquons que, indépendamment de h, on peut fixer un nombre δ assez petit pour que

$$\left| \frac{f(x+\delta) - f(x)}{\delta} - f'(x) \right| < \frac{\varepsilon}{3} \text{ et } \left| \frac{f_{2h}(x+\delta) - f_{2h}(x)}{\delta} - f'_{2h}(x) \right| < \frac{\varepsilon}{3};$$

or h étant assez grand, on peut atteindre l'inégalité

$$\left| \frac{f(x+\delta)-f(x)}{\delta} - \frac{f_{2h}(x+\delta)-f_{2h}(x)}{\delta} \right| < \frac{\varepsilon}{3};$$

par conséquent, pour cette valeur de h,

$$|f'(x) - f'_{2h}(x)| < \varepsilon.$$

Donc, en particulier, les dérivées successives de $f(x)$ prendront bien à l'origine les valeurs voulues $f'(0), \ldots, f^{(h)}(0), \ldots$. C. q. f. d.

Remarquons dès à présent qu'une autre fonction $\varphi(x)$ (qui sera peut-être identique à $f(x)$) satisfaisant aux mêmes conditions, pourra être construite en considérant la limite de la suite des fonctions

$$f_1(x)=f(0), f_3(x)=B_0'+B_1' e^{\beta_1' x}, \ldots, f_{2h+1}(x)=B_0^{(h)}+B_1^{(h)} e^{\beta_1^{(h)} x}+\cdots+B_h^{(h)} e^{\beta_h^{(h)} x} \tag{20bis}$$

que l'on obtient, en déterminant $f_{2h+1}(x)$ par l'équation différentielle

$$(f'(x), \ldots, f^{(2h+1)}(x)) = 0$$

et par les conditions initiales $f(0), f'(0), \ldots, f^{(2h)}(0)$.

On vérifie, en effet, par le même raisonnement que pour $x > 0$,

$$S_n(x) \geq f_{2h+1}(x) \tag{23}$$

et pour $x < 0$

$$S_n(x) \leq f_{2h+1}(x), \tag{23bis}$$

(car cette fois la différence $S_n(x) - f_{2h+1}(x)$ change de signe en passant par l'origine), l'égalité en un point $x \gtrless 0$ entrainant toujours l'identité. Donc, pour $x > 0$, les fonctions $f_{2h+1}(x)$ viennent s'intercaler entre les fonctions d'ordre pair

$$f_1(x) < f_2(x) < \cdots < f_{2h}(x) < f_{2h+1}(x) < f_{2h+2}(x) < \cdots; \tag{24}$$

au contraire pour $x < 0$, on a les inégalités

$$f_1(x) > f_3(x) > \cdots > f_{2h+1}(x) > \cdots > f_{2h}(x) > \cdots > f_2(x). \tag{25}$$

Par conséquent, les fonctions d'indice impair tendent, en diminuant, vers une fonction absolument monotone $\varphi(x)$ pour $x < 0$ qui satisfait aux mêmes conditions initiales que la fonction $f(x)$ trouvée précédemment. De plus sur tout le demiaxe *négatif* on a

$$f(x) \leq \varphi(x). \tag{26}$$

Pour $x > 0$, on a nécessairement, à cause de (25), $f(x) = \varphi(x)$, à moins que les deux fonctions ne croissent indéfiniment, c'est-à-dire ne cessent d'exister. D'ailleurs, il était à prévoir que, si la fonction absolument monotone $f(x)$ existe pour $x > 0$, ce qui aura lieu dans le cas et dans ce cas seulement, où le rayon R de convergence de la série

$$f(0) + xf'(0) + \cdots + \frac{x^n f^{(n)}(0)}{n!} + \cdots$$

est différent de 0, c'est-à-dire, lorsque $\lim \frac{1}{n} \sqrt[n]{f^{(n)}(0)} = \frac{1}{eR}$ n'est pas infinie, la fonction absolument monotone est entièrement déterminée par l'ensemble de valeurs qu'elle prend à l'origine avec toutes ses dérivées.

Donc *dans le cas, où* $\overline{\lim}\, \frac{1}{n} \sqrt[n]{f^{(n)}(0)}$ *est finie, on a évidemment*

$$f(x) = \varphi(x) \tag{27}$$

pour $x < 0$ *également, et c'est la seule fonction absolument monotone prenant avec ses dérivées successives les valeurs initiales indiquées.*

§ 5. *Propriétés extrémales des polynômes exponentiels.* Nous venons de faire usage d'inégalités telles que (22), (23), (23^{bis}) qui caractérisent les polynômes exponentiels d'ordre minimum entre tous ceux qui satifont aux mêmes conditions initiales. Nous allons montrer plus loins que ces propriétés extrémales des polynômes exponentiels se conservent, si on les compare avec toutes les fonctions absolument monotones. Il serait intéressant d'y parvenir par une comparaison directe des équations différentielles (16) et (16^{bis}), auxquelles satisfont les polynômes exponentiels, avec les inégalités correspondantes. Voici, en effet, le raisonnement simple par lequel on peut établir que l'on a

$$\varphi(x) > e^x, \quad (x \gtrless 0)$$

si $\varphi(x)$ *est une fonction quelconque absolument monotone jusqu'à* $-\infty$, *telle que* $\varphi(0) = \varphi'(0) = 1$, en partant de l'inégalité $\varphi''\varphi - \varphi'^2 > 0$. Car cette dernière inégalité signifie que la courbe $y = \log \varphi(x)$ est *convexe*; donc, puisqu'on a $y = 0, y' = 1$, pour $x = 0$, cette courbe est située au-dessus de la droite $y = x$, d'où $\varphi(x) > e^x$. Pour la même raison, si on avait $\varphi(0) = 1$, $\varphi(1) = C$, on aurait manifestement $\varphi(x) < C^x$ dans l'intervalle $(0, 1)$, et $\varphi(x) > C^x$ à l'extérieur de cet intervalle.

Corollaire. *Une fonction absolument monotone sur tout l'axe réel ne peut être de degré zéro (et a fortiori de genre zéro).*

En effet, α étant un nombre positif arbitrairement petit, une fonction $\varphi(z)$ de degré 0 est définie par la propriété que

$$|\varphi(z)| < e^{\alpha |z|},$$

lorsque $|z|$ est assez grand.

Nous pourrons étendre les inégalités (22) et (23) par un raisonnement de la même nature, mais l'extension de (23^{bis}) exigera quelques développements analytiques qui seront exposés dans le § suivant. Pour le moment nous démontrerons le

Théorème D. *Soient*

$$f(x) = A_1 e^{\alpha_1 x} + \cdots + A_h e^{\alpha_h x} \text{ et } \varphi(x)$$

deux fonctions distinctes absolument monotones jusqu'à $-\infty$, *telles que*

$$f(0) = \varphi(0), \ldots, f^{(2h-1)}(0) = \varphi^{(2h-1)}(0);$$

on a alors

$$f^{(2h+n)}(0) < \varphi^{(2h+n)}(0),$$

quel que soit $n \geq 0$.

Pour $n = 0$, ceci est évident, car $\varphi^{(2h)}(0)$ et $f^{(2h)}(0)$ satisfont respectivement à l'inégalité

$$\varphi^{(2h)}(0) \cdot (f(0), f''(0), \ldots, f^{(2h-2)}(0)) + (f(0), f''(0), \ldots, f^{(2h-2)}(0), 0) > 0$$

et à l'égalité

$$f^{(2h)}(0) \cdot (f(0), f''(0), \ldots, f^{(2h-2)}(0)) + (f(0), f''(0), \ldots, f^{(2h-2)}(0), 0) = 0.$$

Pour passer à n quelconque, remarquons que si, toutes les autres données restant invariables, $f^{(2h-1)}(0)$ croît, alors $f^{(2h+n)}(0)$ croît aussi, quel que soit $n \geq 0$. En effet, on a le système d'équations de la forme

$$\begin{aligned}
f(0) &= A_1 + A_2 + \cdots + A_h = M_0 \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
f^{(2h-1)}(0) &= \alpha_1^{2h-1} A_1 + \cdots + \alpha_h^{2h-1} A_h = M_{2h-1} \\
f^{(2h+n)}(0) &= \alpha_1^{2h+n} A_1 + \cdots + \alpha_h^{2h+n} A_h = M_{2h+n},
\end{aligned} \tag{28}$$

dont les $2h$ premières servent à déterminer les paramètres α_i et A_i qui déterminent ensuite $f^{(2h+n)}(0)$ au moyen de la dernière équation. Donc, pour calculer la dérivée $\frac{dM_{2h+n}}{dM_{2h-1}}$, on a le système différentiel

$$\begin{aligned}
dA_1 + dA_2 + \cdots dA_h &= 0 \\
\alpha_1 dA_1 + A_1 d\alpha_1 + \cdots &= 0 \\
&\cdots\cdots\cdots \\
\alpha_1^{2h-1} dA_1 + (2h-1)\alpha_1^{2h-2} A_1 d\alpha_1 + \cdots &= dM_{2h-1} \\
\alpha_1^{2h+n} dA_1 + (2h+n)\alpha_1^{2h+n-1} A_1 d\alpha_1 + \cdots &= dM_{2h+n},
\end{aligned}$$

duquel on tire

$$\frac{dM_{2h+n}}{dM_{2h-1}} = \frac{D_n}{D_{-1}},$$

où

$$D_\varkappa = \begin{vmatrix}
1 & 0 & 1 \;\ldots\ldots & 0 \\
\alpha_1 & 1 & \alpha_2 \;\ldots\ldots & . \\
\alpha_1^2 & 2\alpha_1 & \ldots\ldots & . \\
. & . & \ldots\ldots & . \\
. & . & \ldots\ldots & . \\
. & . & \ldots\ldots & . \\
\alpha_1^{2h+\varkappa} & (2h+\varkappa)\alpha_1^{2h+\varkappa-1} & \ldots\ldots & (2h+\varkappa)\alpha_h^{2h+\varkappa-1}
\end{vmatrix}, \tag{29}$$

quel que soit $\varkappa \geq -1$.

Il est clair que $D_\varkappa$ ne peut pas s'annuler, car cela entrainerait la possibilité de former une équation

$$B_0 + B_1 z + \cdots + B_{2h-2} z^{2h-2} + B_{2h+\varkappa} z^{2h+\varkappa} = 0$$

(contenant $2h$ termes) qui posséderait h racines *doubles* $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_h$, par conséquent, $\frac{dM_{2h+n}}{dM_{2h-1}} > 0$ (puisque $M_{2h+n} \to \infty$, lorsque $M_{2h-1} \to \infty$).

Cela étant, formons successivement les polynômes exponentiels contenant h termes $f_l(x)$, déterminés par les $2h$ conditions

$$f_l^{(l)}(0) = \varphi^{(l)}(0),\ f_l^{(l+1)}(0) = \varphi^{(l+1)}(0), \ldots,\ f_l^{(l+2h-1)}(0) = \varphi^{(l+2h-1)}(0),$$

de sorte que $f_0(x) = f(x)$, et d'autre part, la fonction $f_{n+1}(x)$ qui aura $f_{n+1}^{(n+2h)}(0) = \varphi^{(n+2h)}(0)$ sera la dernière somme exponentielle que nous envisagerons.

Alors, en vertu de la remarque faite au debut de la démonstration, on a

$$f_l^{(l+1)}(0) = f_{l+1}^{(l+1)}(0),\ f_l^{(l+2)}(0) = f_{l+1}^{(l+2)}(0), \ldots,\ f_l^{(l+2h-1)}(0) = f_{l+1}^{(l+2h-1)}(0),$$

$$f_l^{(l+2h)}(0) < f_{l+1}^{(l+2h)}(0);$$

donc, d'après ce qui précède, on a nécessairement pour toute valeur de $n \geq l$,

$$f_l^{(n+2h)}(0) < f_{l+1}^{(n+2h)}(0).$$

Par conséquent, $f_0^{(n+2h)}(0) < f_{n+1}^{(n+2h)}(0)$, c'est-à-dire

$$f^{(n+2h)}(0) < \varphi^{(n+2h)}(0). \tag{30}$$

Le théorème démontré *s'étend* évidemment *par intégration au cas, où le polynôme exponentiel contiendrait un terme libre, le nombre de dérivées données à l'origine étant alors pair.*

Corollaire 1. *Si $f(x)$ est un polynôme exponentiel contenant $n+1$ paramètres non nuls et $\varphi(x)$ une fonction différente quelconque absolument monotone jusqu'à $-\infty$, telle que $f(0) = \varphi(0), \ldots, f^{(n)}(0) = \varphi^{(n)}(0)$, on a alors, pour $x > 0$,*

$$\varphi(a) > f(x). \tag{31}$$

Car toutes les dérivées d'ordre supérieur à n de $f(x)$ sont inférieures à celles de $\varphi(x)$ pour $x = 0$.

L'inégalité (31) comprend comme cas particuliers les inégalités (22) et (23).

Corollaire 2. *Dans les mêmes conditions tous les exposants α_i satisfont à l'inégalité*

$$\alpha_i < \overline{\lim} \sqrt[p]{\varphi^{(p)}(0)}. \tag{32}$$

En effet, d'après le théorème D, on a, quel que soit $p > n$,

$$A_i \alpha_i^p < \varphi^{(p)}(o);$$

d'où il suit que

$$\alpha_i \leq \overline{\lim} \sqrt[p]{\varphi^{(p)}(o)},$$

mais le signe d'égalité doit être rejeté, car n augmentant, l'exposant supérieur α_h du polynôme exponentiel doit augmenter.

D'ailleurs, en remarquant que pour un polynôme exponentiel d'ordre assez élevé on a

$$(A_1 + A_2 + \cdots + A_h)\,\alpha_h^p = \varphi(0)\,\alpha_h^p > \varphi^{(p)}(0),$$

on en conclut[1] que

$$\lim_{h=\infty} \alpha_h = \overline{\lim} \sqrt[p]{\varphi^{(p)}(0)}. \tag{32^{\text{bis}}}$$

§ 6. *Interpolation et extrapolation des fonctions absolument monotones.* Soit $F(x)$ une fonction absolument monotone pour toutes les valeurs de $x \leq 0$. (Les conclusions qui suivent subsistent également avec des modifications évidentes, lorsque $F(0) = \infty$, mais pour fixer les idées nous supposerons $F(0)$ fini.) Proposons nous de construire un polynôme exponentiel $f_{2h}(x) = \sum_1^h A_i e^{\alpha_i x}$ ou $f_{2h+1}(x) = = A_0 + \sum_1^h A_i e^{\alpha_i x}$ qui se confond avec $F(x)$ aux points: $0, -\delta, \ldots, -n\delta$, la première forme correspondant au cas, où $n = 2h - 1$ est impair, la seconde au cas de $n = 2h$ pair, δ étant une grandeur positive quelconque. Remarquons d'abord que l'on a nécessairement

$$(F(0), F(-2\delta), \ldots, F(-2\varkappa\delta)) \geq 0, (F(-\delta), \ldots F(-(2\varkappa+1)\delta)) \geq 0 \tag{33}$$

quel que soit $\varkappa$.

Ces inégalités s'établissent, comme (14), par un passage à la limite des in-

---

[1] Le plus petit exposant α_1 qui va en diminuant, lorsque l'ordre $2h$ du polynôme croît, tend vers une limite $a \geq 0$, telle que $\lim\limits_{x=-\infty} f(x)\, e^{-(a-\varepsilon)x} = 0$ et $\lim\limits_{x=-\infty} f(x)\, e^{-(a+\varepsilon)x} = \infty$, quel que soit $\varepsilon > 0$.

égalités correspondantes à une fonction absolument monotone sur le segment fini $(-c, 0)$. En effet, soit

$$F(x) = a_0 + a_1(x+c) + \cdots + a_n(x+c)^n + \cdots;$$

remplaçons successivement $x+c$ par c, $c\left(1-\frac{\delta}{c}\right)$, $c\left(1-\frac{\delta}{c}\right)^2, \ldots, c\left(1-\frac{\delta}{c}\right)^i, \ldots$; il est aisé alors, en posant, pour abréger, $1-\frac{\delta}{c} = \varrho < 1$, de vérifier par un calcul analogue à celui du § 1 que l'on a

$$(F(0), F(c\varrho^2 - c), \ldots, F(c\varrho^{2\varkappa} - c)) \geq 0, (F(c\varrho - c), \ldots, F(c\varrho^{2\varkappa+1} - c)) \geq 0. \quad (33^{\text{bis}})$$

Or, si δ et $\varkappa$ étant fixes, on fait croître c, on a pour $i \leq 2\varkappa$,

$$\lim_{c=\infty} (c\varrho^i - c) = -i\delta,$$

et les inégalités (33^{bis}) ont ainsi pour limites les inégalités (33). Cela étant, en supposant, par exemple, $n = 2h-1$ impair, on a pour déterminer la somme exponentielle $f_{2h}(x)$, le système de $2h$ équations

$$\left.\begin{aligned} A_1 + A_2 + \cdots + A_h &= F(0) \\ A_1\lambda_1 + \cdots + A_h\lambda_h &= F(-\delta) \\ \cdots\cdots&\cdots\cdots \\ A_1\lambda_1^{2h-1} + \cdots + A_h\lambda_h^{2h-1} &= F(-(2h-1)\delta), \end{aligned}\right\} \quad (34)$$

où nous avons posé $e^{-\alpha_1\delta} = \lambda_1, \ldots, e^{-\alpha_h\delta} = \lambda_h$.

On s'aperçoit alors que le système (34) est le même que celui que nous avons résolu plus haut (mécaniquement, pour ainsi dire), quand nous avons remarqué que l'intégrale générale de l'équation différentielle (16) est un polynôme exponentiel (§ 2), à cela près, que l'on a aux seconds membres $F(-\varkappa\delta)$ au lieu de $F^{(\varkappa)}(0)$ qui satisfont cependant aux mêmes inégalités.

Par conséquent, puisque les seconds membres des équations (34) vérifient les inégalités (33), nous savons que les paramètres A_i et λ_i du polynôme exponentiel

$$S_{2h}(x) = \Sigma A_i e^{\lambda_i x}$$

qui avec ses dérivées des $2h-1$ premiers ordres prendrait à l'origine les valeurs

$F(0), F(-\delta), \ldots, F(-(2h-1)\delta)$ respectivement, sont tous positifs.[1] De plus, pour $x < 0$, on a $F(x) < F(0)$, donc, en vertu du corollaire 2 (§ 5), on a $\lambda_i < 1$, et par conséquent $\alpha_i > 0$.

Supposons, en particulier, $\delta = \frac{1}{2h}\cdot$ Alors, à cause de la continuité de $F(x)$ et de la monotonie de $f_{2h}(x)$, le polynôme $f_{2h}(x)$ tendra uniformément vers $F(x)$ pour $0 \leq x \leq -1$, lorsque h croîtra indéfiniment. Pour la même raison le polynôme exponentiel $f_{2h-1}(x)$ qui aura en commun avec $F(x)$ les mêmes points excepté $\frac{1-h}{h}$, tendra également vers $F(x)$ sur le segment $(-1, 0)$. D'autre part, en vertu d'une propriété fondamentale des polynômes exponentiels qu'on a déjà eu l'occasion d'utiliser (§ 3), on aura $f_{2h}(x) > f_{2h-1}(x)$ pour $x > 0$ et $f_{2h}(x) < f_{2h-1}(x)$ pour $x < -1$. Par conséquent, en prenant une succession convenable des entiers $h_1, h_2, \ldots, h_n$ (on pourra, par exemple, poser $h_{n+1} = 2h_n$, pour être certain que $f_{2h_n}(x) < f_{2h_{n+1}}(x)$ à l'extérieur du segment $(0, -1)$) on voit que $f_{2h_n}(x)$ tend pour toute valeur $x < -1$ vers une fonction limite $F_0(x)$ qui est absolument monotone jusqu' à $-\infty$ (§ 3). En même temps (pour $h_{n+1} = 2h_n$) les polynômes d'indice impair iront en décroissant (pour $x < -1$) et tendront vers une certaine fonction absolument monotone $F_1(x)$. Or, ces deux fonctions ne peuvent évidemment être distinctes de $F(x)$ avec laquelle elles se confondent sur $(-1, 0)$, car deux fonctions absolument monotones différentes ne peuvent devenire identiques sur tout un segment fini (puisqu'elles sont analytiques).

Nous pouvons donc formuler la proposition suivante:

Théorème E. *Toute fonction $F(x)$ absolument monotone sur le demiaxe négatif est la limite de polynômes exponentiels qui convergent uniformément vers la fonction considérée pour toutes les valeurs* $x \leq 0$ (un intervalle contenant l'origine devrait être exclu, si $F(0)$ était infini).

Grâce à ce théorème nous sommes en état d'affirmer que *toute propriété extrémale dont jouit un polynôme exponentiel donné parmi tous les polynômes exponentiels* (comme l'inégalité (23^{bis}) par exemple) *se conserve, lorsqu'on considère la classe générale des fonctions absolument monotones jusqu'à* $-\infty$.

En effet, soit $f_m(x)$ un polynome exponentiel à m paramètres positifs qui se confond avec $F(x)$ aux m points: $a_m < a_{m-1} < \cdots < a_1 \leq 0$. Nous pouvons alors,

---

[1] Tous les paramètres seront différents de 0, si on admet, ce que nous pouvons faire, que le signe d'égalité n'apparait pas dans (33), car autrement la fonction $F(x)$ se réduirait elle même à un polynôme exponentiel.

pourvu que les nombres $a_1, \ldots, a_m$ soient *commensurables*, considérer $F(x)$ comme limite de polynômes exponentiels $S_n(x)$ passant tous par ces m points. Dans ces conditions on aura: $S_n(x) > f_m(x)$, pour $x > a_1$; $S_n(x) < f_m(x)$, pour $a_1 > x > a_2$, etc. et enfin, $(-1)^m [S_n(x) - f_m(x)] > 0$, pour $x < a_m$. Donc, en passant à la limite $F(x) = \lim\limits_{n=\infty} S_n(x)$, on a

$$
\begin{aligned}
F(x) - f_m(x) &> 0, \quad \text{pour} \quad x > a_1 \\
(-1)^i [F(x) - f_m(x)] &> 0, \quad \text{pour} \quad a_i > x > a_{i+1} \\
(-1)^m [F(x) - f_m(x)] &> 0, \quad \text{pour} \quad x < a_m,
\end{aligned}
\tag{35}
$$

où la possibilité du signe d'égalité est exclue, car, pour $x > a_1$ on a toujours $F(x) > S_n(x)$, pour $x < a_m$ on a $(-1)^m (F(x) - S_n(x)) > 0$, et pour chaque valeur de x à l'intérieur des intervalles il y a une infinité de $S_n(x)$ qui approche $F(x)$ par excès comme par défaut. Le cas, où les a_i deviendraient incommensurables se traite aussi immédiatement par le passage à la limite; cette fois c'est $\varphi_m(x)$ qui tend vers la limite qui correspond aux valeurs limites a_i, et on est amené à envisager d'abord la possibilité que les inégalités limites de (35) pourraient se réduire pour certaines valeurs ξ à des égalités; mais alors, si on avait l telles valeurs qui seraient des racines d'ordre pair de l'équation $F(x) - \varphi_m(x) = 0$, l'équation $F'(x) - \varphi'_m(x) = 0$ aurait ces valeurs comme racines d'ordre impair et encore au moins $m + l - 1$ racines simples; cette dernière différence aurait donc au moins $m + 2l - 1 \geq m + 1$ variations de signe, ce qui n'est pas possible.

Le cas, où certaines des valeurs a_i viennent à coincider se traite d'une façon semblable. Il nous suffira d'examiner le cas le plus intéressant où *toutes les valeurs a_i tendent vers* 0. Nous pouvons supposer, par exemple, $a_i = -(i-1)\delta$ et faire tendre δ vers 0. D'après ce qui précède, les fonctions $f_m(x)$ existeront pour toute fonction $F(x)$, quel que soit δ. Mais δ tendant vers 0, elles tendront, lorsque $F'(0), F''(0), \ldots, F^{(m-1)}(0)$ sont finies, vers le polynôme exponentiel qui à l'origine se confond avec $F(0)$ et dont les dérivées jusqu'à l'ordre $m-1$ prennent les valeurs $F'(0), \ldots, F^{(m-1)}(0)$, respectivement. Ce passage à la limite fera disparaître les inégalitès (35) correspondant aux points intérieurs; les inégalités extérieures se conserveront, en pouvant toutefois a priori se réduire à des égalités en des points isolés ξ; cependant *cette dernière supposition doit être écartée,* car elle entrainerait que la différence $F'(x) - \varphi'_m(x)$, sauf la racine d'ordre $m-1$ à l'origine et une racine simple inférieure à $|\xi|$, aurait encore au moins une racine d'ordre impaire (où elle changerait de signe encore une fois), ce qui est impossible.

Remarque. En revenant au problème genéral d'interpolation entre ordonnées équidistantes dans le cas, où δ est *fixe* (de sorte que h croissant indéfiniment, les valeurs $(2h-1)\delta$ croissent infiniment) nous voyons que les polynômes exponentiels $f_{2h}(x)$ varient dans un même sens dans chaque intervalle $(-i\delta, -(i-1)\delta)$, lorsque h croît. Donc

$$\lim f_{2h}(x) = f(x), \quad \text{pour} \quad x < 0;$$

seulement la fonction $f(x)$ qui est absolument monotone pourra, en genéral, devenir discontinue à l'origine (car la dérivée de $f_{2h}(x)$ ne peut être a priori limitée supérieurement par $\dfrac{F(0)-F(-\delta)}{\alpha}$ que pour $x < -\alpha < 0$, en supposant $\alpha \leq \delta$). Ainsi, en général, $\lim\limits_{\alpha=0} f(-\alpha) = A < F(0)$, et la fonction absolument monotone $f(x)$ sur tout le demiaxe négatif (zéro compris) qui prendra les valeurs $F(-\delta)$, $F(-2\delta)$ etc. prendra à l'origine la valeur A au lieu de $F(0)$. Ce sera d'ailleurs la seule fonction prenant les valeurs $F(-\delta), F(-2\delta)$ etc.

En effet, les polynômes exponentiels $\varphi_{2h-1}(x)$ définis par les valeurs $F(-\delta), \ldots, F(-(2h-1)\delta)$ dépendant de $(2h-1)$ paramètres positifs varient dans chaque intervalle en sens opposé à celui de $f_{2h}(x)$, lorsque h croît; en particulier, dans l'intervalle $(-\delta, 0)$ la différence

$$P_h(x) = f_{2h}(x) - \varphi_{2h-1}(x) > 0$$

qui décroît avec h est une fonction croissante de x, car $P'_h(x) > 0$ dans cet intervalle, puisque $f'_{2h}(x) - \varphi'_{2h-1}(x)$, dont les coefficients ont au plus $2h-2$ variations de signe, possède une racine dans chaque intervalle $(-\delta, -2\delta)$, $(-2\delta, -3\delta), \ldots, (-(2h-2)\delta, -(2h-1)\delta)$. Donc

$$\lim \varphi_{2h-1}(x) = \varphi(x), \quad \text{pour} \quad x \leq 0,$$

si nous convenons de poser $\varphi(0) = \lim\limits_{x=0} \varphi(x)$, et $\varphi(x)$ sera ainsi une fonction absolument monotone sur tout le demiaxe négatif prenant les valeurs $F(-\delta), F(-2\delta), \ldots$; de plus, toute fonction $\Phi(x)$ qui prendrait les mêmes valeurs doit satisfaire quel que soit h, aux inégalités

$$\varphi_{2h-1}(x) < \Phi(x) < f^*_{2h}(x), \qquad \text{dans l'intervalle } (-\delta, 0)$$

si f^*_{2h} est le polynôme exponentiel déterminé par les valeurs $\varphi(0), F(-\delta), F(-2\delta), \ldots,$

$F(-(2h-1)\delta)$. Or, actuellement $f_{2h}^{*}(x)-\varphi_{2h-1}(x)$ tend vers zéro, lorsque $h\to\infty$ et $x\to 0$; donc sur $(-\delta, 0)$

$$\varphi(x)=\lim_{h=\infty}\varphi_{2h-1}(x)=\lim_{h=\infty}f_{2h}^{*}(x)=\Phi(x),$$

et, à cause de l'analyticité de $\varphi(x)$ et $\Phi(x)$, on a identiquement $\varphi(x)=\Phi(x)$. Une fonction absolument monotone est donc entièrement déterminée par les valeurs qu'elle prend en une infinité de points $x_\varkappa < 0$ équidistants, et on a la proposition suivante:

Soient $F(0), F(-\delta), F(-2\delta), \ldots$ *une infinité de valeurs bornées satisfaisant aux inégalités*

$$(F(-\delta), F(-3\delta), \ldots, F(-(2\varkappa+1)\delta))>0, (F(0), F(-2\delta), \ldots, F(-2\varkappa\delta))>0 \quad (36)$$

quel que soit l'entier $\varkappa \geq 0$*; si* $F(0)$ *ne peut être diminué sans que l'une au moins des inégalités* (36) *cesse d'être vérifiée, il existe une et une seule fonction absolument monotone* $F(x)$ *sur le demiaxe négatif prenant les valeurs considérées. Ainsi, la valeur* $F(0)$ *que prend à l'origine une fonction abs. monotone* $F(x)$ *déterminée par ses valeurs* $F(-\delta), F(-2\delta)$ *etc. est égale à la plus petite valeur* A *qui vérifie toutes les inégalités* $(A, F(-2\delta), \ldots, F(-2\varkappa\delta))>0$. *Si ces inégalités ne peuvent être satisfaites la fonction* $F(x)$ *ne peut être prolongée jusqu'à l'origine.*

§ 7. *Conditions nécessaires et suffisantes pour l'unicité de la fonction absolument monotone.* Il résulté, en particulier, du § précédent la proposition suivante:

Théorème F. *Si* $F(x)$ *est une fonction absolument monotone jusqu'à* $-\infty$ *et* $f_m(x)$ *un polynôme exponentiel à* m *paramètres positifs, si de plus l'équation* $F(x)=f_m(x)$ *admet plus de* m *racines comptées avec leur ordre de multiplicité, on a identiquement* $F(x)\equiv f_m(x)$*; dans le cas, où le nombre de racines est* m*, on a les inégalités* (35)*, pourvu qu'on ne conserve que les inégalités correspondant aux intervalles non nuls (entre racines distinctes) en tenant compte cependant dans la numération des intervalles successifs des* $\varkappa-1$ *intervalles nuls qui sont confondus dans une racine multiple d'ordre* $\varkappa$.

Ainsi, puisqu'on a $f_{2h}(x)<F(x)<f_{2h+1}(x)$, pour $x<0$, lorsque $f_{2h}(0)=f_{2h+1}(0)= = F(0)$, $f_{2h}^{(i)}(0)=f_{2h+1}^{(i)}(0)=F^{(i)}(0)$ tant que $i<2h$ et de plus $f_{2h+1}^{(2h)}(0)=F^{(2h)}(0)$, *on aura* (§ 3) *en posant*

$$f(x)=\lim_{h=\infty}f_{2h}(x),\ \varphi(x)=\lim_{h=\infty}f_{2h+1}(x), \quad (37)$$

l'inégalité fondamentale

$$f(x)\leq F(x)\leq \varphi(x). \quad (38)$$

Remarquons de plus qu'on a $f'_{2h+1}(x) < F'(x)$; donc (pour $x < 0$)

$$\varphi'(x) \leq F'(x), \tag{38bis}$$

ce qui signifie que la différence $\varphi(x) - F(x)$ (dans le cas, où elle n'est pas identiquement nulle) va en décroissant, et puisqu'elle est nulle pour $x = 0$, elle est toujours positive.

D'où cette conclusion:

Théorème G. *La condition nécessaire et suffisante pour que la fonction absolument monotone sur le demiaxe négatif, donnée par l'infinité de valeurs* $F(0), F'(0), \ldots, F^{(n)}(0), \ldots,$ *soit unique, est qu'il existe au moins une valeur* $x < 0$ *(ça peut être* $-\infty$*), où les fonctions* $f(x)$ *et* $\varphi(x)$ *définies par* (37) *sont égales.*

Nous dirons que les données $F(0), F'(0), \ldots, F^{(n)}(0)$, sont *complètement régulières*[1], dans le cas, où, quel que soit n, il n'existe qu'une seule fonction absolument monotone $F_n(x)$ satisfaisant aux conditions initiales

$$F_n(0) = F^{(n)}(0), F_n'(0) = F^{(n+1)}(0), \ldots, F_n^{(h)}(0) = F^{(n+h)}(0), \ldots \tag{39}$$

Il est clair que, si la fonction $F_n(x)$ est unique pour une certaine valeur de n, a fortiori, la fonction $F_{n-1}(x)$ satisfaisant aux conditions correspondantes sera également unique, car si on avait deux telles fonctions $F_{n-1}(x)$ et $\Phi_{n-1}(x)$, on pourrait prendre pour $F_n(x)$ soit $F'_{n-1}(x)$, soit $\Phi'_{n-1}(x)$. Donc, dans le cas, où les données $F(0), \ldots, F^{(n)}(0), \ldots$ définissent une seule fonction absolument monotone, ses données seront ou bien complètement regulières, ou bien *régulières d'ordre* $p \geq 0$, c'est-à-dire que la fonction $F_n(x)$ satisfaisant aux conditions (39) ne sera complètement déterminée que pour $n \leq p$; dans cette dernière hypothèse ce n'est que pour ces valeurs de n seulement, qu'on a nécessairement

$$F_n(x) = F^{(n)}(x).$$

Nous pouvons démontrer à présent le théorème:

Théorème H. *Si les données* $F(0), F'(0), \ldots, F^{(n)}(0), \ldots$ *sont complètement regulières, l'infinité de valeurs:* $F^{(n+1)}(0), F^{(n+2)}(0), \ldots$ *détermine complètement les valeurs de toutes les dérivées d'ordre non supérieur à* n, *quelque grand que soit* n.

[1] Il est à peine nécessaire de signaler qu'il suffirait, par exemple, que les dérivées $F^{(n)}(0)$ satisfassent à la condition de quasianalyticité de Carleman que la série $\sum \frac{1}{\sqrt[n]{F^{(n)}(0)}}$ soit divergente, car le maximum de $F^{(n)}(x)$ est $F^{(n)}(0)$.

A cet effet, remarquons que, par hypothèse, si $F_1(x)$ est déterminée par les conditions (39), où $n = 1$, la seule fonction qui satisfera aux mêmes conditions avec cette différence qu'elle prend elle même la valeur $F'(0) + C$ sera égale à

$$F_1(x) + C,$$

car sa dérivée doit être identique à $F''(x) = F_1'(x)$.

Or, pour que la valeur $F'(0) + C$ soit acceptable il faudra que

$$F_1(-\infty) + C = 0,$$

sans quoi on aurait $F(0) = \infty$. Donc, avec les données $F''(0), F'''(0)$, il ne peut y avoir plus d'une valeur acceptable pour $F'(0)$. Le même raisonnement s'applique évidemment à toutes les dérivées.

Il est d'ailleurs aisé d'indiquer un moyen théorique pour déterminer la valeur de $F^{(n)}(0)$ en fonction des données $F^{(n+1)}(0), \ldots$ (que nous supposons régulières).

En effet, formons les déterminants

$$\varDelta_{h,n}(X) = (X, F^{(n+2)}(0), \ldots, F^{(n+2h)}(0)) = X(F^{(n+2)}(0), \ldots, F^{(n+2h)}(0)) + \\ + (0, F^{(n+2)}(0), \ldots F^{(n+2h)}(0));$$

les seules valeurs acceptables $F^{(n)}(0) = X$ sont celles qui rendent

$$\varDelta_{h,n}(X) \geq 0$$

quel que soit h. En remarquant encore, que de $\varDelta_{h,n}(X_h) = 0$ il résulte que $\varDelta_{h,n}(X) \gtrless 0$, suivant que $X \gtrless X_h$, et que, d'autre part, si $\varDelta_{h,n}(X_h) = 0$, alors $\varDelta_{h+1,n}(X_h) < 0$, nous en concluons que

$$X_{h+1} > X_h.$$

Par conséquent, la suite *croissante* des nombres

$$X_h = -\frac{(0, F^{(n+2)}(0), \ldots, F_{(n+2h)}(0))}{(F^{(n+2)}(0), \ldots, F^{(n+2h)}(0))}$$

tendra vers une limite $M_{(n)}$ *qui sera précisément* $F^{(n)}(0)$, *car* $F^{(n)}(0)$ ne saurait être inférieure à $M_{(n)}$ sans que $F^{(n)}(x)$ cesse d'être abs. monotone et d'autre part, si on avait

$F^{(n)}(0) = M_{(n)} + \alpha$, où $\alpha > 0$, on pourrait aussi construire la fonction absolument monotone $F^{(n)}(x) - \frac{\alpha}{2}$, ce qui signifierait que $F^{(n)}(-\infty) > 0$, ce qui est inadmissible.

Plaçons nous à présent dans le cas, où les données initiales $F(0), F'(0), \ldots$ correspondent à une infinité de fonctions absolument monotones différentes, cas qui, d'après ce qui précède, est caractérisé par le fait que

$$\varphi(-\infty) - f(-\infty) > 0,$$

où $\varphi(x)$ et $f(x)$ sont respectivement, la plus grande et la plus petite fonction qui satisfait aux mêmes conditions initiales.

Je dis que, *si on remplace la première donnée* $F(0)$ *par*

$$M_0 = F(0) - \varphi(-\infty)$$

en conservant les mêmes valeurs $F^{(n)}(0)$ *des dérivées de tous les ordres, il n'existera qu'une seule fonction absolument monotone jusqu'à* $-\infty$ *définie par ces conditions initiales, et ce sera la fonction* $\varphi(x) - \varphi(-\infty)$.

En effet, $\varphi(x) - \varphi(-\infty)$ sera absolument monotone et satisfera à toutes les conditions initiales; d'autre part, si $F_1(x)$ est une fonction distincte de $\varphi'(x)$, satisfaisant aux conditions $F_1(0) = F'(0), \ldots, F_1^{(n)}(0) = F^{(n+1)}(0), \ldots$, on a $F_1(x) > \varphi'(x)$; il est donc impossible qu'il éxiste une autre fonction

$$\Phi(x) = \int_{-\infty}^{x} F_1(x)\,dx + C, \qquad \text{où } C \geq 0,$$

telle que $\Phi(0) = M_0 = \int_{-\infty}^{0} \varphi'(x)\,dx$.

Par contre, pour aucune autre valeur $M > M_0$, prise au lieu de M_0 pour $\Phi(0) = M$, la fonction $\Phi(x)$ ne sera unique (si, par hypothèse, elle ne l'était pas, quand $M = F(0)$).

En appliquant le raisonnement fait plus haut, on reconnait facilement que M_0 est la limite vers laquelle tend la suite de nombres croissants

$$X_h^0 = -\frac{(0, F''(0), \ldots F^{(2h)}(0))}{(F''(0), \ldots, F^{(2h)}(0))}$$

En effet, M_0 sera alors la plus petite valeur de X pour laquelle tous les déterminants $\Delta_{h,0}(X) = (X, F''(0), \ldots, F^{(2h)}(0))$ sont positifs.

Par conséquent, s'il existe au moins une valeur $M > M_0$, telle que les valeurs M, $F'(0), \ldots, F^{(n)}(0), \ldots$ correspondent également à une fonction abs. monotone unique, il en sera de même quel que soit $F(0) > M_0$, et la forme générale des fonctions absolument monotones définies par les données $X \geq M_0$, $F'(0), \ldots, F^{(n)}(0), \ldots$ sera $F(x) + C$.

Donc, *la condition nécessaire et suffisante pour que les données* $F(0), \ldots, F^{(n)}(0), \ldots$ *soient régulières*[1] *au moins du premier ordre est que* $F'(0) = M'$, *où* M' *est la limite inférieure des valeurs* X *pour lesquelles*

$$\Delta_{h,1}(X) > 0.$$

En effet, si $F'(0) = M'$, la suite $F'(0), \ldots, F^{(n)}(0), \ldots$ détermine sans ambiguïté une fonction $F'(x)$. Au contraire, si $F'(0) > M'$, cette suite ne correspond pas à une fonction unique, ou bien si elle définit une fonction unique, celle ci doit être de la forme $F'(x) + C$, où $C > 0$, mais alors son intégrale prise depuis $-\infty$ à 0 serait infinie.

D'où cette conséquence:

Corollaire 1. *Si le système de valeurs initiales* $F(0), F'(0), \ldots, F^{(n)}(0), \ldots$ *satisfait aux inégalités*

$$(F(0), F''(0), \ldots, F^{(2h)}(0)) > 0, (F'(0), \ldots, F^{(2h+1)}(0)) > 0 \tag{18}$$

il existe toujours un nombre unique $\theta \leq 1$, *tel que les données:* $F(0), \theta F'(0) \ldots, F^{(n)}(0), \ldots$ *sont régulières au moins du* 1^er^ *ordre.*[2]

En appliquant le même raisonnement aux dérivées successives on a la proposition suivante qui contient le théorème H, comme cas particulier:

Théorème H'. *La condition nécessaire et suffisante pour que les données initiales* $F(0), F'(0), \ldots, F^{(n)}(0), \ldots$ *soient régulières au moins de l'ordre* $p > 0$ *est que* $F^{(p)}(0) = M^{(p)}$ *où* $M^{(p)}$ *est la limite inférieure* (qui est finie, puisque les conditions (18) sont remplies) *des nombres* X *pour lesquels*

---

[1] Nous supposons toujours, bien entendu, remplies les conditions (18) pour qu'il existe au moins une fonction absolument monotone.

[2] Ainsi les conditions (18) (ou l'hypothèse de monotonie absolue) représentent des conditions de quasianalyticité (au sens général de ce mot) d'une nature toute différente de celles de M. Carleman, puisque la croissance des dérivées successives n'est pas limitée par ces conditions, du moment qu'une modification convenable de $F'(0)$ (ou $F(0)$) rend la fonction $F(x)$ parfaitement déterminée par ses valeurs initiales.

$$\Delta_{h,p}(X) = (X, F^{(p+2)}(0), \ldots, F^{(p+2h)}(0)) > 0. \tag{40}$$

En d'autres termes, quelque petit que soit $\varepsilon > 0$, on doit avoir pour h assez grand

$$(F^{(p)}(0) - \varepsilon, F^{(p+2)}(0), \ldots, F^{(p+2h)}(0)) < 0. \tag{40bis}$$

D'où le

Corollaire 2. *Pour que les données $F(0), F'(0), \ldots, F^{(n)}(0), \ldots,$ soient régulières de l'ordre $p > 0$ au moins, il faut et il suffit que le rapport* (qui est toujours décroissant)

$$\frac{(F^{(p)}(0), F^{(p+2)}(0), \ldots, F^{(p+2h)}(0))}{(F^{(p+2)}(0), \ldots, F^{(p+2h)}(0))}$$

tende vers 0 *avec* $\frac{1}{h}$.

On peut donc toujours, lorsque les conditions (18) sont vérifiées, modifier d'une façon déterminée les dérivées des p premiers ordres pour rendre les données initiales régulières d'ordre $p > 0$ au moins.

SECOND CHAPITRE.

Détermination des fonctions absolument monotones sur un segment fini.

§ 8. *Polynômes principaux.* Pour simplifier l'écriture nous réduirons, sauf avis contraire, le segment fini considéré à l'intervalle $(0, 1)$, la modification dans les énoncés des théorèmes pour passer à un intervalle quelconque pouvant toujours être faite sans aucune difficulté.

Soit

$$f_{2n}(x) = (A_1 + B_1 x) x^{p_1} + (A_2 + B_2 x) x^{p_2} + \cdots + (A_n + B_n x) x^{p_n} \tag{41}$$

un polynôme à coefficients non négatifs, dans lequel les exposants entiers non négatifs satisfont aux inégalités $p_{i+1} - p_i > 1$, et aucun des binômes entre parenthèses n'est identiquement nul. Tout polynôme ordinaire à coefficients positifs peut être mis sous la forme (41) ou sous la forme

$$f_{2n+1}(x) = A_0 + (A_1' + B_1' x) x^{p_1'} + \cdots + (A_n' + B_n' x) x^{p_n'} = A_0 + \int_0^x f_{2n}(x)\,dx, \tag{41bis}$$

où $p_1' > 0, p'_{i+1} - p_i' > 1, A_0 > 0$ et aucun des binômes n'est identiquement nul.

De tels polynômes, mis sous la forme indiquée, joueront un rôle important dans la suite, et il convient de leurs réserver le nom *de polynômes principaux d'ordre pair* $2n$ *où d'ordre impair* $(2n+1)$, *suivant qu'ils sont susceptibles d'être présentés sous la forme* (41) *ou* (41^{bis}).[1]

Pour déterminer l'ordre d'un polynôme il faut grouper ses termes deux à deux, s'il y a lieu, en partant du terme du plus haut degré. Ainsi, $1 + x$ est du second ordre, et $1 + x^4$ est du troisième ordre.

Dans le cas, où un des binômes (ou le terme libre dans $f_{2n+1}(x)$) disparaît, nous dirons que le polynôme principal correspondant (dont l'ordre s'abaisse ainsi) *dégénère.*

Faisons encore quelques remarques évidentes:

1. Un polynôme à coefficients non négatifs sans terme libre est toujours d'ordre pair.

2. Si un polynôme à coefficients positifs n'a pas de lacunes (l'absence de terme libre est considérée comme une lacune), il reste absolument monotone dans un certain intervalle à gauche de l'origine; c'est le seul polynôme qui jouit de cette propriété.

3. L'ordre d'un polynôme est supérieur d'une unité à son degré toutes les fois qu'il n'a pas de lacunes; donc, l'ordre d'un polynôme doit nécessairement être supérieur à son degré pour qu'il puisse rester absolument monotone à gauche de l'origine.

4. Le nombre des termes non nuls d'un polynôme principal est au plus égal à son ordre et au moins égal à la moitié de son ordre.

Les polynômes principaux jouissent de la propriété suivante.

Théorème F'. *Soit* $F(x)$ *une fonction absolument monotone pour* $b > x > 0$ *et* $f_m(x)$ *un polynôme principal d'ordre* m; *si l'équation*

$$F(x) - f_m(x) = 0 \tag{42}$$

admet plus de m *racines positives, on a identiquement* $F(x) \equiv f_m(x)$. *Dans le cas, où le nombre de racines* $a_1 > a_2 > \cdots a_k > 0$, *comptées avec leur degré de multiplicité est égal à* m, *on a*

---

[1] L'ordre des polynômes qui admettent les deux représentations est égal au plus petit des deux nombres correspondants.

$$\begin{array}{lll} \text{pour } x>a_1, & & F(x)-f_m(x)>0 \\ \quad » \quad a_i>x>a_{i+1}. & & (-1)^{\lambda_i}(F(x)-f_m(x))>0 \\ \quad » \quad a_k>x>0, & & (-1)^m(F(x)-f_m(x))>0 \end{array} \tag{43}$$

où λ_i est la somme des ordres de multiplicité des racines non inférieures à a_i.

Par hypothèse,

$$F(x)=c_0+c_1x+\cdots+c_nx^n+\cdots$$

est un développement convergent pour $x>0$ assez petit à coefficients non négatifs. Je dis que les coefficients du développement

$$P(x)=F(x)-f_m(x)$$

possèdent au plus m variations de signes. En effet, les seuls coefficients qui pourront être négatifs sont ceux qui proviennent de termes contenus dans $f_m(x)$. Il est clair que le nombre de variations ne pourra pas diminuer, si nous admettons que chaque paire de termes, comme

$$a_ix^{p_i}+b_ix^{p_i+1},$$

est effectivement séparée, par des termes positifs, de la paire précédente et de la paire suivante. Ainsi, quels que soient les signes des coefficients a_i et b_i, chaque paire ne pourrait donner naissance à plus de deux variations de signe; de plus le terme libre (lorsque m est impair) à lui seul ne pourra fournir qu'une seule variation, puisqu'il n'est précédé par aucun terme.

Ainsi dans tous les cas le nombre de variations ne peut dépasser l'ordre m et d'ailleurs pour que cette valeur soit atteinte, il est nécessaire que $F(x)$ soit au moins du degré de $f_m(x)$ et dans le cas, où leurs degrés sont égaux que le coefficient du terme du plus haut degré dans $F(x)$ soit supérieur à celui du terme correspondant dans $f(x)$.

Par conséquent, en vertu du théorème de Descartes, $P(x)=F(x)-f_m(x)=0$ ne peut posséder plus de m racines positives sans se réduire à une identité. De plus, si ce nombre de racines est exactement égal à m, $P(x)$ conserve un signe invariable pour $x>a_1$, et, d'après la remarque qu'on vient de faire, ce signe est positif pour x assez grand. Donc toutes les inégalités (43) sont établies.

Corollaire 1. *Si $F(x)$ est également un polynôme principal d'ordre non supérieur à m, l'équation* (42) *a au plus $m-1$ racines positives.*

Dans la suite nous allons étudier uniquement le cas le plus important, où les points a_i sont tous confondus, mais il va de soit que la même méthode peut être appliquée dans tous les autres cas, et, en particulier, le théorème fondamental d'existence des polynômes principaux du § suivant reste encore vrai et se démontre pareillement.

Ainsi, il importe de formuler, pour plus de clarté, comme conséquences immédiates du théorème démontré dans l'hypothèse indiquée, le

Corollaire 2. *Soit $F(x)$ une fonction absolument monotone sur* $(0, 1)$. *Si le polynôme principal $f_m(x)$ d'ordre non supérieur à m prend avec ses dérivées des m premiers ordres les mêmes valeurs $F(1), \ldots, F^{(m-1)}(1)$ que $F(x)$ avec ses dérivées corrrespondantes pour $x=1$, on a*
pour $x>1$

$$f_m(x) \leq f_{m+1}(x) \leq F(x), \tag{44}$$

et pour $0<x<1$

$$f_{2h}(x) \leq F(x) \leq f_{2h+1}(x), \tag{44bis}$$

quel que soit m ou h. Toutes les inégalités deviennent des identités, si le signe d'égalité a lieu au moins pour une valeur de x.

Nous appellerons les polynômes principaux $f_m(x)$ qui interviennent dans l'énoncé du dernier corollaire *polynômes principaux attachés à la fonction $F(x)$.*

§ 9. *Existence de polynômes principaux attachés à une fonction $F(x)$ absolument monotone sur* $(0, 1)$. Si nous avons un polynôme à coefficients positifs, nous n'aurons qu'à déterminer son ordre pour indiquer une infinité de problèmes d'extremum dont il donne la solution. Ainsi entre toutes les fonctions absolument monotones pour $x>0$, la fonction $f_2(x)=x+x^2$ est pour toutes les valeurs de $x>0$ la plus petite qui prend avec sa dérivée première les valeurs respectives: 2 et 3; également, cette fonction est la plus grande dans l'intervalle $\left(\frac{1}{2}, 1\right)$ et la plus petite à l'extérieur de cet intervalle, entre toutes celles qui à ses extrémités $\left(\frac{1}{2} \text{ et } 1\right)$ prennent les valeurs $\frac{3}{4}$ et 2. C'est d'ailleurs la seule fonction absolument monotone (pour $x>0$) qui satisfait à la fois à toutes les trois conditions, car nous tirons évidemment du théorème F' que *tout polynôme principal d'ordre m peut* *être déterminé comme la seule fonction absolument monotone satisfaisant à* $m+1$ *conditions auxquelles ce polynôme satisfait effectivement.*

Le fait général que nous affirmons est que *toutes les fois, où une fonction absolument monotone existe qui satisfait aux conditions indiquées, il y a aussi un polynôme principal satisfaisant à ces conditions dont l'ordre ne dépasse pas le nombre des conditions; si cet ordre est inférieur, le polynôme principal correspondant est la seule fonction absolument monotone déterminée par les conditions données.*

Pour fixer les idées, nous nous bornons à démontrer la proposition suivante:

Théorème fondamental. *Si* $F(x)$ *est une fonction absolument monotone sur* $(0, 1)$, *qui admet des dérivées finies des* $(m-1)$ *premiers ordres pour* $x=1$, *il existe toujours un seul polynôme* $f_m(x)$ *d'ordre au plus égal à* m *attaché à* $F(x)$.

Commençons par indiquer, comment on peut toujours construire un polynôme

$$\Phi(x) = b_1 x^{q_1} + \cdots + b_m x^{q_m}$$

à coefficients non négatifs contenant au plus m termes tel que

$$\Phi(1) = F(1), \ldots, \Phi^{(m-1)}(1) = F^{(m-1)}(1). \tag{45}$$

Si la fonction $F(x)$ n'avait pas plus de m termes la construction exigée serait réalisée d'elle-même. Nous supposons donc que

$$F(x) = c_0 + c_1 x + \cdots + c_k x^k + \cdots$$

contient plus de m termes. Nous pouvons donc former avec les m premiers termes non nuls un polynôme $\Phi_1(x)$, de sorte qu'on pourra écrire

$$F(x) = \Phi_1(x) + R(x).$$

Remarquons que $R(x)$ et ses dérivées des $(m-1)$ premiers ordres sont finies pour $x=1$. On peut donc obtenir les m coefficients positifs de $\Phi_1(x)$ moyennant les m équations linéaires

$$\Phi_1(1) = F(1) - R(1), \ \Phi_1'(1) = F'(1) - R'(1), \ldots, \ \Phi_1^{(m-1)}(1) = F^{(m-1)}(1) - R^{(m-1)}(1). \tag{46}$$

Si nous remplaçons ensuite $R(x)$ par $R(\lambda x)$, pour $\lambda < 1$, $R(\lambda x)$ aura non seulement ses $(m-1)$ dérivées bornées, mais même celles de tous les ordres. Par conséquent, pour λ assez voisin de 1, le système

$$\Phi_\lambda(1) = F(1) - R(\lambda), \ \Phi_\lambda'(1) = F'(1) - \lambda R'(\lambda), \ldots, \ \Phi_\lambda^{(m-1)}(1) = F^{(m-1)}(1) - \lambda^{m-1} R^{(m-1)}(\lambda),$$

donnera également m valeurs positives déterminées pour les coefficients de $\Phi_\lambda(x)$. Le problème posé serait résolu, si λ diminuant jusqu'à zéro, on n'obtenait jamais de coefficients nuls. Supposons, au contraire, que pour $\lambda = \lambda_1 < 1$ certains des coefficients se soient anullés. Nous transporterons alors dans $\Phi_\lambda(x)$ autant de termes de $R(\lambda x)$ qu'il est nécessaire pour retrouver m termes non nuls; dans le cas, où la dérivée $F^{(m)}(1)$ d'ordre m serait infinie, nous ajouterons même un terme de plus dans le premier membre. Après avoir modifié ainsi $\Phi_\lambda(x)$ et $R(\lambda x)$, nous pouvons écrire sans introduire de nouvelles notations, les m équations

$$\Phi_{\lambda_1}(1) = F(1) - R(\lambda_1), \ldots, \ \Phi_{\lambda_1}^{(m-1)}(1) = F^{(m-1)}(1) - \lambda_1^{m-1} R^{(m-1)}(\lambda_1)$$

auxquelles nous ajouterons, s'il y a lieu, l'équation $\Phi_{\lambda_1}^{(m)}(1) = M_{\lambda_1} < F^{(m)}(\lambda_1)$.

Les m (ou $m+1$) coefficients positifs peuvent donc être considérés comme les solutions déterminées de ce nouveau système de m (ou $m+1$) équations linéaires. Ensuite nous ferons encore diminuer λ, soit jusqu'à zéro, si c'est possible, soit jusqu'à la valeur λ_2 qui conduirait à la valeur zéro pour certains des coefficients de $\Phi_\lambda(x)$; dans le premier cas, l'opération serait terminée, dans le second cas, on continuera de la même façon. Ainsi, on finira ou bien par arriver à un polynôme contenant m (ou $m+1$) termes qui satisfera aux équations (45), ou bien l'opération va se prolonger indéfiniment. (Dans le cas, où l'on obtiendra un polynôme à $m+1$ termes, on pourra lui appliquer le traitement qui correspond aux fonctions dont la dérivée d'ordre m est finie et on se débarrassera ainsi du terme superflu après une seule transformation.) Or, si l'opération ne se terminait pas après un nombre fini de transformations correspondant à la suite décroissante de valeurs $\lambda_1, \lambda_2, \ldots$, on aura pour des valeurs λ_i d'indice assez élevé

$$|\Phi_{\lambda_i}(1) - F(1)| < \varepsilon, \ |\Phi_{\lambda_i}^{(\varkappa)}(1) - F^{(\varkappa)}(1)| < \varepsilon \qquad \text{pour} \qquad \varkappa \leq m-1,$$

quelque petit que soit le nombre donné ε, et de plus $\Phi_{\lambda_i}^{(m)}(1) < M$, où M est dans tous les cas un nombre fini indépendant de λ.

Les fonctions $\Phi_{\lambda_i}(x)$ absolument monotones ayant toutes leurs dérivées bornées des m premiers ordres sur $(0, 1)$, on peut en extraire une suite infinie qui tendra uniformément ainsi que ses dérivées des $m-1$ premiers ordres vers une fonction absolument monotone $\Phi(x)$ et ses dérivées respectives, de sorte qu'on aura

$$\Phi(1) = F(1), \ldots, \ \Phi^{(m-1)}(1) = F^{(m-1)}(1). \tag{45}$$

Il reste à constater que $\Phi(x)$ ne pourrait contenir plus de terme que $\Phi_{\lambda_i}(x)$, c'est-à-dire m (ou $m+1$).

A cet effet, remarquons que la différence

$$\Phi(x) - \Phi_{\lambda_i}(x) = a_0 + \cdots + a_\varkappa x^\varkappa + \cdots$$

est une série de Taylor convergente pour $x \leq 1$ qui possède au plus $2m$ (ou $2m+2$) variations. On peut donc indiquer un nombre fixe[1] $\mu_\varkappa$, tel qu'il existe des valeurs x sur $(0, 1)$, où

$$|\Phi(x) - \Phi_{\lambda_i}(x)| > \mu_\varkappa a_\varkappa.$$

Par conséquent, s'il y a une infinité d'indices λ_i pour lesquels $\Phi_{\lambda_i}(x)$ ne contient pas de terme en $x^\varkappa$, on aura, quel que soit ε

$$\mu_\varkappa a_\varkappa < \varepsilon,$$

où $a_\varkappa$ est le coefficient de $x^\varkappa$ dans $\Phi(x)$ qui dans ces conditions doit être nul. Ainsi $\Phi(x)$ ne contiendra effectivement que celles des puissances $x^\varkappa$ qui pour i assez grand se retrouvent dans toutes les fonctions $\Phi_{\lambda_i}(x)$; leur nombre ne peut donc dépasser m (ou $m+1$).

Ainsi le problème général de construction du polynôme principal d'ordre m attaché à une fonction absolument monotone quelconque est ramené au cas, où cette dernière représente un polynôme $F(x)$ *contenant au plus m termes positifs.*

Nous allons supposer à présent *m pair*, $m = 2n$. Soit

$$F(x) = \beta_1 x^{q_1} + \cdots + \beta_{2n} x^{q_{2n}}, \qquad \text{avec } 0 \leq q_1 < q_2 < \cdots < q_{2n}$$

où $\beta_i \geq 0$ pour $i < 2n$, $\beta_{2n} > 0$, le nombre de coefficients non nuls étant supérieur à n, et de plus, puisque $F(x)$ est, par hypothèse, d'ordre supérieur à m, on a $q_{2n} \geq 2n$.

Cela étant, les conditions pour $x = 1$ conduisent aux $2n$ équations

---

[1] On consultera à ce sujet mon livre, »Sur les propriétés extrémales etc.», page 36; d'après le théorème qui s'y trouve démontré, $\mu_1 = \dfrac{\operatorname{tg} \dfrac{\pi}{8m+8}}{4m+4}$, et les mêmes considérations permettent d'indiquer une limite inférieure pour $\mu_\varkappa$, quel que soit $\varkappa$, qui est de l'ordre de $\dfrac{1}{m^{2\varkappa}}$.

$$\begin{aligned} \beta_1+\beta_2+\cdots+\beta_{2n} &= F(1) \\ q_1\beta_1+\cdots\cdots+q_{2n}\beta_{2n} &= F'(1) \\ \cdots\cdots\cdots & \\ \cdots\cdots\cdots & \end{aligned} \tag{47}$$

$$q_1(q_1-1)\ldots(q_1-2n+2)\beta_1+\cdots+q_{2n}(q_{2n}-1)\ldots(q_{2n}-2n+2)\beta_{2n}=F^{(2n-1)}(1).$$

En posant,

$$N_0=F(1),\ N_1=F'(1),\ N_2=F'(1)+F''(1)=\frac{d^2F(1)}{d(\log 1)^2},\ldots,$$

$$N_{2n-1}=F'(1)+(2^{2n-2}-1)F''(1)+\cdots=\frac{d^{2n-1}F(1)}{d(\log 1)^{2n-1}},$$

conformément aux formules (4), on aura le système équivalent d'équations linéaires

$$\begin{aligned} \beta_1+\cdots\cdots+\beta_{2n} &= N_0 \\ \cdots\cdots\cdots & \\ \cdots\cdots\cdots & \\ q_1^{2n-1}\beta_1+\cdots\cdots+q_{2n}^{2n-1}\beta_{2n} &= N_{2n-1}, \end{aligned} \tag{48}$$

qui admet pour les valeurs données de q_i un système unique de solutions $\beta_i \geq 0$, où $\beta_{2n}>0$ et encore $n-1$ au moins des β_i d'indices inférieurs sont aussi différents de zéro.

En laissant invariables les seconds membres et tous les exposants q_i sauf q_{2n}, nous ferons diminuer continument ce dernier. Les variables β_i vont varier continument en même temps, et pour déterminer les dérivées $\frac{\partial \beta_i}{\partial q_{2n}}$ nous avons le nouveau système linéaire:

$$\begin{aligned} \frac{\partial\beta_1}{\partial q_{2n}}+\cdots\cdots\cdots+\frac{\partial\beta_{2n}}{\partial q_{2n}} &= 0 \\ q_1\frac{\partial\beta_1}{\partial q_{2n}}+\cdots\cdots+q_{2n}\frac{\partial\beta_{2n}}{\partial q_{2n}} &= -\beta_{2n} \\ \cdots\cdots\cdots & \\ \cdots\cdots\cdots & \\ q_1^{2n-1}\frac{\partial\beta_1}{\partial q_{2n}}+\cdots+q_{2n}^{2n-1}\frac{\partial\beta_{2n}}{\partial q_{2n}} &= -(2n-1)q_{2n}^{2n-2}\beta_{2n}. \end{aligned}$$

Il s'agit de montrer que

$$\frac{\partial \beta_{2n-1}}{\partial q_{2n}} > 0, \frac{\partial \beta_{2n-2}}{\partial q_{2n}} < 0, \ldots, \frac{\partial \beta_1}{\partial q_{2n}} > 0,$$

tant que $\beta_{2n} > 0$, comme nous le supposons.

En effet, posons

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 \cdots 1 \\ q_1 & q_2 \cdots q_{2n} \\ \cdot & \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \\ \cdot & \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \\ q_1^{2n-1} & \cdots q_{2n}^{2n-1} \end{vmatrix} > 0, \Delta_{q_i}(q) = \begin{vmatrix} 1 \cdots\cdots 1 & 1 & 1 \cdots\cdots 1 \\ q_1 \cdots\cdots q_{i-1} & q & q_{i+1} \cdots q_{2n} \\ \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot & \cdot & \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \\ \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot & \cdot & \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \\ q_1^{2n-1} \cdots q_{i-1}^{2n-1} & q^{2n-1} & q_{i+1}^{2n-1} \cdots q_{2n}^{2n-1} \end{vmatrix},$$

de sorte que $\Delta_{q_i}(q_i) = \Delta$ et $\Delta_{q_i}(q_\varkappa) = 0$ pour $i \gtrless \varkappa$.

De plus,

$$\frac{d\,\Delta_{q_i}(q)}{dq} = \begin{vmatrix} 1 \cdots\cdots\cdots\cdots 0 & 1 \cdots\cdots 1 \\ q_1 \cdots\cdots\cdots\cdots 1 & q_{i+1} \cdots q_{2n} \\ \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot & \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \\ \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot & \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \\ q_1^{2n-1} \cdots (2n-1) q^{2n-2} & q_{i+1}^{2n-1} \cdots q_{2n}^{2n-1} \end{vmatrix}.$$

Avec ces notations, on a manifestement

$$\frac{\partial \beta_i}{\partial q_{2n}} = -\frac{\beta_{2n}}{\Delta} \cdot \frac{d\,\Delta_{q_i}(q_{2n})}{dq}. \tag{49}$$

Or, pour $i < 2n$, la plus grande racine de $\Delta_{q_i}(q) = 0$ est q_{2n}; par conséquent, le signe de $\frac{d\,\Delta_{q_i}(q_{2n})}{dq}$ est le même que celui de $\Delta_{q_i}(q)$, lorsque $q > q_{2n}$; donc ce signe est positif pour i pair, et négatif pour i impair, et on a ainsi, comme nous l'affirmions [1]

$$(-1)^i \frac{\partial \beta_i}{\partial q_{2n}} < 0. \tag{50}$$

---

[1] On a des inégalités analogues pour les dérivées partielles $\frac{\partial \beta_i}{\partial q_\varkappa}(-1)^{\varkappa+i} < 0$, si $\varkappa > i$, et au contraire $\frac{\partial \beta_i}{\partial q_\varkappa}(-1)^{\varkappa+i} > 0$, si $\varkappa < i$.

Par conséquent, si q_{2n} croît, β_{2n-1} ainsi que tous les coefficients *impairs* vont *croître* également, tandisque les coefficients d'indice *pair* (inférieur à $2n$) vont *décroître*; c'est *le contraire* qui arrivera, lorsque q_{2n} *va diminuer*. Voulant éviter des coefficients négatifs, nous serons donc *arrêtés dans le mouvement ascendant* de q_{2n}, si un des coefficients *pairs* devient *nul*, et *le mouvement déscendant devra être arrêté, lorsqu'un des coefficients impairs est nul.* Mais les termes, en réalité, absents qui correspondent aux coefficients nuls peuvent être déplacés à volonté. Ainsi, la diminution de q_{2n} serait réellement impossible, seulement dans les conditions suivantes: s'il n'y a qu'un terme qui manque, les exposants correspondant à des coefficients non nuls se groupant par paires: (p_1, p_1+1), (p_2, p_2+1), ... $(p_{n-1}, p_{n-1}+1)$; ou bien, s'il y a deux termes qui manquent, alors une des paires considérées serait remplacée par un terme isolé, etc.. Par conséquent la fonction $f(x)$ serait elle même un polynôme principal d'ordre $2n$. Supposons donc que la circonstance signalée ne soit pas réalisée, et diminuons q_{2n} jusqu'au moment, où un des coefficients impairs s'annule, ce qui arrivera certainement avant que β_{2n} s'annule, car si $\beta_{2n}=0$ pour une valeur de q_{2n}, il aura dû, en vertu des équations (48), être nul au début, contrairement à notre hypothèse (il résulte d'ailleurs du système (48), que q_{2n} s'approchant indéfiniment de q_{2n-1}, $|\beta_{2n-1}|$ croît indéfiniment). En ce moment nous remplaçerons cet exposant, correspondant à un terme fictif, par un nombre entier p aussi grand $(p<q_{2n})$ que possible qui soit *séparé de* q_{2n} *par un nombre impair* d'exposants, pour qu'une diminution nouvelle de q_{2n} rende positif son coefficient. En supposant le déplacement indiqué possible nous continuerons notre opération qui après un nombre fini d'arrêts analogues devra nous amener, enfin, à une valeur déterminée α de q_{2n}, où le déplacement indiqué sera impossible: ce sera précisément, lorsque nos exposants formeront $n-1$ groupes considérés plus haut. Si en ce moment α était entier, le polynôme principal d'ordre $2n$ serait construit.

Dans le cas contraire (où on a évidemment $\alpha>2n-1$) désignons par ϱ le nombre entier immédiatement inférieur à α, et comme il manque au moins un terme, posons $q_{2n-1}=\varrho$ et $q_{2n}=\alpha$. Alors tous nos exposants sont disposés en n paires: $(p_1, p_1+1), \ldots, (p_{n-1}, p_{n-1}+1)$, (ϱ, α), où les coefficients correspondant à p_i+1 sont toujours différents de 0. Par conséquent, si à présent au lieu de diminuer $q_{2n}=\alpha$, ce qui n'est pas possible (car le coefficient de x^ϱ ou d'un des termes x^{p_i} au moins est nul), nous le ferons *croître*, tous les coefficients redeviendront positifs, jusqu'à ce que q_{2n} n'atteigne la valeur $\varrho+1$, et le problème serait alors résolu, ou bien que, avant que cela arrive, un des termes en x^{p_i+1} disparaisse. Dans ce cas il faudra remplacer $p_i + 1$ par $p_i - 1$, mais si $p_i - 1 = p_{i-1} + 1$, il faudra le remplacer par $p_{i-2} - 1$ etc.; le seul cas, où cet abaissement de l'exposant serait impossible, aurait lieu, lorsque $p_\varkappa = 2\varkappa - 2$, quel que soit $\varkappa \leq i$. Il reste à montrer qu'une fonction $\varphi(x)$ de cette dernière nature, c'est à dire

$$\varphi(x) = A_1 + A_2 x + \cdots + A_{2i-1} x^{2i-2} + A_{2i} x^{p_{i+1}} + A_{2i+1} x^{p_{i+1}+1} + \cdots + A_{2n-4} x^{p_{n-1}} + \\ + A_{2n-3} x^{p_{n-1}+1} + A_{2n-2} x^{\varrho} + A_{2n-1} x^{\alpha_1}$$

ne pourra se rencontrer.

En effet, formons la différence $F(x) - \varphi(x)$ et calculons le nombre maximum de variations de signe dont ses coefficients seraient susceptibles. Ce nombre ne serait pas diminué par le fait que nous intercalions dans cette différence des termes positifs entre les puissance $2i-2$ et p_{i+1}, entre $p_{i+1} + 1$ et p_{i+2} et ainsi de suite jusqu'à un terme entre $p_{n-1} + 1$ et ϱ et un dernier supérieur à α_1. Alors le nombre de variations jusqu'au premier des termes introduits ne dépasse pas $2i - 1$, et le nombre de variations entre deux quelconques de ces termes successifs ne dépasse pas 2. Or, le nombre de ces termes ajoutés est $n - i + 1$, donc le nombre d'intervalles est $n-i$, et le nombre total de variations possibles est

$$2i - 1 + 2(n - i) = 2n - 1,$$

ce qui est en contradiction avec l'hypothèse que $F(x) - \varphi(x) = 0$ a une racine, $x = 1$, d'ordre $2n$. Donc, après un nombre fini de transports, α arrivera à $\varrho + 1$, et le polynôme principal sera construit.

Ainsi, le théorème est démontré pour le cas, où $m = 2n$ est pair. Dans le cas, où $m = 2n + 1$, on construira par le procédé qui vient d'être exposé un polynôme principal $\varphi_{2n}(x)$ d'ordre $2n$ attaché à la fonction $F'(x)$. Alors

$$\int_0^x \varphi_{2n}(x)\,dx$$

aura ses dérivées des $2n$ premiers ordres respectivement égales à celles de $F(x)$ pour $x = 1$, et de plus sa valeur

$$\int_0^1 \varphi_{2n}(x)\,dx = A$$

est inférieure à $\int\limits_0^1 F'(x)\,dx = F(1) - F(0)$, à cause de la propriété que $\varphi_{2n}(x) < F'(x)$. Donc le polynôme principal d'ordre $2n+1$ sera

$$f_{2n+1}(x) = A_0 + \int\limits_0^x \varphi_{2n}(x)\,dx,$$

où $A_0 = F(1) - A > F(0) \geq 0$. C. q. f. d.

§ 10. *Application aux fonctions absolument monotones jusqu' à* $-\infty$. Soit $F(x)$ une fonction absolument monotone sur $(-c, 0)$, et $F(0), F'(0), \ldots, F^{(n)}(0), \ldots$, sa valeur ainsi que celles de toutes ses dérivées à l'origine. En vertu du théorème d'existence qui vient d'être démontré, on pourra lui attacher sur le segment $(-c, 0)$ des polynômes principaux de tous les ordres

$$f_{2h,c}(x) = \sum_{i=1}^{h} \left[A_i + B_i\left(1 + \frac{x}{c}\right)\right]\left(1 + \frac{x}{c}\right)^{p_i},$$

$$f_{2h+1,c}(x) = A_0 + \sum_{i=1}^{h} \left[A_i' + B_i'\left(1 + \frac{x}{c}\right)\right]\left(1 + \frac{x}{c}\right)^{p_i'}. \tag{51}$$

Si nous admettons que $F(x)$ n'est pas un polynôme (c'est-à-dire que $F^{(n)}(0) > 0$, quel que soit n), ces polynômes seront différents de $F(x)$, et on aura sur le segment considéré

$$f_{2h-2,c}(x) < f_{2h,c}(x) < F(x) < f_{2h+1,c}(x) < f_{2h-1,c}(x). \tag{52}$$

Par conséquent, lorsque h croît indéfiniment, $f_{2h,c}(x)$ tend en croissant vers une fonction absolument monotone $f_c(x)$ et $f_{2h+1,c}(x)$ tend en décroissant vers une fonction $\varphi_c(x)$ également absolument monotone sur $(-c, 0)$. Ces deux fonctions $f_c(x)$ et $\varphi_c(x)$ prennent à l'origine avec toutes leurs dérivées les mêmes valeurs initiales que $F(x)$, et on a

$$f_c(x) \leq F(x) \leq \varphi_c(x) \tag{53}$$

sur le segment $(-c, 0)$. De plus en tenant compte du procédé de formation des polynômes principaux d'ordre *impair*, on a

$$F'(x) \geq \varphi_c'(x); \tag{53bis}$$

d'où nous tirons le

Théorème G'. *La condition nécessaire et suffisante pour que la fonction $F(x)$ soit la seule fonction absolument monotone sur le segment fini $(-c, 0)$ prenant avec toutes ses dérivées à l'origine les valeurs $F(0), F'(0), \ldots, F^{(n)}(0), \ldots$ est que*

$$f_c(-c) = \varphi_c(-c). \tag{54}$$

La nécessité de cette condition n'a pas besoin de démonstration, et sa suffisance résulte de la remarque que $f_c'(x) \geq \varphi_c'(x)$, de sorte qu'on tire de (54) $f_c(x) \geq \varphi_c(x)$; donc, d'après (53), on a $f_c(x) = \varphi_c(x) = F(x)$.

En faisant *c croître indéfiniment nous retrouverons par une nouvelle voie le théorème* G ainsi que tous les principaux résultats du premier Chapitre.

En effet, admettons que la fonction $F(x)$ soit absolument monotone sur tout le demiaxe négatif, donc sur tout segment fini $(-c, 0)$. Soit h un nombre *fixe*, et supposons $c_1 > c$; on aura évidemment

$$f_{2h,c}(x) \leq f_{2h,c_1}(x) \leq f_{2h+1,c_1}(x) \leq f_{2h+1,c}(x) \tag{55}$$

sur le segment $(-c, 0)$.

Par conséquent, lorsque $c \to \infty$, $f_{2h,c}(x)$ tendra en croissant vers une fonction bien déterminée sur tout segment fini du demiaxe négatif. Il faudra donc que $\frac{p_i}{c}$ ainsi que $A_i + B_i$ tendent vers des limites finies, et on aura

$$\lim_{c=\infty} f_{2h,c}(x) = f_{2h}(x) = \sum_{i=1}^{h} a_i e^{\alpha_i x},$$

de même (56)

$$\lim_{c=\infty} f_{2h+1,c}(x) = f_{2h+1}(x) = a_0 + \sum_{i=1}^{h} a_i' e^{\alpha_i' x}.$$

De (52) et (55) nous concluons ainsi, en passant à la limite,

$$f_{2h-2}(x) \leq f_{2h}(x) \leq F(x) \leq f_{2h-1}(x) \leq f_{2h+1}(x). \tag{57}$$

En faisant croître h indéfiniment nous retrouvons ainsi les deux fonctions limites $f(x)$ et $\varphi(x)$ du 1[er] Chapitre (37) et l'inégalité

$$f(x) \leq F(x) \leq \varphi(x). \tag{38}$$

D'ailleurs, il résulte de (55) que

$$f_c(x) \leq f_{c_1}(x) \leq \varphi_{c_1}(x) \leq \varphi_c(x),$$

et par conséquent $f_c(x)$ (en croissant) et $\varphi_c(x)$ (en décroissant) tendent vers des fonctions limites qui ne peuvent être autres que $f(x)$ et $\varphi(x)$ respectivement:

$$f(x) = \lim_{c=\infty} f_c(x), \quad \varphi(x) = \lim_{c=\infty} \varphi_c(x). \tag{58}$$

Comme nous l'avons déjà remarqué (§ 3) toutes ces égalités limites s'étendent aux dérivées de tous les ordres; donc, en particulier, l'inégalité (53^{bis}) conduit à l'inégalité (38^{bis}) qui jointe à (38) a pour conséquence le théorème G.

§ 11. *Conditions nécessaires et suffisantes pour qu'il existe au moins une fonction absolument monotone $F(x)$ sur le segment $(-c, 0)$ prenant avec ses dérivées des m premiers ordres les valeurs* $F(0), F'(0), \ldots, F^m(0)$. Il résulte des § 8 et § 9 la proposition suivante:

Théorème K. *Pour qu'il existe au moins une fonction $F(x)$ absolument monotone sur $(-c, 0)$ prenant avec ses dérivées des $(m-1)$ premiers ordres les valeurs $F(0), F'(0), \ldots, F^{(m-1)}(0)$ à l'origine, il faut et il suffit: lorsque $m = 2h+1$ est impair, que le système de m équations à $3h+1$ inconnues*

$$\left.\begin{array}{l} A_0 + A_1 + \qquad B_1 + \cdots + A_h \quad + B_h \qquad = F(0) \\ p_1 A_1 + \quad (p_1+1) B_1 + \cdots + p_h A_h + \quad (p_h+1) B_h = c F'(0) \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \varrho_m(p_1) A_1 + \varrho_m(p_1+1) B_1 + \cdots\cdots\cdots + \varrho_m(p_h+1) B_h = c^{m-1} F^{(m-1)}(0), \end{array}\right\} \tag{59}$$

et dans le cas, où $m = 2h$ est pair, que le système de m équations à $3h$ inconnues

$$\left.\begin{array}{l} A_1 + B_1 + \cdots + A_h + B_h \qquad = F(0) \\ p_1 A_1 + \cdots\cdots\cdots + \quad (p_h+1) B_h = c F'(0) \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \varrho_m(p_1) A_1 + \cdots\cdots\cdots + \varrho_m(p_h+1) B_h = c^{m-1} F^{(m-1)}(0), \end{array}\right\} \tag{60}$$

où $\varrho_n(p) = p(p-1)\ldots(p-n+2)$, possède un système de solutions, tel que $p_i \geq 0$, $A_i \geq 0, B_i \geq 0, p_i$ étant des nombres entiers (le système de solutions, lorsqu'il existe, est unique).

Comme il a été démontré, les polynômes principaux ainsi déterminés qui satisfont aux conditions initiales données

$$f_{2h+1}(x) = A_0 + \sum_{i=1}^{h}\left[A_i + B_i\left(1+\frac{x}{c}\right)\right]\left(1+\frac{x}{c}\right)^{p_i} \text{ ou}$$

$$f_{2h}(x) = \sum_{i=1}^{h}\left[A_i + B_i\left(1+\frac{x}{c}\right)\right]\left(1+\frac{x}{c}\right)^{p_i} \qquad (51^{\text{bis}})$$

jouiront respectivement de la propriété que pour toutes les fonctions $F(x)$ répondant aux mêmes conditions initiales on a sur $(-c, 0)$

$$F(x) \leq f_{2h+1}(x) \text{ et } F(x) \geq f_{2h}(x). \qquad (52^{\text{bis}})$$

Nous donnerons plus loins un procédé général permettant de décider dans chaque cas particulier, si les systèmes (59) ou (60) admettent une solution et de la déterminer effectivement. Pour le moment remarquons seulement que, si la solution existe pour une valeur c_1 de c, elle existe aussi pour toute valeur $c < c_1$. On aura donc une condition *suffisante* pour l'existence d'une solution pour toute valeur $c > 0$, lorsque celle-ci existe pour $c = \infty$. Or, si $c \to \infty$, le système (60), par exemple, a pour limite le système de $m = 2h$ équations à $2h$ inconnues

$$\begin{aligned}
a_1 + a_2 + \cdots + \quad a_h \quad &= F(0) \\
\alpha_1 a_1 + \cdots\cdots + \quad \alpha_h a_h &= F'(0) \\
\cdots\cdots\cdots\cdots & \\
\cdots\cdots\cdots\cdots & \\
\alpha_1^{2h-1} a_1 + \cdots\cdots + \alpha_h^{2h-1} a_h &= F^{(2h-1)}(0),
\end{aligned}$$

où $a_i = \lim\limits_{c=\infty}(A_i + B_i)$ et $\alpha_i = \lim\limits_{c=\infty}\frac{p_i}{c}$, et la condition suffisante en question sera (conformément au théorème A)

$$(F(0), F''(0), \ldots, F^{(\varkappa)}(0)) \geq 0, \ (F'(0), \ldots, F^{(l)}(0)) \geq 0 \qquad (18^{\text{bis}})$$

pour toute valeur paire $\varkappa < 2h - 1$ et pour toute valeur impaire $l \leq 2h - 1$ (d'ailleurs, si un de ces déterminants, dans lequel la dérivée d'ordre supérieur est $F^{(n)}(0)$, est nul, tous les déterminants contenant cette dérivée $F^{(n)}(0)$, doivent être nuls).

Mais, en général, il existe une valeur $L_m > 0$ telle que le système (59) (ou (60)) admet une solution pour $c < L_m$ et n'en admet pas pour $c > L_m$.

De (52^{bis}) et du théorème K nous concluons le

Corollaire. *La condition nécessaire et suffisante pour que la fonction $F(x)$ existe et soit la seule satisfaisant aux m conditions initiales données est que le polynôme* *principal*[1] $f_m(x)$ *dégénère en un polynôme d'ordre inférieur, c'est-à-dire que dans la solution du système* (59) *pour* m *impair on ait* $A_0 = 0$ *ou* $A_i + B_i = 0$, *ou bien* $B_i = 0$ *avec* $p_i = 2i - 1$, *au moins pour une valeur de* i, *et pour* m *pair dans la solution du système* (60) *on ait* $p_1 = 0$ *et* $B_i = 0$ *avec* $p_i = 2i - 2$ *ou* $A_i + B_i = 0$ *au moins pour une valeur de* i. En d'autres termes, si $m = 2h + 1$, le système de m équations à $3h$ inconnues

$$\begin{aligned} A_1 + B_1 + \cdots + A_h + B_h &= F(0) \\ p_1 A_1 + \cdots\cdots + (p_h + 1) B_h &= c F'(0) \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \\ \varrho_m(p_1) A_1 + \cdots\cdots + \varrho_m(p_h + 1) B_h &= c^{2h} F^{(2h)}(0) \end{aligned} \tag{61}$$

doit avoir une solution, où $A_i \geq 0, B_i \geq 0$ avec des entiers $p_i \geq 0$; si $m = 2h$, le système de m équations à $3h - 2$ inconnues

$$\begin{aligned} A_0 + A_1 + B_1 + \cdots + A_{h-1} + B_{h-1} &= F(0) \\ p_1 A_1 + \cdots\cdots\cdots + (p_{h-1} + 1) B_{h-1} &= c F'(0) \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \\ \varrho_m(p_1) A_1 + \cdots\cdots\cdots + \varrho_m(p_{h-1} + 1) B_{h-1} &= c^{2h-1} F^{(2h-1)}(0) \end{aligned} \tag{62}$$

doit avoir une solution acceptable.

Lemme. *Si les systèmes* (61) *ou* (62) *ne dégénèrent pas, il existe toujours une fonction* $\Phi(x)$ *absolument, monotone sur* $(-c, 0)$ *égale à* $F(x)$ *et ayant les mêmes dérivées à l'origine jusqu'à l'ordre* $m-2$ *inclusivement et telle que* $\Phi^{(m-1)}(0) = P$, *quel que soit* $P > F^{(m-1)}(0)$; *au contraire la fonction* $\Phi(x)$ *n'existerait pas, si* $P < F^{(m-1)}(0)$.

En effet, soit, par exemple, $m = 2h$; par hypothèse, le système (62) admet des solutions non négatives et telles de plus que $A_0 > 0$, $A_i + B_i > 0$, quel que soit $i < h$, et, si k est le plus petit indice pour lequel $B_k = 0$, on a $p_k > 2k - 1$; rien n'empêche de supposer que $A_i > 0$, car, lorsqu'on a un terme isolé non nul, on peut aussi bien le considérer comme le premier que comme le dernier d'une paire, et de même, si on a un groupe contenant un nombre impair de termes, on peut admettre que c'est le dernier terme de la dernière paire qui est nul. Donc,

[1] qui représente alors cette fonction unique.

en ajoutant un terme *fictif*, correspondant au *plus petit exposant impair* qui n'entre pas dans notre polynôme principal nous introduirons un nouveau coefficient inconnu X qui avec $2h-1$ grandeurs $A_0, A_1, B_1, \ldots, B_{h-1}$ représentent les $2h$ valeurs qui satisfont aux $2h$ équations linéaires (62). Si on laisse invariables les seconds membres des $(2h-1)$ premières équations et qu'on augmente continument $F^{(2h-1)}(0)$, toutes les inconnues vont manifestement varier de la sorte, que les B, dont les valeurs initiales pourraient être nulles et X qui occupent des places paires vont croître, tandis que A_0, tous les A_i et ceux des B dont l'indice est inférieur à k vont diminuer; ainsi, au debut, au moins, toutes les inconnues seront positives. A un moment donné une ou plusieurs des inconnues occupant des places impaires pourront s'annuler; alors le ou les exposants entiers correspondants aux termes disparus devront être *transportés à droite aussi peu que possible à des places paires* (ce qui pourra toujours être fait d'une façon unique), et l'augmentation du second membre de la dernière des équations pourra ainsi être prolongée indéfiniment. De plus la disposition des exposants permet d'affirmer qu'on aura tout le temps un *polynôme principal d'ordre m non dégénéré.* Il reste seulement à montrer que le procédé de transport des termes évanouissants que nous avons adopté amenera ainsi à n'importe quelle valeur $P > F^{(2h-1)}(0)$.

A cet effet, rappelons que, d'après ce qui précède, il y aura au moins une valeur $M_0 > F^{(2h-1)}(0)$ pour laquelle toutes les $2h$ inconnues du système auront des valeurs *positives*; par conséquent, ε étant un nombre positif assez petit, le système dans lequel les seconds membres varieront moins que de ε, admettra également des solutions positives. Cela étant, choisissons un nombre entier positif q très grand, tel que

$$\varepsilon(q-2h+2) > (P-M_0)\, c^{2h-1}$$

et déterminons le coefficient E par l'égalité

$$E\varrho_m(q) = (P-M_0)\, c^{2h-1};$$

il est clair qu'alors, quel que soit $\varkappa < 2h = m$, on a

$$E\varrho_\varkappa(q) \leq \frac{(P-M_0)\, c^{2h-1}}{q-2h+2} < \varepsilon.$$

Donc, il existe bien un polynôme absolument monotone contenant $(m+1)$ termes satisfaisant aux m conditions données. Soit $Q(x)$ son polynôme principal d'ordre m, dont le degré $q_0 \leq q$; admettons d'autre part qu'en continuant notre procédé indiqué plus haut, nous arrivions à un polynôme principal $Q_1(x)$ dont le degré $q_1 > q \geq q_0$. D'après le corollaire 1 du § 8 la différence $Q_1(x) - Q(x)$ qui a une racine d'ordre $m-1$ à l'origine n'a pas de racines positives; on a donc $Q_1(x) - Q(x) > 0$ pour toute valeur positive de x, ce qui exigerait que $Q_1^{(2h-1)}(0) > Q^{(2h-1)}(0) = P$. Par conséquent la valeur P a dû être atteinte par notre procédé avant que nos transpositions successives nous aient amené à un polynôme de degré $q_1 > q_0$.

Dans le cas, où $m = 2h+1$, le système (61) ne dégénérant pas, on a ou bien $p_1 > 0$, on bien, si $p_1 = 0$, le terme libre appartient à un groupe contenant un nombre pair de termes (sans lacunes), de sorte que le premier exposant absent est toujours un nombre *pair* (ou nul), et c'est celui-là qu'il faut introduire au début, lorsque $F^{(m-1)}(0)$ croît; tout se passe ensuite, comme dans le raisonnement précédent, les termes disparaissants devant être transportés *à droite aussi peu que possible à des places impaires.*

Au contraire, il ne peut pas exister de fonction absolument monotone $\Phi(x)$ sur $(-c, 0)$ telle que $\Phi^{(m-1)}(0) < F^{(m-1)}(0)$, car $F(x)$ étant le polynôme principal d'ordre $m-1$ de $\Phi(x)$, on doit avoir $\Phi(x) > F(x)$ pour $x > 0$.

Ce lemme nous conduit, par conséquent, à une règle pratique pour décider dans chaque cas particulier de proche en proche, s'il existe ou non une fonction abs. monotone $\Phi(x)$ sur $(-c, 0)$ répondant aux conditions initiales $F(0), F'(0), \ldots, F^{(m-1)}(0)$, en construisant successivement ses polynômes principaux $f_1(x), \ldots, f_m(x)$.

Règle. *Les valeurs $F(0), F'(0), \ldots, F^{(n)}(0)$ étant compatibles, on construit le polynôme principal non dégénéré $f_{n+1}(x)$; on détermine la dérivée $f_{n+1}^{(n+1)}(0)$ d'ordre $n+1$; si $F^{(n+1)}(0) < f_{n+1}^{(n+1)}(0)$, la valeur $F^{(n+1)}(0)$ est inadmissible; si $F^{(n+1)}(0) = f_{n+1}^{(n+1)}(0)$, $f_{n+1}(x)$ est la fonction unique répondant aux conditions $F(0), \ldots, F^{(n+1)}(0)$, de sorte que les valeurs des dérivées successives d'ordre supérieur doivent alors se confondre avec celles de $f_{n+1}(x)$; si $F^{(n+1)}(0) > f_{n+1}^{(n+1)}(0)$, cette valeur est admissible, et, par le procédé indiqué dans la démonstration du lemme, on construit le polynôme principal non dégénéré $f_{n+2}(x)$ qui lui correspond.*

Ainsi *le calcul effectif des polynômes principaux* (pour c donné) *se ramène à un procédé arithmétique régulier, d'après lequel tous les coefficients s'expriment rationnellement au moyen des données initiales.* Mais cet avantage a pour conséquence de rendre beaucoup plus difficile la représentation explicite des conditions nécessaires et suffisantes analogues aux conditions (18) (correspondant à $c = \infty$). Nous mettrons mieux en évidence la nature arithmétique de ce dernier problème, en examinant le cas de $m \leq 4$, où il peut être résolu facilement.

Pour $m=2$, le problème est toujours possible. D'après la règle indiquée, pour $m=3$, la plus petite valeur M admissible de $F''(0)$, s'obtiendra en exprimant que le système

$$A_1+B_1=F(0),\ p_1 A_1+(p_1+1)B_1=cF'(0),\ p_1(p_1-1)A_1+p_1(p_1+1)B_1=c^2 M \quad (63)$$

donne à A_1 et B_1 des valeurs non négatives, pour p_1 entier non négatif convenablement pris. On tire immédiatement des deux premières équations

$$p_1=\frac{c\,F'(0)}{F(0)}-\frac{B_1}{A_1+B_1}=\left[\frac{c\,F'(0)}{F(0)}\right],$$

où le symbole $[x]$ représente la partie entière de x, et

$$B_1=cF'(0)-p_1F(0),\ A_1=(1+p_1)F(0)-cF'(0);$$

donc, en substituant ces valeurs dans la dernière des équations (63), on trouve facilement

$$F(0)\,M=\left(F'(0)-\frac{\varrho\,F(0)}{c}\right)\left(F'(0)-\frac{(1-\varrho)\,F(0)}{c}\right), \quad (64)$$

où

$$\varrho=\frac{c\,F'(0)}{F(0)}-\left[\frac{c\,F'(0)}{F(0)}\right].$$

Supposons par exemple, pour simplifier l'écriture, $F(0)=F'(0)=1$. Avec ces données la fonction absolument monotone sur $(-c,0)$ ne pourra pour aucune valeur de $x>-c$ devenir inférieure à

$$f_2(x)=(p_1+1-c)\left(1+\frac{x}{c}\right)^{p_1}+(c-p_1)\left(1+\frac{x}{c}\right)^{p_1+1},$$

où $p_1=[c]$; dans ce cas

$$M=f_2''(0)=\left(1-\frac{\varrho}{c}\right)\left(1-\frac{1-\varrho}{c}\right)\leq 1. \quad (65)$$

Ainsi, lorsque $F''(0)\geq 1$, il existe (conformément à (18^{bis})) une fonction absolument monotone sur tout le demiaxe négatif, mais si $F''(0)<1$, la fonction $F(x)$ ne pourra rester absolument monotone au delà d'un point $-c$ que l'égalité (65) permet de déterminer.

Pour mettre la relation (65) entre M et c sous une forme plus commode, posons

$$\theta = \frac{p_1}{c}(1-\varrho), \qquad \text{où } 0 < \theta \leq 1;$$

alors $\theta c = p_1(1-\varrho) = p_1(1-c+p_1)$, d'où

$$c = p_1 \frac{p_1+1}{p_1+\theta} = p_1 + p_1 \frac{1-\theta}{p_1+\theta} = p_1 + c\frac{1-\theta}{p_1+1};$$

donc

$$\varrho = \frac{c}{p_1+1}(1-\theta)$$

et (à cause de (65))

$$\frac{1}{1-M} = \frac{c}{1-\dfrac{\varrho(1-\varrho)}{c}} = \frac{p_1^2+p_1}{p_1+\theta^2} = p_1 + p_1\frac{1-\theta^2}{p_1+\theta^2} = p_1+\delta,$$

où

$$\delta = \frac{p_1}{p_1+\theta^2}(1-\theta^2) < 1.$$

Par conséquent,

$$[c] = \left[\frac{1}{1-M}\right], \tag{66}$$

et entre δ et ϱ on a la relation

$$\frac{1-\delta}{p_1(p_1+\delta)} = \left(\frac{1-\varrho}{p_1+\varrho}\right)^2$$

qui s'obtient en éliminant θ des équations

$$\varrho = p_1\frac{1-\theta}{p_1+\theta}, \quad \delta = p_1\frac{1-\theta^2}{p_1+\theta^2}.$$

Remarquons encore que

$$c - \frac{1}{1-M} = \varrho - \delta = -\frac{p_1(p_1+1)\theta(1-\theta)}{(p_1+\theta)(p_1+\theta^2)} \leq 0. \tag{67}$$

Dans le cas de $F(0)$ et $F'(0)$ quelconques, toutes les formules subsistent, si on y remplace c par $c\dfrac{F'(0)}{F(0)}$ et M par $\dfrac{MF(0)}{(F'(0))^2}$; ainsi, par exemple, au lieu de (66), on a, en général,

$$\left[\frac{cF'(0)}{F(0)}\right]=\left[\frac{(F'(0))^2}{(F'(0))^2-MF(0)}\right]. \tag{68}$$

Donc, c étant fixe, quel que soit $F''(0)>M$, on pourra construire une fonction abs. monotone qui lui corresponde, et en particulier, le polynôme principal du 3^{me} ordre déterminé par les relations

$$A_0+A_1+B_1=F(0), p_1A_1+(p_1+1)B_1=cF'(0), p_1(p_1-1)A_1+p_1(p_1+1)B_1=c^2F''(0); \tag{69}$$

ce polynôme une fois construit, la plus petite valeur N de $F'''(0)$ sera déterminée par la formule

$$p_1(p_1-1)(p_1-2)A_1+(p_1+1)p_1(p_1-1)B_1=c^3N.$$

Ainsi *dans le cas* de $m=4$, *outre la condition que* $F''(0)>M$, (où M est donné par (64)), *on a la condition nécessaire et suffisante*

$$F'''(0)\geq N=\frac{1}{F'(0)}\left(F''(0)-\frac{\varrho_1F'(0)}{c}\right)\left(F''(0)-\frac{(1-\varrho_1)F'(0)}{c}\right) \tag{70}$$

où on a posé $\varrho_1=\dfrac{cF''(0)}{F'(0)}-\left[\dfrac{cF''(0)}{F'(0)}\right]$. Si ces deux conditions sont satisfaites, on peut construire dans chaque cas particulier le polynôme principal du 4^{me} ordre prenant avec ses dérivées à l'origine les valeurs respectives $F(0)$, $F'(0)$, $F''(0)$, $F'''(0)$. Soit, par exemple, $F(0)=F'(0)=F''(0)=1$, $F'''(0)=\dfrac{3}{2}$. En vertu de ce qui précède, une telle fonction peut être abs. monotone sur tout segment fini; cherchons sa valeur minima pour $x=-\dfrac{1}{2}$, si elle est abs. monotone jusqu'à $-c=-2$. Il nous faut donc construire le polynôme principal du 4^{me} ordre. La valeur minima admissible de $F'''(0)$ est $N=\dfrac{1}{2}$, elle correspond au polynôme principal du 3^{me} ordre $f_3(x)=\dfrac{1}{3}+\dfrac{2}{3}\left(1+\dfrac{x}{2}\right)^3$. Donc pour $F'''(0)$ un peu supérieur à $\dfrac{1}{2}$, le polynôme principal aura les exposants $p_1=0$, $p_2=3$. Pourtant, lorsque $F'''(0)$ atteint la valeur 1, ces exposants doivent être remplacés par $p_1=1$, $p_2=4$.

Avec ces exposants les coefficients restent positifs tant que $F'''(0)$ n'atteint pas $\frac{5}{4}$; alors le coefficient de la 4^{me} puissance s'annule et on a le polynôme

$$\frac{1}{2}\left(1+\frac{x}{2}\right)+\frac{1}{3}\left(1+\frac{x}{2}\right)^2+\frac{1}{6}\left(1+\frac{x}{2}\right)^5$$

On est donc obligé de faire un nouveau transport à droite du terme qui s'est annulé; on prend ainsi $p_1=1$, $p_2=5$, et ces valeurs sont valables jusqu'à $F'''(0)\leq\frac{3}{2}$. En particulier, pour $F'''(0)=\frac{3}{2}$ le polynôme principal devient

$$f_4(x)=\frac{2}{5}\left(1+\frac{x}{2}\right)+\frac{1}{2}\left(1+\frac{x}{2}\right)^2+\frac{1}{10}\left(1+\frac{x}{2}\right)^6;$$

pour $x=-\frac{1}{2}$, on a $f_4\left(-\frac{1}{2}\right)=\frac{3}{10}+\frac{9}{32}+\frac{723}{40960}=\frac{24537}{40960}$. En tenant compte de la valeur $f_3\left(-\frac{1}{2}\right)=\frac{25}{32}$, on voit que toutes les fonctions $F(x)$ satisfaisant aux 4 conditions initiales données, pour $x=-\frac{1}{2}$, sont comprises entre ces deux valeurs.

Du moment que le polynôme $f_4(x)$ est connu, en calculant $f_4^{(4)}(0)=\frac{9}{4}$, nous trouvons donc la valeur minima possible pour $F^{(4)}(0)$; ainsi nous pouvons, par exemple, poser $F^{(4)}(0)=3$; en formant le polynôme $f_5(x)$ avec les exposants $p_1=1$, $p_2=6$ (et un terme libre, bien entendu), on a alors

$$f_5(x)=\frac{1}{7}+\frac{4}{5}\left(1+\frac{x}{2}\right)^2+\frac{2}{35}\left(1+\frac{x}{2}\right)^7$$

et ainsi de suite.

§ 12. *Détermination de la limite supérieure L de la grandeur du segment $(-c, 0)$, où une fonction satisfaisant aux conditions initiales données peut rester absolument monotone.* Bornons nous encore au cas, où l'on se donne les m valeurs $F(0), \ldots, F^{(m-1)}(0)$ à l'origine, que nous supposons toutes essentiellement *positives*.[1]

[1] Il est évident que, si la dernière derivée seulement s'annulait, c'est le polynôme $P(x)=F(0)+\cdots+\frac{x^{m-2}}{(m-2)!}F^{(m-2)}(0)$ qui serait la seule fonction absolument monotone pour $x<0$, et L serait égal au module de la plus petite en valeur absolue das racines négatives de

$$P(x)=0,\ P'(x)=0, \ldots,\ P^{(m-3)}(x)=0.$$

Examinons d'abord l'hypothèse que $c = L$ est une valeur positive telle qu'il existe des fonctions absolument monotones sur $(-L, 0)$ satisfaisant aux conditions initiales, mais qu'aucune de ces fonctions ne reste absolument monotone pour $x < -L$.

La condition pour que L jouisse de cette propriété résulte immédiatement des développements qui précèdent: *il suffit que le polynôme principal d'ordre m relatif au segment $(-L, 0)$ dégénère en un polynôme d'ordre inférieur.* En effet, c'est alors la seule fonction absolument monotone sur ce segment; de plus le degré du polynôme principal d'ordre non supérieur à $m-1$ (auquel se réduit cette fonction unique) est au moins $m-1$, donc son développement suivant les puissances de $(x+L)$ possède au moins un coefficient nul, c'est-à-dire qu'il y aura une dérivée d'un certain ordre qui devra changer de signe au passage par $-L$.

Nous allons montrer que cette condition est également nécessaire et qu'on a par conséquent le

Théorème L. *S'il existe des fonctions absolument monotones pour $x \geq -L$, satisfaisant aux m conditions initiales données, la condition nécessaire est suffisante pour qu'aucune de ces fonctions ne soit absolument monotone pour $x + L < 0$, est que le polynôme principal correspondant $f_m(x)$ d'ordre m dégénère en un polynôme d'ordre inférieur*[1]*, c'est-à-dire que $f_m(x) = f_{m-1}(x)$ soit la seule fonction absolument monotone sur $(-L, 0)$.*

Ainsi il nous reste à prouver que, si $f_m(x)$ est un polynôme principal, d'ordre m (non dégénéré) sur le segment $(-c, 0)$ prenant avec ses dérivées des $m-1$ premiers ordres à l'origine les valeurs $F(0), \ldots, F^{(m-1)}(0)$, on peut également construire le polynôme principal d'ordre correspondant relatif au segment $(-c-\varepsilon, 0)$, en supposant ε assez petit.

A cet effet, faisons d'abord la remarque suivante: les coefficients du polynôme principal sont des fonctions continues de c (pour $c < L$) tant que les exposants correspondants ne changent pas; lorsqu'un des coefficients s'annule, l'exposant correspondant doit, en général, être modifié; cette modification est déterminée par le fait qu'un des coefficients de chaque paire de termes reste positif, son exposant devant, par conséquent, rester invariable, de sorte que le terme disparu reparaît de l'autre coté du groupe auquel il appartient.

Ceci posé, admettons que notre affirmation soit vraie pour $m-1$; son exac-

---

[1] Dans le cas, où les conditions initiales seraient m valeurs quelconques de la fonction aux points donnés du segment $(-L, 0)$, il faut ajouter que ce polynôme principal dégénéré doit avoir des lacunes, car on ne peut plus affirmer que le polynôme doit être au moins du degré $m-1$ (comme cela a lieu quand $F^{(m-1)}(0) > 0$).

titude est évidente dans le cas du polynôme principal du second ordre qui ne dégénère jamais, et effectivement L est alors infini.

Rejetons donc pour un instant la dernière condition, $F^{(m-1)}(0)$, et construisons sur $(-L, 0)$ le polynôme principal d'ordre $m-1$, qui certainement ne dégénère pas. Donc, à cause de notre supposition, les $m-1$ conditions peuvent être satisfaites par des fonctions absolument monotones sur un certain segment $(-L-a, 0)$ un peu plus grand, et le polynôme principal $f_{m-1}(x)$ ainsi que ses coefficients est une fonction continue de a. Par conséquent, la dérivée $(m-1)^{\text{ème}}$ à l'origine du polynôme $f_{m-1,\alpha}(x)$ correspondant à $(-L-\alpha, 0)$, pour α assez petit, diffère aussi peu qu'on veut de $f_{m-1}^{(m-1)}(0)$, et de plus le polynôme $f_{m-1,\alpha}(x)$ ne peut dégénérer pour $\alpha < a$. Donc, le polynôme principal sur $(-L-\alpha, 0)$ d'ordre m existera également, si

$$F^{(m-1)}(0) > f_{m-1,\alpha}^{(m-1)}(0)$$

ce qui aura bien lieu pour α assez petit, puisqu'on a, par hypothèse,

$$F^{(m-1)}(0) > f_{m-1}^{(m-1)}(0). \qquad \text{C. q. f. d.}$$

Cependant, il se peut que la limite $-L$, au delà de laquelle toutes les fonctions cessent d'être absolument monotones, ne pourra également être atteinte par aucune fonction absolument monotone.

Il peut exister une infinité de fonctions abs. monotones sur un segment $(-L+\varepsilon, 0)$ *quelque petit que soit* ε, *mais aucune ne sera abs. monotone sur tout le segment* $(-L, 0)$. *Pour qu'il en soit ainsi il est nécessaire et suffisant que le polynôme principal* $f_{m-1}(x)$ d'ordre $m-1$ relatif *au segment* $(-L, 0)$ *dégénère et que* $F^{(m-1)}(0) > f_{m-1}^{(m-1)}(0)$.

En effet, dans ces conditions, la seule fonction prenant avec ses $m-2$ dérivées les valeurs $F(0), \ldots, F^{(m-2)}(0)$ sera $f_{m-1}(x) = f_{m-2}(x)$, donc sa dérivée d'ordre $m-1$ doit être $f_{m-1}^{(m-1)}(0)$ et on ne pourra satisfaire à toutes les m conditions initiales avec une fonction absolument monotone sur $(-L, 0)$. Mais, si $c < L$ est assez voisin de L, le polynôme d'ordre $m-1$, $f_{m-1,c}(x)$ qui ne dégénère pas (en vertu du théorème précédent) aura sa dérivée d'ordre $m-1$ aussi voisine qu'on veut de $f_{m-1}^{(m-1)}(0)$; donc, en vertu du lemme (§ 11), il existera toujours une fonction satisfaisant à toutes les m conditions, pourvu que la condition $F^{(m-1)}(0) > f_{m-1}^{(m-1)}(0)$ soit remplie.

Pratiquement, pour trouver la valeur de L dans chaque cas particulier, où on se donne $F(0), \ldots, F^{(m-1)}(0)$, on cherchera successivement les valeurs $L_3, L_4, \ldots, L_m$ pour lesquels les polynômes principaux $f_3(x), \ldots, f_m(x)$ dégénèrent. Si ces valeurs existent, elles satisfont nécessairement aux inégalités

$$L_3 \geq L_4 \geq \cdots \geq L_m.$$

En tout cas, *si la valeur* L_m *existe, on a* $L = L_m$, *et cette valeur détermine le segment* $(-L, 0)$ *maximum sur lequel la fonction absolument monotone existe effectivement.*

Mais il peut arriver qu'après le polynôme $f_i(x)$ qui dégénère pour une valeur L_i, le polynôme $f_{i+1}(x)$ ne dégénère pour aucune valeur $c \leq L_i$; donc il n'existe pas pour $c = L_i$ (ainsi la valeur L_{i+1} n'existe pas), mais alors le polynôme principal $f_{i+2}(x)$ *a fortiori* n'atteint pas la limite L_i; par conséquent, d'après ce qui précède, il dégénère nécessairement pour une valeur $L_{i+2} < L_i$. Il en résulte que l'une au moins des valeurs L_{m-1} ou L_m existe toujours; *si* L_m *n'existe pas, on aura donc* $L = L_{m-1}$, *mais cette limite n'est atteinte par aucune fonction absolument monotone, parmi lesquelles il y en a cependant qui restent absolument monotones sur tout segment* $(-L+\varepsilon, 0)$, *quelque petit que soit le nombre positif donné* ε.

Soit, en particulier $m = 4$. Dans ce cas, en tenant compte des résultats du § précédent, on arrive facilement à la conclusion suivante.

L est égal au plus petit des deux nombres (supposés positifs)

$$c = H\left(1 - \frac{\theta(1-\theta)}{p+\theta}\right)\frac{F(0)}{F'(0)} \quad et \quad c_1 = H_1\left(1 - \frac{\theta_1(1-\theta_1)}{p_1+\theta_1}\right)\frac{F'(0)}{F''(0)},$$

où

$$H = \frac{(F'(0))^2}{(F'(0))^2 - F(0)\cdot F''(0)} = p + \delta, \quad H_1 = \frac{(F''(0))^2}{(F''(0))^2 - F'(0)\cdot F'''(0)} = p_1 + \delta_1, \qquad (71)$$

$$p = [H], \; p_1 = [H_1], \; \theta = \sqrt{\frac{p(1-\delta)}{H}}, \quad \theta_1 = \sqrt{\frac{p_1(1-\delta_1)}{H_1}};$$

suivant que $c \geq c_1$ ou bien $c < c_1$, il existera ou non une fonction absolument monotone sur tout le segment $(-L, 0)$; dans le cas, où l'une des quantités H ou H_1 est négative, on n'a pas à se préoccuper de la valeur correspondante de c ou c_1, et L est égal à la valeur de celle des valeurs c ou c_1 qui est positive.

En particulier, $L = \infty$, *dans le cas, où* H et H_1 *sont négatifs ou infinis, mais il n'existera pas de fonction absolument monotone sur tout le demiaxe négatif, si* $H = \infty$ et $H_1 < 0$ (quoique la fonction pourra être absolument monotone sur un segment fini donné aussi grand qu'on veut).

Ainsi, soit, par exemple, $F(0) = F'(0) = F''(0) = 1$, $F'''(0) = \frac{1}{2}$; alors $c = \infty$, $c_1 = 2$. Donc $L = 2$, et il existera une fonction unique

$$f_3(x) = \frac{1}{3} + \frac{2}{3}\left(1 + \frac{x}{2}\right)^3$$

qui sera effectivement absolument monotone sur le segment $(-2, 0)$.

Soit, au contraire, $F(0) = \frac{1}{2}$, $F'(0) = F''(0) = F'''(0) = 1$. On a $L = 1$, mais il n'y a pas de fonction absolument monotone sur le segment $(-1, 0)$, car la fonction unique

$$f_3(x) = \frac{1}{2}(1 + x)^2$$

qui satisfait aux trois premières conditions, ne satisfait pas à la dernière. Par contre, sur tout segment $(-1 + \alpha, 0)$ le polynôme

$$f_3(x) = \frac{\alpha^2}{2} + \alpha(1-\alpha)\left(1 + \frac{x}{1-\alpha}\right) + \frac{(1-\alpha)^2}{2}\left(1 + \frac{x}{1-\alpha}\right)^2$$

qui n'est pas dégénéré pour $\alpha > 0$, a sa dérivée 3^{me} nulle à l'origine, donc on pourra construire une fonction absolument monotone sur $(-1 + \alpha, 0)$, quel que soit $F'''(0) \geq 0$. En appliquant le procédé régulier indiqué plus haut, on trouve par exemple, sur $\left(-\frac{3}{4}, 0\right)$

$$f_4(x) = \frac{1}{1280}\left[334 + 303\left(1 + \frac{4x}{3}\right) + \left(1 + \frac{4x}{3}\right)^6 + 2\left(1 + \frac{4x}{3}\right)^7\right].$$

§ 13. *Fonctions potentiellement monotones.* Nous disons qu'une fonction $f(x)$ est *potentiellement monotone* sur le segment $(-c, 0)$, si $f(e^y - c)$ est absolument monotone sur tout le demiaxe négatif. Donc, d'après le théorème E, une telle fonction $f(x)$ peut être considérée comme la limite d'une somme de la forme:

$$f(x) = \lim_{n=\infty} \sum_1^n A_i(x+c)^{\alpha_i}, \qquad A_i > 0,\ \alpha_i \geq 0.$$

Le lien entre les fonctions potentiellement monotones sur $(-c, 0)$ et les fonctions absolument monotones sur le demiaxe négatif, permet de considérer comme équivalents les problèmes correspondant à ces deux catégories de fonctions.

Ainsi, par exemple, les conditions (8) sont suffisantes pour l'existence d'une somme potentielle à $2h$ paramètres non négatifs

$$\varphi_{2h}(x) = \sum_{1}^{h} A_i (x+c)^{\alpha_i},$$

mais elles ne le sont pas évidemment pour l'existence du polynôme principal d'ordre $2h$ satisfaisant aux mêmes $2h$ conditions. La considération du problème correspondant relatif aux fonctions potentiellement monotones quoiqu'insuffisante peut être utile pour l'étude des problèmes sur les fonctions absolument monotones que nous avons étudiés dans les §§ précédents.

Nous pouvons indiquer, par exemple, la condition nécessaire suivante pour l'existence d'une fonction absolument monotone satisfaisant à m conditions initiales données: *il faut qu'entre deux exposants α_i quelconques dans $\varphi_m(x)$ on puisse insérer un nombre entier.*

En effet, si $F(x)$ est une fonction absolument monotone sur $(-c, 0)$ qui satisfait aux mêmes m conditions,

$$P(x) = F(x) - \varphi_m(x)$$

devra présenter m variations; or, ceci n'est évidemment possible que dans le cas, où tous les termes de $\varphi_m(x)$ sont séparés entre eux, par un terme, au moins, de $F(x)$, dont les exposants sont des entiers.

Mais cette condition est encore loin d'être suffisante.

Il y a lieu de remarquer que, lorsque c augmente de zéro, les déterminants (6) varieront à partir de valeurs *positives. La plus petite valeur λ, où l'un au moins de ces déterminants change de signe détermine une borne supérieure de la valeur L étudiée au § précédent. Lorsque le nombre m des données initiales croît indéfiniment la différence $\lambda - L$ tend vers zéro* (au moins dans le cas, où la fonction potentiellement monotone est unique). Il pourrait se rencontrer d'autres valeurs isolées $c = \mu > \lambda$, pour lesquels les déterminants (6) redeviendraient positifs; mais tandis que l'intervalle $(-\lambda, 0)$ serait un intervalle de monotonie absolue, l'intervalle $(-\mu, 0)$ ne pourrait être qu'un intervalle de monotonie potentielle. Ainsi, par exemple, la fonction $\frac{\sqrt{1+x}}{b-x}$, où $0 < b < 1$ est absolument monotone sur $(0, b)$ et potentiellement monotone sur $(-1, b)$. D'une façon générale, dans le cas, où la *fonction $F(x)$ potentiellement monotone sur $(-c, 0)$ déterminée par l'infinité de valeurs $F(0), \ldots, F^{(n)}(0), \ldots$, satisfaisant aux conditions* (6) *est unique, il faut et il suffit pour qu'elle y soit absolument monotone que les inégalités* (6) *subsistent, lorsqu'on y remplace c*

par un nombre donné[1] γ *tel que* $c > \gamma > \frac{c}{2}\cdot$ En effet, la fonction $F(x)$ sera alors régulière pour $x = -c$. Pour la même raison l'infinité d'inégalités (6) suffit pour affirmer que $F(x)$ est absolument monotone sur $(-c, 0)$ dans le cas particulier, où elle est analytique à l'origine, et son rayon de convergence y est supérieur à c.

Remarquons, enfin, que dans le cas, où le nombre de données initiales $m = 4$, λ est égal au plus petit des nombres

$$\frac{F'(0)\, F(0)}{F'^2(0) - F(0)\cdot F''(0)} \quad \text{et} \quad \frac{F''(0)\, F'(0)}{F''^2(0) - F'(0)\, F'''(0)};$$

donc, en tenant compte des formules (71), on a alors

$$\lambda - L = \frac{p\,(p+1)\,\theta\,(1-\theta)}{(p+\theta)\,(p+\theta^2)}\,\frac{F(0)}{F'(0)} \quad \text{ou} \quad \frac{p_1(p_1+1)\,\theta_1(1-\theta_1)}{(p_1+\theta_1)\,(p^1+\theta_1{}^2)}\,\frac{F'(0)}{F''(0)},$$

de sorte que $\lambda - L < \frac{F'(0)}{F''(0)}$ $\left(\text{car } \lambda \text{ et } L \text{ étant finis, on a } \frac{F(0)}{F'(0)} < \frac{F'(0)}{F''(0)}\right)\cdot$

CHAPITRE III.

Application au problème des moments.

§ 14. *Le problème des moments de Stieltjes et les fonctions absolument monotones.* L'étude qui précède, surtout celle du premier chapitre, est étroitement liée au problème classique des moments.[2] Cependant je n'ai pas voulu mêler les deux questions pour faire voir que la théorie des fonctions absolument monotones

---

[1] Il en résultera alors que les inégalités (6) sont aussi satisfaites pour toute valeur $\gamma_1 < c$.

[2] Les problèmes traités dans le second chapitre correspondent au cas, où la fonction de distribution $\psi(t)$ dans (72) admet des points de discontinuité équidistants entre lesquels elle est constante. Ainsi, on adoptant la terminologie du calcul des probabilités et en désignant par a_i l'espérance mathématique de x^i (ou le moment d'ordre i de x), on déduit de (68) et (70) les inégalités nécessaires et suffisantes auxquelles doivent satisfaire a_1, a_2, a_3

$$a_2 \geq a_1{}^2 + \varrho(1-\varrho),\ a_3 \geq \frac{a_2{}^2}{a_1} + a_1\,\varrho_1(1-\varrho_1), \quad \text{où } \varrho = a_1 - [a_1], \quad \varrho_1 = \frac{a_2}{a_1} - \left[\frac{a_2}{a_1}\right],$$

si on admet que x ne peut recevoir que des valeurs positives et *entières*.

exposée indépendemment de la théorie des fractions continues et des moments de Stieltjes conduit simplement aux principaux résultats de cette dernière. Je vais maintenant indiquer rapidement les rapports entre ces deux théories.

D'abord, le lecteur a certainement remarqué depuis longtemps que les polynômes exponentiels tels que

$$f_{2h}(x) = \sum_1^h A_i e^{\alpha_i x} \quad \text{et} \quad f_{2h+1}(x) = A_0 + \sum_1^h A_i e^{\alpha_i x},$$

qui sont déterminés par $2h$ (ou $2h+1$) valeurs initiales $F(0), F'(0), \ldots, F^{(2h-1)}(0)$ (et $F^{(2h)}(0)$), correspondent aux réduites d'ordre pair et impair de la fraction continue de Stieltjes qui est attaché au développement

$$F(0) + F'(0)z + \cdots + F^{(n)}(0)z^n + \cdots$$

(en général, divergent), A_i étant *les résidus* et α_i *les pôles* de ces réduites.

Le théorème E (§ 6) *signifie qu'en utilisant la notion d'intégrale de Stieltjes, on peut représenter toute fonction* $F(x)$ *absolument monotone sur le demiaxe négatif sous la forme*

$$F(x) = \int_0^\infty e^{tx}\, d\psi(t) \tag{72}$$

où $\psi(t)$ *est une fonction non décroissante.*

En effet,

$$f_{2h}(x) = \sum_{i=1}^h A_i e^{\alpha_i x}$$

représentant des polynômes exponentiels qui par hypothèse tendent uniformément vers $F(x)$ pour $x \leq 0$, posons

$$\psi_h(t) = 0 \quad \text{pour } t < \alpha_1$$
$$\psi_h(t) = A_1 + A_2 + \cdots + \frac{1}{2}A_i \quad \text{pour } t = \alpha_i$$
$$\psi_h(t) = A_1 + A_2 + \cdots + A_i \quad \text{pour } \alpha_i < t < \alpha_{i+1}.$$

On peut alors, comme il est connu, choisir une suite infinie d'indices h croissants, tels que $\psi_h(t)$ convergent vers une fonction $\psi(t)$, également non décroissante, en tous les points de continuité de cette dernière. Dans ces conditions,

$$f_{2h}(x) = \int_0^\infty e^{tx}\, d\psi_h(t)$$

tend uniformément, pour $x \leq 0$, vers $\int_0^\infty e^{tx}\, d\psi(t)$, d'où résulte l'égalité (72).

D'ailleurs, pour $x < 0$, on est en droit de différentier (72), ce qui conduit à la formule

$$F^{(n)}(x) = \int_0^\infty t^n e^{tx}\, d\psi(t). \tag{73}$$

De plus, *dans l'hypothèse que toutes les dérivées $F^{(n)}(0)$ de $F(x)$ restent finies à l'origine*, on a aussi

$$F^{(n)}(0) = \int_0^\infty t^n\, d\psi(t), \tag{74}$$

l'intégrale dans le second membre de (74) devant, par conséquent, avoir alors un sens quel que soit n. Il nous suffira d'examiner le cas de $n = 1$, le même raisonnement pouvant être répété de proche en proche.

Ainsi, par hypothèse, x tendant vers 0 par valeurs négatives, on a constamment

$$\int_0^\infty t e^{tx}\, d\psi(t) = F'(x) < \int_0^\infty \frac{e^{tx} - 1}{x}\, d\psi(t) < F'(0),$$

et *a fortiori*, quelque grand que soit le nombre donné N, on aura

$$I_N(x) = \int_0^N \frac{e^{tx} - 1}{x}\, d\psi(t) < F'(0);$$

puisque $I_N(x)$ croît avec $x < 0$, nous en concluons l'existence de la limite

$$\lim_{x=0} I_N(x) = \int_0^N t\, d\psi(t) \leq F'(0),$$

et également, de la limite $\int_0^\infty t\, d\psi(t) \leq F'(0)$. D'où résulte (74) pour $n = 1$.

Il est aisé de s'assurer ensuite (d'ailleurs indépendamment de notre dernière conclusion) que *la fonction* $\psi(t)$ *dans l'expression* (72) *est complètement déterminée* (aux points de continuité) *par la fonction* $F(x)$. On peut utiliser dans ce but le résultat de Stieltjes que la formule

$$\Phi(z) = \int_0^\infty \frac{d\psi(t)}{1 - tz}, \tag{75}$$

où $\Phi(z)$ est donné sur le demiaxe négatif, détermine d'une façon unique la fonction $\psi(t)$. Il suffit de remarquer qu'on a

$$\int_0^\infty F(xz)\, e^{-x}\, dx = \int_0^\infty \int_0^\infty e^{x(tz-1)}\, d\psi(t)\, dx = \int_0^\infty \frac{d\psi(t)}{1 - tz} = \Phi(z). \tag{76}$$

On peut encore procéder autrement, sans faire appel à la formule (75) de Stieltjes.

A cet effet, remarquons que la formule (72) donne une expression analytique à la fonction $F(z)$ dans le domaine complexe pour toute valeur de $z = x + yi$, où $x \leq 0$. Sans que cela nous soit nécessaire pour le moment, ajoutons que, à cause de la convergence uniforme de l'intégrale (73) pour $x \leq 0$, lorsque les moments donnés par la formule (74) sont finis, la fonction $F(z)$ (holomorphe, en général, pour $x < 0$) admettrait également dans cette dernière hypothèse des dérivées de tous les ordres sur l'axe imaginaire.

Or, $t_1 > t_0 \geq 0$ étant deux points de continuité de la fonction monotone $\psi(t)$, on a

$$\psi(t_1) - \psi(t_0) = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \int_{-\infty}^\infty \frac{\cos\ ty\ [\sin\ t_1 y - \sin\ t_0 y]}{y}\, d\psi(t)\, dy,$$

en vertu de la propriété connue de l'intégrale de Dirichlet.

Donc, en posant

$$A(y) = \frac{1}{2}[F(yi) + F(-yi)] = \int_0^\infty \cos\ ty\, d\psi(t), \tag{77}$$

où la fonction $A(y)$ de la variable réelle y est parfaitement déterminée, on a

$$\psi(t_1) - \psi(t_0) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^\infty A(y) \frac{\sin\ t_1 y - \sin\ t_0 y}{y}\, dy. \tag{78}$$

Par conséquent, les conditions nécessaires et suffisantes que nous avons trouvées au 1er Chapitre pour qu'il existe une fonction absolument monotone sur le demiaxe négatif, prenant à l'origine avec ses dérivées de tous les ordres les valeurs $F(0)$, $F'(0), \ldots, F^{(n)}(0), \ldots$ et pour qu'elle soit unique, sont équivalentes respectivement aux conditions pour la posssibilité du problème des moments, correspondant aux équations (74), et à celles de l'unicité de sa solution.

Remarquons que la fonction $\Phi(z)$ de Stieltjes, par rapport à laquelle la fonction $F(z)$ est *la fonction associée* de M. Borel, est également absolument monotone sur le demiaxe négatif. Mais il est évident que toute fonction absolument monotone n'est pas susceptible d'être mise sous la forme (75) de Stieltjes, car pour qu'il en soit ainsi il est précisément nécessaire et suffisant que la fonction associée de cette fonction soit aussi une fonction absolument monotone sur le demiaxe négatif. En appliquant la formule (78) on peut d'ailleurs déterminer la fonction $\psi_1(t)$ telle que

$$\Phi(z) = \int_0^\infty e^{tz}\, d\psi_1(t), \tag{79}$$

si $\Phi(z)$ est donnée par formule (75). Dans ce cas, la formule (77) prend la forme

$$A(y) = \frac{1}{2}\int_0^\infty \left[\frac{1}{1-tyi} + \frac{1}{1+tyi}\right] d\psi(t) = \int_0^\infty \frac{d\psi(t)}{1+t^2y^2},$$

d'où

$$\psi_1(t_1) - \psi_1(t_0) = \frac{1}{\pi}\int_0^\infty\int_{-\infty}^\infty \frac{(\sin t_1 y - \sin t_0 y)}{y(1+t^2y^2)}\, d\psi(t)\, dy. \tag{80}$$

D'autre part, on peut construire une fonction absolument monotone $\Phi_1(z)$ qui aura comme fonction associée $\Phi(z)$ et dont les dérivées successives à l'origine seront $F^{(n)}(0)\cdot(n!)^2$, en posant

$$\Phi_1(z) = \int_0^\infty \Phi(xz)\, e^{-x}\, dx = \int_0^\infty\int_0^\infty \frac{e^{-x}\, d\psi(t)\, dx}{1-xtz}.$$

En opérant de la même façon sur $\Phi_1(z)$ et ainsi de suite, on pourra construire ainsi des fonctions absolument monotones $\Phi_p(z)$ dont les dérivées à l'origine seront $F^{(n)}(0)\cdot(n!)^{p+1}$.

§ 15. *Fonctions exponentiellement convexes et le problème genéral des moments.* Nous dirons qu'une fonction $F(z)$ est *exponentiellement convexe* dans l'intervalle $(-b, a)$, où $b \geq 0$, $a \geq 0$, si elle satisfait aux conditions (33) du § 6, quel que soit $\delta \gtrless 0$ et le nombre entier $\varkappa$, pourvu que les points $2\varkappa\delta$, $(2\varkappa+1)\delta$ ne sortent pas de l'intervalle considéré.

En supposant $F(0) > 0$, il est aisé d'en déduire que l'on a nécessairement

$$\begin{gathered} \Delta_2 F(0) = F(2\delta) - 2F(\delta) + F(0) \geq 0 \text{ et, en général,} \\ \Delta_{2\varkappa} F(0) = F(2\varkappa\delta) - 2\varkappa F((2\varkappa-1)\delta) + \cdots + F(0) \geq 0. \end{gathered} \tag{81}$$

Pour le montrer il suffit de constater que, d'après (33), la forme quadratique

$$P = \sum_{l=0}^{l=\varkappa} \sum_{m=0}^{m=\varkappa} F((l+m)\delta)\, x_l x_m$$

est positive, quels que soient les valeurs des variables réelles $x_0, x_1, \ldots, x_\varkappa$; or, en posant $x_0 = 1$, $x_1 = -\varkappa, \ldots, x_l = (-1)^l C_\varkappa^l, \ldots,\ x_\varkappa = (-1)^\varkappa$, et en remarquant que $\sum_{=0}^{l=\varkappa} (-1)^l C_\varkappa^l \cdot (-1)^{n-l} C_\varkappa^{n-l} = (-1)^n C_{2\varkappa}^n$, quel que soit $n \leq 2\varkappa$, on voit que la forme quadratique P se réduit alors précisément à $\Delta_{2\varkappa} F(0)$. Les mêmes inégalités devant manifestement avoir lieu, si au lieu de $\Delta_{2\varkappa} F(0)$ on prend $\Delta_{2\varkappa} F(h\delta)$, où h est un nombre entier quelconque (pourvu qu'on ne sorte pas de l'intervalle $(-b, a)$), on en conclut[1] que la fonction $F(x)$ est indéfiniment dérivable et même analytique à l'intérieur de l'intervalle considéré et on a en tous ses points

$$F^{(2\varkappa)}(x) \geq 0. \tag{82}$$

Du moment que l'existence des dérivées successives est établie, on déduit immédiatement de (33), en faisant tendre δ vers 0, que, si $F(x)$ est exponentiellement convexe dans l'intervalle $(-b, a)$, où $b > 0$, $a > 0$, on a nécessairement

$$(F(0), F''(0), \ldots, F^{(2\varkappa)}(0)) \geq 0, \text{ quel que soit } \varkappa. \tag{83}$$

Dans le cas, où l'une des quantités b ou a serait nulle, la fonction $F(x)$ pourrait ne pas avoir de dérivées finies à l'origine, mais tant que celles-ci exi-

---

[1] Voir la Note de mes »Leçons sur les propriétés extrémales etc.» page 191 et suiv.

stent, elles doivent aussi évidemment satisfaire aux inégalités (83).[1] Il y a lieu de signaler que les fonctions exponentiellement convexes appartiennent, d'après ce qui précède, à une classe plus étendue de fonctions dont les dérivées d'ordres pairs sont non négatives dans un intervalle donné, auxquelles il convient de donner le nom de fonctions *absolument convexes.* Mais actuellement nous n'avons pas besoin de nous occuper de la classe la plus générale des fonctions absolument convexes. Revenons donc aux fonctions exponentiellement convexes et démontrons le

Théorème M. *Toute fonction exponentiellement convexe $F(x)$ sur le segment* $(0, c)$ *est la limite de polynômes exponentiels* $f_{2h}(x) = \sum_{i=1}^{h} A_i e^{\alpha_i x}$, *où* $A_i > 0$ *et* α_i *sont des nombres réels, qui convergent uniformément vers* $F(x)$ *pour toutes les valeurs réelles de* x, *où* $F(x)$ *reste analytique* (les extrémités de cet intervalle comprises, si $F(x)$ y est finie).

La démonstration résulte du même procédé d'interpolation qui nous a servi pour établir le théorème E du premier Chapitre.

Construisons, en effet, le polynôme exponentiel $f_{2h}(x) = \sum_{i=1}^{h} A_i e^{\alpha_i x}$ qui se confond avec $F(x)$ aux points $0, \frac{c}{2h}, \ldots, \frac{(2h-1)c}{2h}$. En posant $e^{\frac{\alpha_i c}{2h}} = \lambda_i$, nous avons à résoudre le système

$$\begin{aligned} A_1 + A_2 + \cdots\cdots + A_h &= F(0) \\ A_1 \lambda_1 + \cdots\cdots\cdots + A_h \lambda_h &= F\left(\frac{c}{2h}\right) \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ A_1 \lambda_1^{2h-1} + \cdots\cdots\cdots + A_h \lambda_h^{2h-1} &= F\left(\frac{(2h-1)c}{2h}\right). \end{aligned} \tag{84}$$

Comme à l'endroit indiqué, nous remarquons que ce système détermine d'une façon unique les valeurs $A_i > 0$, $\lambda_i > 0$. Seulement nous ne pouvons plus, naturellement, appliquer le corollaire 2 du § 5 pour en tirer une limite supérieure

[1] Il est aisé de vérifier que, si le signe d'égalité a lieu pour une valeur de x, il subsiste pour toutes les valeurs supérieures, et $F(x)$ se réduit alors à un polynôme exponentiel.

de λ_i; donc *a priori* a_i peut prendre toutes les valeurs *réelles*. La fonction $f_{2h}(x)$, étant aussi exponentiellement convexe, aura, au plus, un minimum dans l'intervalle (o, c), elle tendra donc uniformément vers $F(x)$ dans cet intervalle.

Donc d'après les considérations indiquées au début de ce Chapitre, on pourra présenter $F(x)$ dans l'intervalle (o, c) sous la forme

$$F(x) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{tx}\, d\psi(t), \tag{85}$$

où $\psi(t)$ est une fonction non décroissante, lorsque t varie de $-\infty$ à $+\infty$. En d'autres termes,

$$F(x) = f(x) + f_1(-x),$$

où

$$f(x) = \int_0^{\infty} e^{tx}\, d\psi(t), \quad f_1(x) = \int_0^{\infty} e^{tx}\, d\psi_1(t), \tag{86}$$

la première de ces fonctions étant absolument monotone de $-\infty$ jusqu'à $c > 0$ et la seconde depuis $-\infty$ jusqu'à o, au moins. Or, soit $x_0 < 0$, pour fixer les idées, tel que $F(x)$ est analytique sur le segment $(x_0, 0)$. Alors $f(x)$ étant également holomorphe dans cet intervalle, il en sera de même de

$$f_1(-x) = F(x) - f(x);$$

donc la fonction absolument monotone $f_1(x)$ étant susceptible, d'après ce qui précède, d'une seule représentation sous la forme (72), l'intégrale correspondante aura un sens jusqu'à $x = -x_0$. Le même raisonnement pouvant être fait pour $x_0 > c$ également, nous en concluons que les expressions (86) et (85) sont valables dans tout l'intervalle, où $F(x)$ est analytique. C. q. f. d.[1]

Corollaire. *Si la fonction $F(x)$ est exponentiellement convexe dans un intervalle aussi petit que l'on veut, elle est aussi exponentiellement convexe sur tout le segment réel, où elle est analytique; de plus, $F(z)$ est holomorphe dans toute la bande du plan complexe comprise entre les deux perpendiculaires élevées aux extrémités de ce dernier segment.*

---

[1] On pourrait aussi arriver à la même conclusion, en appliquant les considérations de la page 20.

Ce corollaire peut être complété de la façon suivante: *Si le rayon de convergence de*

$$F(x) = F(0) + F'(0)\,x + \cdots + F^{(n)}(0)\frac{x^n}{n!} + \cdots \tag{87}$$

est égal à R, et que l'on ait, quel que soit $\varkappa$,

$$(F(0),\ F''(0), \ldots, F^{(2\varkappa)}(0)) \geq 0 \tag{83}$$

la fonction $F(x)$ est exponentiellement convexe à l'intérieur d'un segment, dont l'une des extrémités est $\pm R$ et l'autre est $\mp b$, où $b \geq R > 0$.

Pour abréger nous ne nous arrêterons pas sur la démonstration directe de cette proposition qui résultera, comme conséquence du théorème plus général suivant:

Théorème N. *Si $F(0)$, $F'(0), \ldots, F^{(n)}(0), \ldots,$ satisfont aux inégalités* (83), *quel que soit $\varkappa$, il existe au moins une fonction $F(z)$ répondant à ces données initiales admettant des dérivées finies de tous les ordres sur l'axe imaginaire.*

En effet, le système

$$\begin{array}{l} A_1 + A_2 + \cdots + A_h \qquad\qquad = F(0) \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ A_1\,\alpha_1^{2h-1} + \cdots\cdots\cdots + A_h\,\alpha_h^{(2h-1)} = F^{(2h-1)}(0) \end{array}$$

admet un système de solutions où $A_\varkappa > 0$ et $\alpha_\varkappa$ sont des nombres réels. Par conséquent, le polynôme exponentiel

$$f_{2h}(z) = \sum_{\varkappa=1}^{h} A_\varkappa\, e^{\alpha_\varkappa z}$$

satisfait aux $2h$ conditions initiales $f_{2h}(0) = F(0), \ldots, f_{2h}^{(2h-1)}(0) = F^{(2h-1)}(0)$; de plus on a sur l'axe imaginaire, pour $z = yi$.

$$f_{2h}(yi) = \sum_{\varkappa=1}^{h} A_\varkappa \cos\alpha_\varkappa y + i\sum_{\varkappa=1}^{h} A_\varkappa \sin\alpha_\varkappa y = P_{2h}(y) + i\,Q_{2h}(y), \tag{88}$$

$P_{2h}(y)$ et $Q_{2h}(y)$ satisfaisant pour toutes les valeurs réelles de y aux inégalités

$$\begin{aligned} &|P_{2h}(y)| \leq F(0), \ |Q_{2h}(y)| \leq F(0), \\ &|P_{2h}^{(n)}(y)| \leq F^{(n)}(0), \ |Q_{2h}^{(n)}(y)| \leq F^{(n)}(0). \quad (n = 2k < 2h) \end{aligned} \tag{89}$$

Donc[1], en choisissant convenablement les indices croissants h, tels que

$$\begin{aligned} &\lim_{h=\infty} P_{2h}(y) = P(y), \qquad \lim_{h=\infty} P_{2h}^{(n)}(y) = P^{(n)}(y) \\ &\lim_{h=\infty} Q_{2h}(y) = Q(y), \qquad \lim_{h=\infty} Q_{2h}^{(n)}(y) = Q^{(n)}(y), \end{aligned} \tag{90}$$

on construira une fonction $F(z)$ qui pour toute valeur de $z = yi$ sera égale à

$$F(yi) = P(y) + i\,Q(y) \tag{91}$$

et satisfera aux conditions initiales données. C. q. f. d.

On pourra, en outre, affirmer, en tenant compte de ce que (pour n pair)

$$|F^{(n)}(y)| < F^{(n)}(0),$$

que la fonction $F(z)$, dont l'existence vient d'être prouvée, sera unique, non seulement lorsque la série (87) admet un rayon de convergence $R > 0$ et représente ainsi une fonction exponentiellement convexe de la variable réelle x mais dans le cas également, où la condition de quasianalyticité de M. Carleman

$$\sum \frac{1}{\sqrt[n]{F^{(n)}(0)}} \longrightarrow \infty$$

est remplie.

En utilisant l'intégrale de Stieltjes, on pourra, dans tous les cas, mettre $P(y)$ et $Q(y)$ sous la forme: $P(y) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \cos ty\, d\psi(t)$, $Q(y) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \sin ty\, d\psi(t)$ et on aura l'expression

[1] Pour $x \gtrless 0$ réel on a $f_{2h}(x) \leq f_{2h+2}(x)$; par conséquent, $f_{2h}(x)$ croîtra indéfiniment pour $x = x_0$ ou bien tendra vers une fonction exponentiellement convexe sur tout le segment $(0, x_0)$. Le rayon de convergence R de la série (87) est donc déterminé par la propriété que, si $|x_0| < R$, on peut toujours fixer un nombre L, tel que $f_{2h}(\pm x_0) < L$, et que cela n'est plus possible, si $|x_0| > R$.

$$F(z) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{tz}\, d\psi(t) \tag{92}$$

qui sera, en tout cas, valable pour $z = yi$.

Comme au § 14, on vérifie que la fonction $F(z)$ étant donnée sur l'axe imaginaire, la fonction non décroissante $\psi(t)$ se trouve déterminée sans ambiguité (en tous ses points de continuité). On a, en effet, $t_1 > t_0$ étant deux points de continuité,

$$\begin{aligned}\psi(t_1) - \psi(t_0) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-L}^{M}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin(t-t_0)y + \sin(t_1 - t)y}{y}\, d\psi(t)\, dy = \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{-L}^{M}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos ty\,[\sin t_1 y - \sin t_0 y] + \sin ty\,[\cos t_0 y - \cos t_1 y]}{y}\, d\psi(t)\, dy\,,\end{aligned} \tag{93}$$

quels que soient $M > t_1$ et $-L < t_0$. En faisant $L = M = \infty$, l'intégrale a donc un sens, et, puisqu'il en est de même de l'intégrale

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos ty\,[\sin t_1 y - \sin t_0 y]}{y}\, d\psi(t)\, dy = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{P(y)\,[\sin t_1 y - \sin t_0 y]}{y}\, dy$$

qui est égale à

$$\frac{1}{2}\,[\psi(t_1) - \psi(-t_1) - \psi(t_0) + \psi(-t_0)]$$

ou à

$$\frac{1}{2}\,[\psi(t_1) - \psi(-t_1) + \psi(t_0) - \psi(-t_0)],$$

suivant que $t_0 > 0$ ou $t_0 < 0$, on en conclut que l'intégrale

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin ty\,[\cos t_0 y - \cos t_1 y]}{y}\, d\psi(t)\, dy = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{Q(y)\,[\cos t_0 y - \cos t_1 y]}{y}\, dy$$

a également un sens. Donc,

$$\psi(t_1) - \psi(t_0) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{P(y)(\sin t_1 y - \sin t_0 y) + Q(y)(\cos t_0 y - \cos t_1 y)}{y}\, dy. \tag{94}$$

Ainsi, en remarquant que, d'après ce qui précède, $F^{(n)}(0) = \int_{-\infty}^{\infty} t^n\, d\psi(t)$, nous retrouvons le résultat important suivant dû à M. Carleman:

Le problème général des moments admet une solution unique, si $\sum \frac{1}{\sqrt[n]{F^{(n)}(0)}} \longrightarrow \infty$.

Il est aisé de déduire de là avec M. Carleman la conséquence suivante relative au problème des moments de Stieltjes.

Pour que le problème des moments de Stieltjes soit susceptible d'une solution unique il suffit que la série $\sum \frac{1}{\sqrt[2n]{F^{(n)}(0)}}$ *soit divergente* ce qui est équivalent à la proposition suivante:

Si $f(0), \ldots, f^{(n)}(0), \ldots,$ *satisfont aux inégalités* (18), *il suffit que* $\sum \frac{1}{\sqrt[2n]{f^{(n)}(0)}}$ *soit divergente pour qu'il n'existe qu'une seule fonction absolument monotone* $f(x)$ *sur le demiaxe négatif répondant à ces conditions initiales.* (Les données sont dans ce cas *complètement régulières.*)