

Remarques sur L'Apparition de Singularités dans les Ecoulements Euleriens Compressibles

Jean-Yves Chemin

Centre de Mathématiques, Ecole Polytechnique, F-91128 Palaiseau Cedex, France
Unité de Recherche Associée au C.N.R.S. n° D 0169

Received May 10, 1989; in revised form August 28, 1989

Abstract. We recall some basic facts about the breakdown of smoothness in general hyperbolic systems and then, we prove that the breakdown of smoothness in an Euclidean flow comes from an accumulation of vorticity, divergence or compression.

Dans ce travail, on se propose de décrire comment les dérivées explosent lors de l'apparition de singularités fortes dans les équations d'Euler d'un fluide compressible. Pour la clarté des énoncés, on supposera le fluide isentropique. On est conduit au système suivant

$$(E) \begin{cases} (E_0) \partial_t \varrho + v \cdot \nabla \varrho + (\bar{\varrho} + \varrho) \operatorname{div} v = 0 \\ (E_i) \partial_t v_i + v \cdot \nabla v_i + \frac{1}{\bar{\varrho} + \varrho} \partial_{x_i} p(\bar{\varrho} + \varrho) = 0 \quad i \in \{1, \dots, n\} \\ (E_{n+1}) \partial_t \sigma + v \cdot \nabla \sigma = 0 \end{cases}$$

où $n \geq 2$, $\bar{\varrho}$ désigne un réel strictement positif, et p une fonction de $\mathbf{R}_+ \times \mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}_+$ telle que $\frac{\partial p}{\partial \varrho}(\varrho, \sigma)$ pour tout (ϱ, σ) de $\mathbf{R}_+^* \times \mathbf{R}$.

On considère les données initiales $(\varrho_0, v_0, \sigma_0)$ dans l'espace de Sobolev H^s avec $s > \frac{n}{2} + 1$, telles que, pour tout $x \in \mathbf{R}^n$, $\bar{\varrho} + \varrho_0(x)$ soit strictement positif.

On introduit les notations suivantes

- S_v et Ω_v désignent respectivement les parties symétrique et antisymétrique de la matrice $dv = \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} \right)_{1 \leq i, j \leq n}$; ce sont respectivement les tenseurs dits de déformation et de tourbillon.

- $c = \left(\frac{\partial p}{\partial \varrho} \right)^{\frac{1}{2}}$, $c(\bar{\varrho} + \varrho(t, x), \sigma(t, x))$ est la vitesse du son au point x , à l'instant t .

Il est bien connu (voir par exemple [3]), qu'il existe des solutions régulières à temps petit pour le système (E). Mais des singularités peuvent apparaître. T. Sidéris, dans [6], a démontré que, si $p(\varrho, \sigma) = A\varrho^\gamma e^\sigma$, avec $\gamma \in \left]1, 1 + \frac{2}{n}\right]$ (c'est le modèle des gaz parfaits), et si ϱ_0, v_0 et σ_0 sont à support compact, il n'y a pas de solution régulière globale, sous certaines conditions intégrales reliant $\bar{\varrho}, \varrho_0, v_0$ et σ_0 .

Cependant, contrairement à la dimension un, (voir [2]), il existe des solutions globales pour des données de Cauchy ϱ_0 et v_0 non nulles. En effet, soit f une fonction de $C_0^\infty(\mathbf{R}_+)$, on pose

$$g(x) = C + \int_0^x y^2 f^2(y) c^{-2}(y) dy \quad \text{avec } C > 0.$$

Il est trivial de vérifier que

$$\varrho_0(x) = g(x_1^2 + x_2^2), \quad v_0(x) = (f(x_1^2 + x_2^2)x_2, -f(x_1^2 + x_2^2)x_1), \quad \text{et } \sigma_0 = 0$$

constituent une solution stationnaire de (E) pour $n = 2$.

Avant de poursuivre, rappelons le résultat bien connu sur l'apparition de singularités dans les systèmes hyperboliques symétrisables généraux; considérons une fonction U de $C([0, T^*]; H^s)$, avec $s > \frac{n}{2} + 1$, qui soit une solution maximale du système hyperbolique symétrisable

$$(S) \quad \partial_t U + A(U) \nabla U = 0,$$

où A est de classe C^∞ sur $\mathbf{R}^N$, alors, ou bien $T^* = +\infty$, ou bien $T^* < \infty$, et alors

$$\int_0^{T^*} (\|\partial_t U(t, \cdot)\|_{L^\infty} + \|\nabla U(t, \cdot)\|_{L^\infty}) dt = +\infty.$$

Nous rappelons brièvement la démonstration, très simple, de ce résultat. Supposons que l'on ait:

$$\int_0^{T^*} (\|\partial_t U(t, \cdot)\|_{L^\infty} + \|\nabla U(t, \cdot)\|_{L^\infty}) dt < +\infty \quad \text{et} \quad T^* < +\infty. \quad (1)$$

Le fait que $\int_0^{T^*} (\|\partial_t U(t, \cdot)\|_{L^\infty} dt$ soit finie entraîne que U est bornée sur

$[0, T^*] \times \mathbf{R}^n$. L'estimation hyperbolique (voir [3]), entraîne alors:

$$\frac{d}{dt} \|U(t, \cdot)\|_{H^s}^2 \leq C \|U(t, \cdot)\|_{H^s}^2 (\|\partial_t U(t, \cdot)\|_{L^\infty} + \|\nabla U(t, \cdot)\|_{L^\infty}). \quad (2)$$

Donc, d'après (1) et le lemme de Gronwall, on a $U \in L^\infty([0, T^*]; H^s)$. En utilisant (S), il apparaît que $\partial_t U \in L^\infty([0, T^*]; H^{s-1})$. Ces deux résultats entraînent que $U(t, \cdot)$ vérifie une condition de Cauchy dans $H^{s'}$ pour tout $s' < s$. Il existe donc une fonction $U(T^*, \cdot)$ appartenant à H^s , telle que $U(t, \cdot)$ tende vers $U(T^*)$ fortement dans $H^{s'}$, pour tout $s' < s$, lorsque t tend vers T^* . Le théorème d'existence et d'unicité locale de solution régulière contredit alors la maximalité de la solution U .

Dans le cas particulier où A est globalement lipschitzienne, on a:

Proposition. Soit U solution maximale de classe $C([0, T^*]; H^s)$ de (S), avec $s > \frac{n}{2} + 1$; Si A est globalement lipschitzienne, alors, on a l'alternative suivante:

- ou bien $T^* = +\infty$
- ou bien $T^* < +\infty$ et alors $\int_0^{T^*} \|\nabla U(t, \cdot)\|_{L^\infty} dt = +\infty$.

Démonstration. Le fait que A soit lipschitzienne assure que l'on a

$$|\partial_t U(t, x)| \leq (C_1 |U(t, x)| + C_2) |\nabla U(t, x)|. \quad (3)$$

En posant $M(t, t_0) = \|U\|_{L^\infty([t_0, t] \times \mathbb{R}^n)}$, on a, par intégration de (3):

$$M(t, t_0) \leq \|U(t_0, \cdot)\|_{L^\infty} + (C_1 M(t, t_0) + C_2) \int_{t_0}^t \|\nabla U(t, \cdot)\|_{L^\infty} dt. \quad (4)$$

Si l'on suppose que $T^* < \infty$ et que $\int_0^{T^*} \|\nabla U(t, \cdot)\|_{L^\infty} dt < +\infty$, alors si $T^* - t_0$ est assez petit, l'inégalité (4) assure que $M(t, t_0)$ est bornée pour $t \geq t_0$, donc que U l'est. L'inégalité (3) nous ramène au cas précédent. ■

Exemple. Supposons le système isentropique [i.e. $\sigma_0(x) = 0$] et relatif à un gaz parfait [i.e. $p(\varrho) = \varrho^\gamma$]. Procédons à la symétrisation de Makino-Ukai-Kawashima (voir [4]), en considérant la vitesse du son comme inconnue. On obtient alors le système suivant:

$$(ES) \begin{cases} \partial_t c + v \cdot \nabla c + \frac{\gamma - 1}{2} c \operatorname{div} v = 0 \\ \partial_t v_i + v \cdot \nabla v_i + \frac{2\gamma}{\gamma - 1} c \partial_{x_i} c = 0. \end{cases}$$

Le système (ES) est bien du type traité par la proposition précédente.

Notre but est de préciser quelles sont les quantités qui, dans le cas particulier des équations d'Euler, explosent nécessairement lors de l'apparition de singularités, c'est-à-dire celles qu'il suffit de contrôler pour l'éviter.

Théorème. Soit $(\varrho, v, \sigma) = U$ appartenant à $C([0, T^*]; H^s)$ une solution maximale du système (E), alors on a:

- ou bien $T^* = +\infty$
- ou bien $T^* < +\infty$ et $\int_0^{T^*} (\|\operatorname{div} v(t, \cdot)\|_{L^\infty} + \|\Omega_v(t, \cdot)\|_{L^\infty} + \|\nabla \varrho(t, \cdot)\|_{L^\infty} + \|\nabla \sigma(t, \cdot)\|_{L^\infty}) dt = +\infty$.

Supposons le fluide isentropique. En dérivant les équations $(E_1) - (E_n)$, on obtient

$$(DE) \begin{cases} \partial_t (dv) + v \cdot \nabla (dv) + (dv)^2 + S(\varrho) = 0 \\ \text{avec } (S(\varrho))_{i,j} = -\frac{p'(\varrho + \bar{\varrho})}{(\bar{\varrho} + \varrho)^2} \partial_{x_j} \varrho \partial_{x_i} \varrho + \frac{1}{(\bar{\varrho} + \varrho)} p''(\bar{\varrho} + \varrho) \partial_{x_i} \partial_{x_j} \varrho. \end{cases}$$

La matrice $S(\varrho)$ étant symétrique, en prenant la partie antisymétrique de (DE), il vient

$$\partial_t \Omega_v + v \cdot \nabla \Omega_v + S_v \Omega_v + \Omega_v S_v = 0. \quad (5)$$

Un calcul trivial montre, qu'en dimension deux, on a

$$\partial_t \Omega_v + v \nabla \Omega_v + (\operatorname{div} v) \Omega_v = 0. \quad (5')$$

Il en résulte les deux corollaires suivants:

Corollaire 1. *Si le fluide est isentropique:*

- Ou bien $T^* = +\infty$,
- ou bien $T^* < +\infty$ et $\int_0^{T^*} (\|S_v(t, \cdot)\|_{L^\infty} + \|\nabla \varrho(t, \cdot)\|_{L^\infty}) dt = +\infty$.

Corollaire 2. *Dans le cas particulier où $n = 2$, si le fluide est isentropique, on a:*

- Ou bien $T^* = +\infty$,
- ou bien $T^* < +\infty$ et $\int_0^{T^*} (\|\operatorname{div} v(t, \cdot)\|_{L^\infty} + \|\nabla \varrho(t, \cdot)\|_{L^\infty}) dt = +\infty$.

Ce théorème et ses deux corollaires sont des généralisations de résultats obtenus par Beale, Kato et Majda dans [1], Ponce dans [5]. Il signifie que, pour empêcher l'apparition de singularités dans un fluide compressible isentropique en dimension trois, il suffit d'empêcher l'accumulation de compression (ou de

détente), c'est-à-dire d'assurer que $\int_0^{T^*} (\|\operatorname{div} v(t, \cdot)\|_{L^\infty} + \|\nabla \varrho(t, \cdot)\|_{L^\infty}) dt$ reste finie, et, comme dans le cas incompressible, (voir [1]), l'accumulation de tourbillon, c'est-à-dire d'assurer que $\int_0^{T^*} (\|\Omega_v(t, \cdot)\|_{L^\infty}) dt$ reste finie. Dans le cas de la dimension deux, vu qu'il y a existence globale pour le système d'Euler incompressible, le corollaire 2 signifie que, pour empêcher l'apparition de singularités, il suffit d'empêcher l'accumulation de compression ou de détente.

Démonstration du théorème. Soit F_n la solution fondamentale du Laplacien sur $\mathbf{R}^n$; un calcul élémentaire assure que l'on a

$$v = \nabla F_n * \operatorname{div} v + \Omega_v * \nabla F_n. \quad (6)$$

Le point clé est alors le lemme suivant, qui est une amélioration d'une inégalité de [1].

Lemme. *Pour tout $s > \frac{n}{2} + 1$, il existe $C > 0$ tel que, pour tout $q \geq 1$, si $A = \operatorname{div} v$ ou si $A = \Omega_v$, on ait*

$$\left\| \nabla \int A(y) \cdot \frac{x-y}{|x-y|^n} dy \right\|_{L^\infty} \leq C \{ \|v\|_{L^q} + (1 + \operatorname{Log}^+(\|v\|_{H^s}/\|A\|_{L^\infty})) \|A\|_{L^\infty} \}$$

avec $\operatorname{Log}^+ x = \operatorname{Sup}(\operatorname{Log} x, 0)$.

Démonstration. On suit une méthode très proche de celle utilisée dans [1]. Soit ψ une fonction $C_0^\infty(\mathbf{R}^n)$, supportée dans la boule de centre 0 et de rayon 2, et valant 1 près de la boule de centre 0 et de rayon 1, et à valeurs dans l'intervalle $[0, 1]$, on pose $\psi_h(x) = \psi(\frac{x}{h})$, on décompose l'intégrale en somme de deux termes comme suit:

$$u(x) = \int A(y) \frac{x-y}{|x-y|^n} dy = u_{1,h}(x) + u_{2,h}(x) \quad (7)$$

avec

$$u_{1,h}(x) = \int A(y) \frac{x-y}{|x-y|^n} \psi_h(x-y) dy, \quad (8)$$

et

$$u_{2,h}(x) = \int A(y) \frac{x-y}{|x-y|^n} (1-\psi_h)(x-y) dy. \quad (9)$$

Pour majorer $\|u_{1,h}\|_{L^\infty}$, on considère un réel ε de l'intervalle $]0, 1[$ et on pose $\frac{1}{p} = \frac{n-1+\varepsilon}{n}$. L'inégalité de Hölder assure que, si $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$, on a

$$\|\nabla u_{1,h}\|_{L^\infty} \leq \|\psi_h\| \cdot | \cdot |^{-(n-1)} \|A\|_{L^{p'}}. \quad (10)$$

Le fait que H^σ soit continûment inclus dans L^λ pour $\sigma > n \frac{\lambda-2}{2\lambda}$ assure que $\|\nabla A\|_{L^{p'}} \leq C \|A\|_{H^{s-1}}$.

Il en résulte que l'on a

$$\|\nabla u_{1,h}\|_{L^\infty} \leq h^\varepsilon \|v\|_{H^s}. \quad (11)$$

La majoration de $\|\nabla u_{2,h}\|_{L^\infty}$ doit être un peu plus fine.

La formule de Leibniz assure que $\nabla u_{2,h} = u'_{2,h} + u''_{2,h}$ avec

$$u'_{2,h}(x) = \int A(y) \nabla \left(\frac{x-y}{|x-y|^n} \right) (1-\psi_h)(x-y) dy, \quad (12)$$

avec

$$u''_{2,h}(x) = \int A(y) \frac{x-y}{|x-y|^n} \nabla \psi_h(x-y) dy. \quad (13)$$

La majoration de $\|u''_{2,h}\|_{L^\infty}$ est sans problème:

$$\|u''_{2,h}\|_{L^\infty} \leq \frac{1}{h} \left(\int_{h \leq |x| \leq 2h} |x|^{-n+1} dx \right) \|A\|_{L^\infty}. \quad (14)$$

Par contre, pour majorer $\|u'_{2,h}\|_{L^\infty}$, une nouvelle troncature est nécessaire; soit K un réel tel que l'on ait $\|A\|_{L^\infty} \leq K \|v\|_{H^s}$, on suppose que $h \leq K_\varepsilon = \left(\frac{K}{\varepsilon} \right)^{\frac{1}{\varepsilon}}$ et alors on pose: $u'_{2,h} = v'_{2,h} + v''_{2,h}$ avec

$$v'_{2,h}(x) = \int A(y) \nabla \left(\frac{x-y}{|x-y|^n} \right) (1-\psi_{K_\varepsilon})(1-\psi_h)(x-y) dy, \quad (15)$$

$$v''_{2,h}(x) = \int A(y) \nabla \left(\frac{x-y}{|x-y|^n} \right) \psi_{K_\varepsilon}(1-\psi_h)(x-y) dy. \quad (16)$$

Par exemple, dans le cas où $A = \operatorname{div} v$ (le cas où $A = \Omega_v$, bien sûr strictement analogue, est laissé au lecteur) on a, par une intégration par parties,

$$v'_{2,h}(x) = \int v_i(y) \partial_{x_i} \left\{ (1-\psi_k)(1-\psi_h)(x-y) \nabla \left(\frac{x-y}{|x-y|^n} \right) \right\} dy$$

d'où

$$\begin{aligned} \|v'_{2,h}\|_{L^\infty} &\leq \sum_i \int |v_i(y)| |x-y|^{-n-1} (1-\psi_K)(x-y) dy \\ &\quad + \int_{K_\varepsilon \leq |x-y| \leq 2K_\varepsilon} |v_i(y)| |x-y|^{-n} dy. \end{aligned}$$

Le fait que $|x|^{-n-1}$ appartiennent à $L^1 \cap L^\infty(\mathbf{R}^n \setminus B(0, 1))$ et $|x|^{-n}$ à $L^\infty(B(0, 2K_\varepsilon) \setminus B(0, K_\varepsilon))$ assure l'existence d'un réel C_ε tel que, pour tout $q \geq 1$, on ait

$$\|v'_{2,h}\|_{L^\infty} \leq C_\varepsilon \|v\|_{L^q}. \quad (17)$$

De plus, $\|v''_{2,h}\|_{L^\infty} \leq \|A\|_{L^\infty} \int_{h \leq |x| \leq 2K_\varepsilon} |x|^{-n} dx$, d'où

$$\|v''_{2,h}\|_{L^\infty} \leq (C_\varepsilon - \text{Log } h) \|A\|_{L^\infty}. \quad (18)$$

Donc, d'après (11)–(18), on a, pour tout $h \leq K_\varepsilon$,

$$\|\nabla u\|_{L^\infty} \leq C_\varepsilon \|v\|_{L^q} + (C_\varepsilon - \text{Log } h) \|A\|_{L^\infty} + h^\varepsilon \|v\|_{H^s}. \quad (19)$$

Il suffit de minimiser le terme de droite de (19) pour obtenir le lemme. On peut maintenant achever la démonstration du théorème. Posons

$$W(t) = \|\Omega_0(t, \cdot)\|_{L^\infty} + \|\text{div } v(t, \cdot)\|_{L^\infty} + \|\nabla \varrho(t, \cdot)\|_{L^\infty} + \|\nabla \sigma(t, \cdot)\|_{L^\infty}$$

et supposons

$$\int_0^{T^*} W(t) dt < +\infty. \quad (20)$$

D'après (E_0) , on a :

$$\bar{\varrho} + \varrho(t, x) = (\bar{\varrho} + \varrho(0, \exp(-tv)(x))) e^{-\int_0^t \text{div}(\tau, \exp(-\tau v)(x)) d\tau}, \quad (21)$$

donc, il existe un compact de $\mathbf{R}_+^*$ contenant $\varrho([0, T^*] \times \mathbf{R}^n)$.

Grâce aux relations $(E_1) - (E_n)$ et au fait que $\int_0^{T^*} \|\nabla \varrho(t, \cdot)\|_{L^\infty} dt$ soit finie, il en résulte que v est bornée sur $[0, T^*] \times \mathbf{R}^n$.

Le système (E) assure alors que l'on a

$$\|\partial_t U(t, \cdot)\|_{L^\infty} \leq C \|\nabla U(t, \cdot)\|_{L^\infty}. \quad (22)$$

L'inégalité (2) assure alors

$$\frac{d}{dt} \|U(t, \cdot)\|_{H^s}^2 \leq C \|\nabla U(t, \cdot)\|_{L^\infty} \|U(t, \cdot)\|_{H^s}^2. \quad (23)$$

Le lemme permet alors, grâce à (5), d'améliorer (23) en

$$\frac{d}{dt} \|U(t, \cdot)\|_{H^s}^2 \leq (C_1 W(t) \text{Log } \|U(t, \cdot)\|_{H^s}^2 + C_2) \|U(t, \cdot)\|_{H^s}^2. \quad (24)$$

En posant $y(t) = \log \|U(t, \cdot)\|_{H^s}^2$, grâce à (24), il vient :

$$y'(t) \leq C_1 W(t) y(t) + C_2. \quad (25)$$

Il résulte du lemme de Gronwall et de (20) que $y(t)$ est majorée sur $[0, T^*]$, d'où le théorème.

Bibliographie

1. Beale, J.T., Kato, T., Majda, A.: Remarks on the breakdown of smooth solutions for the 3-D Euler equations. *Commun. Math. Phys.* **94**, 61–66 (1984)
2. Liu, T.P.: Development of singularities in the non-linear waves for quasi-linear hyperbolic partial differential equations. *J. Diff. Eq.* **33**, 92–111 (1979)
3. Majda, A.: Compressible fluid flow and systems of conservation laws. *Appl. Math. Sci.* **53** (1984)
4. Makino, T., Ukai, S., Kawashima, S.: Sur la solution à support compact de l'équation d'Euler compressible. *Jpn. J. Appl. Math.* **3**, 249–257 (1986)
5. Ponce, G.: Remarks on a paper by J. T. Beale, T. Kato, and A. Majda. *Commun. Math. Phys.* **98**, 349–353 (1985)
6. Sideris, T.: Formation of singularities in three dimensional compressible fluids. *Commun. Math. Phys.* **101**, 475–487 (1985)

Communicated by T. Spencer

