J. DIFFERENTIAL GEOMETRY
30 (1989) 395-424

IMMERSIONS ISOMÉTRIQUES ELLIPTIQUES ET COURBES PSEUDO-HOLOMORPHES

FRANÇOIS LABOURIE

De nombreux problèmes de type elliptique sur les surfaces reçoivent une interprétation en terme de géométrie complexe. Rappelons, par exemple, la représentation de Weierstrass pour les surfaces minimales ou les constructions twistorielles pour les applications harmoniques.

Dans cet article, nous nous intéresserons aux immersions isométriques elliptiques (ou localement convexes) d'une surface dans une variété de dimension 3. Par elliptique (resp. ε-elliptique), nous entendons simplement que le discriminant de la deuxième forme fondamentale est positif (resp. supérieur à un ε positif). Notre remarque initiale est que le 1-jet d'une telle immersion définit une courbe pseudo-holomorphe. Une telle interprétation va nous permettre de contrôler la façon dont dégénèrent ces immersions. L'un de nos outils fondamentaux est alors la généralisation du lemme de Schwarz par M. Gromov [2].

Contrôler la compacité de l'espace des solutions d'un problème elliptique est bien souvent l'un des points cruciaux de la démonstration de l'existence de telles solutions. Dans notre cas, nous avons, en particulier, obtenu le théorème d'existence d'immersions isométriques suivant:

Théorème A. *Soit M une variété simplement connexe de dimension 3 à courbure sectionelle inférieure où égale à K_0. Soit U un domaine orienté de la sphère muni d'une métrique complète et à courbure supérieure strictement à K_0. Il existe alors un plongement propre isométrique, qui respecte l'orientation, de U dans M. On peut par ailleurs imposer arbitrairement le 1-jet de notre plongement en un point.*

Ce théorème généralise un théorème connu lorsque M est à courbure constante [8, p. 38]. Il généralise également un théorème de Pogorelov dans le cas U compact (c'est à dire la sphère), et dont nous proposons une nouvelle démonstration, sensiblement plus courte:

Théorème B (*Pogorelov*). *Soit M une variété de dimension 3 à courbure sectionelle inférieure où égale à K_0. Soit S une surface orientée,*

Received September 1, 1987.

homéomorphe à la sphère et à courbure supérieure strictement à K_0. Il existe alors une immersion isométrique, qui respecte l'orientation, de S dans M. On peut par ailleurs imposer le 1*-jet de l'immersion en un point et, avec cette normalisation, l'immersion est unique.*

Traduire en terme de géométrie complexe s'avère également très utile pour traîter un autre problème classique pour les surfaces localement convexes, celui de la *rigidité infinitésimale.* Ce problème se réduit en effet à un calcul d'intersection. Nous obtenons en particulier une démonstration très rapide et élémentaire d'un autre théorème de Pogorelov, les définitions sont données en 7.1:

Théorème C (*Pogorelov*). *Une surface fermée localement convexe S d'une variété M de dimension* 3 *est infinitésimalement rigide dans les cas suivants:*

(i) *S est homéomorphe à la sphère et ancrée en un point et son espace tangent,*

(ii) *S est homéomorphe au projectif et ancrée en un point et une direction,*

(iii) *S est homéomorphe au tore ou à la bouteille de Klein et ancrée en un point,*

(iv) *la caractéristique d'Euler de S est négative.*

Remarquons que dans son énoncé original, Pogorelov se restreint au cas des surfaces orientables.

Enonçons maintenant les résultats sur la dégénérescence des immersions elliptiques. On se donne donc (f_n) une suite d'immersions ε-elliptiques d'une surface S dans une variété riemanienne (M, g) de dimension 3, telle que les métriques induites convergent C^∞ vers une métrique g_0. On suppose également que (f_n) converge C^0 vers une application f_0. Notre premier résultat exhibe un critère qui permet de faire converger C^∞ notre suite:

Théorème D. *Si l'intégrale de la courbure moyenne des $f_n(S)$ est uniformément majorée, (f_n) converge C^∞ sur tout compact vers une immersion isométrique f_0 de (S, g_0) dans (M, g).*

Les théorèmes de ce type exigent habituellement une borne uniforme sur la courbure moyenne. Notre deuxième résultat, nous permet de décrire la façon dont dégénère notre suite d'immersions:

Théorème E. *On suppose que la suite (f_n) ne converge pas C^∞ au voisinage d'un point x de S. Il existe alors une unique géodésique pour g_0, γ, passant par x, telle que f_0 est une isométrie de γ dans une géodésique de M.*

Réciproquement l'existence d'une telle géodésique entraine que (f_n) ne converge pas C^∞ au voisinage de x.

L'énoncé complet du théorème précise la façon dont la géodésique apparait (voir §6). Dans le cas ou M est à courbure constante, ce théorème se généralise aux hypersurfaces (voir [5]).

Donnons un exemple du phénomène décrit par ce théorème. On peut construire (voir [9]) une famille (f_n) d'immersions isométriques de la sphère moins deux points antipodaux dans $\mathbf{R}^3$. Chaque immersion f_n s'enroule alors n fois autour de l'axe des pôles, la limite étant un segment (Figure 1).

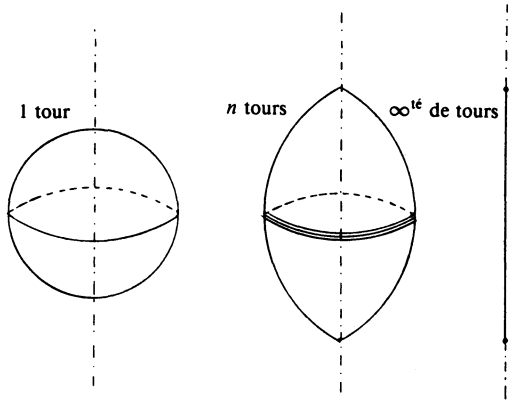

FIGURE 1

Remarquons, pour finir, que nous savons peu de choses sur les limites d'immersions isométriques en général. En grande codimension, toute application strictement contractante est limite C^0 d'immersions isométriques C^∞ [3, p. 21]. La situation est certainement bien différente en petite codimension. Par exemple, dans le cas des surfaces dans $\mathbf{R}^3$, une inégalité dûe à Burago et Shefel' fournit une obstruction pour une application contractante quelconque d'être limite C^0 d'immersions isométriques C^∞ [3, p. 284].

Cet article s'organise de la façon suivante:

1. Convergence d'applications pseudo-holomorphes.
2. Description pseudo-holomorphe des immersions isométriques.
3. Convergence des jets.
4. Preuve du Théorème D.
5. Voisinage et contrôle de l'intégrale de la courbure moyenne.
6. Preuve du Théorème E.
7. Preuve des théorème de Pogorelov.
8. Preuve du Théorème A.

Je tiens à remercier ici M. Gromov pour son intérêt constant pour ce travail et P. Pansu pour m'avoir longuement expliqué les détails de la démonstration du théorème de compacité des courbes cusps de M. Gromov.

1. Convergence d'applications pseudo-holomorphes

Dans cette section, nous allons, d'une part, rappeler un critère, le lemme de Schwarz (1.2), qui permet de faire converger une suite d'applications pseudo-holomorphes, et d'autre part, démontrer deux lemmes (1.6 et 1.8) qui nous permettent de décrire la limite.

Rappelons tout d'abord qu'une *structure presque complexe* sur une variété est la donnée d'un champ d'endormorphismes de carré -1 du fibré tangent. Une application *pseudo-holomorphe* entre deux variétés presque complexes est une application dont la différentielle commute avec les structures complexes. Enfin une *courbe pseudo-holomorphe* dans une variété presque complexe est une surface réelle dont le plan tangent est stable par rapport à la structure complexe.

1.1 Lemme de Schwarz. Nous allons extraire de la démonstration du théorème de compacité des courbes cusps de Gromov [2], le lemme fondamental qui nous sera utile par la suite.

Nous considérons une variété E munie d'une structure presque complexe J et d'une métrique hermitienne μ. Soit également g une application pseudo-holomorphe de D, le disque unité de $\mathbf{C}$, dans E. Le lemme est le suivant:

1.2 Lemme de Schwarz (*Gromov*). *Si $g(D)$ est incluse dans un compact de E calibré, c'est-à-dire sur lequel il existe une* 1*-forme β telle que*

$$d\beta(x, Jx) > 0.$$

Alors g a ses dérivées à tous les ordres, à l'origine, a priori majorées.

Ce lemme est le résumé de la première partie du théorème de compacité des courbes cusps de Gromov tel qu'il est exposé dans [7].

On peut trouver des compacts calibrés de la manière suivante: soit $F \to E$ un fibré, muni d'une connexion, sur une variété presque complexe E et dont la fibre est kälherienne. L'espace total est alors également une variété presque complexe. Si maintenant K est un compact de la fibre qui possède un voisinage, dans la fibre, dont le H^2 de de Rham est nul, K est alors calibré. Cette remarque et le lemme de Schwarz nous donnent un lemme, utilisé implicitement dans [7].

1.3 Lemma. *Soit $\pi: F \to E$ un fibré, muni d'une connexion, sur une variété presque complexe E et dont la fibre kälherienne. On munit l'espace total de la structure presque complexe induite. Soit ensuite (f_n) une suite d'applications pseudo-holomorphes de D dans F telle que*

(i) *$(\pi \circ f_n)$ converge,*

(ii) *$f_n(D)$ est inclus dans un compact K,*

(iii) *K possède un voisinage U, dont l'intersection avec chaque fibre est de H^2 de de Rham nul.*

Alors les dérivées des f_n sont uniformément majorées.

En fait, dans [7], on montre le lemme de Schwarz pour la première dérivée et l'on applique le lemme que nous venons d'énoncer (sur la première dérivée) à l'espace des jets. Ceci permet d'amorcer la récurrence qui montrera le lemme de Schwarz à tous les ordres.

1.4 Hypothèses. A l'aide du théorème d'Ascoli et du lemme de Schwarz, nous pourrons extraire des suites convergentes C^∞ sur tout compact d'applications pseudo-holomorphes. Nous nous intéresserons donc dans la suite de cette section à la suitation suivante:

(i) une variété E munie d'une suite (J_n) de structures presque complexes convergeant C^∞ vers J_0,

(ii) une suite (f_n) d'applications pseudo-holomorphes de D dans (E, J_n) convergeant C^∞ sur tout compact vers f_0, pseudo-holomorphe de D dans (E, J_0),

(iii) nous supposerons également que E est muni d'une suite (μ_n) de métriques hermitiennes convergeant vers μ_0.

1.5 Singularités. Considérons $G_2(E)$, la grassmanienne des 2-plans tangents à E. Si maintenant f est une immersion d'une surface S dans E, on peut lui associer une application $\bar{f}$ de S dans $G_2(E)$ qui, à un point, associe le plan tangent à l'image. Nous allons montrer le

1.6 Lemme. *Si les hypothèses suivantes sont vérifiées:*

(i) *les f_n sont des immersions,*

(ii) *$(\bar{f}_n)$ converge,*

(iii) *f_0 n'est pas constante.*

Alors f_0 est une immersion.

Preuve. Remarquons, tout d'abord, que f_0 étant pseudo-holomorphe et non constante, ses singularités sont isolées. Nous pouvons donc supposer, pour simplifier que $\lambda_0 = |f_0|$ est non nulle sur D moins l'origine. Nous voulons montrer que λ_0 est non nulle partout.

Considérons $g_n = f_n^* \mu_n$, les métriques induites par les f_n sur D. Nous savons que $g_n = \lambda_n g$ où g est la métrique canonique et $\lambda_n = |f_n|$.

Nous allons tout d'abord montrer que (ii) entraîne que, si k_n est la courbure de la métrique g_n, il existe une constante C telle que sur un voisinage de l'origine

$$|k_n| \leq C/\lambda_n.$$

Notre deuxième hypothèse peut se traduire de la manière suivante: Soient $F_n \to D$ les fibrés induits par les f_n du fibré tangent à E, alors les fibrés $D_n = f_{n*}(TD)$ vus comme sous-fibrés de F_n, convergent. En particulier:

d'une part, la courbure des plans tangents aux images est uniformément bornée;

d'autre part, les deuxièmes formes fondamentales S_n de D_n dans F_n sont uniformément bornées. C'est à dire, si u est un vecteur de D_n et v un vecteur tangent à D, alors

$$|S_n(f_{n*}(v), u)|^2 \leq C g(v, v)\mu_n(u, u).$$

Ceci entraîne que si w, u sont des vecteurs tangents à l'image

$$|S_n(w, u)|^2 \leq \frac{C}{\lambda_n}\mu_n(w, w)\mu_n(u, u).$$

En combinant ces deux remarques et l'équation de Gauss pour la surface $f_n(D)$, nous en déduisons l'inégalité recherchée.

Maintenant nous savons que

$$k_n = \frac{\Delta(\log(\lambda_n))}{2\lambda_n},$$

et donc

$$\Delta(\log(\lambda_n)) \leq C.$$

Nous en déduisons que sur D moins l'origine

$$\Delta(\log(\lambda_0)) \leq C.$$

Il est alors facile de montrer à l'aide de la formule de Green que λ_0 est non nulle partout.

1.7 Bord. On note dans ce paragraphe $f(\partial D)$, l'ensemble des points d'adhérence des suites $(f(x_n))$ lorsque (x_n) tend vers le bord du disque unité. Notre but est de montrer le

1.8 Lemme. *Si l'aire de $f_n(D)$ est uniformément bornée, alors $f_0(\partial D)$ est inclus dans la limite de Haussdorf des $f_n(\partial D)$.*

Montrons tout d'abord la proposition suivante:

1.9 Proposition. *On suppose que notre suite (f_n) d'applications pseudo-holomorphes vérifie de plus*

(i) *$d_n(f_n(\partial D), f_n(0))$ est uniformément minorée par β,*

(ii) *l'aire pour d_n de $f_n(D)$ est uniformément majorée par K.*

Alors f_0 n'est pas constante.

Preuve. Raisonnons par l'absurde, si (f_n) tend vers une fonction constante alors, pour tout disque $D(r)$ de rayon r et tout ε strictement positif, $f_n(D(r))$ est inclus dans $B(f_0(0), \varepsilon)$, pour tout n grand.

Considérons l'anneau $A(r) = D \backslash D(r)$ et notons A_0 et A_1 les deux composantes de son bord, $A_1 = \partial D$ et $A_0 = \partial D(r)$. D'après nos hypothèses, nous avons alors pour tout n grand

(iii) $d_n(f_n(0), f_n(A_0)) \leq \varepsilon$,

(iv) $d_n(f_n(0), f_n(A_1)) \geq \beta$.

Rappelons maintenant la notion de module d'un anneau. Tout anneau métrique A est conforme à $S^1 \times [0, L(A)]$, le réel $L(A)$ est alors appelé module de l'anneau A. On peut également le calculer de la manière suivante

$$(*) \qquad \frac{1}{L(A)} = \inf_{u \in B} \int_A |du|^2,$$

où B désigne l'ensemble des fonctions u telles que $u|_{A_0} \leq 0$ et $u|_{A_1} \geq 1$, A_0 et A_1 désignant les deux composantes connexes du bord.

Revenons à notre anneau $A(r)$, si nous faisons tendre r vers 1 son module tend vers 0. Par ailleurs $A(r)$ est conforme à son image par f_n, et nous pouvons minorer son module à l'aide de $(*)$: nous injectons dans la formule la fonction $u(y) = d_n(y, f_n(0))$. Son gradient ayant une norme inférieure à 1, nous obtenons pour n grand grâce à (ii), (iii) et (iv),

$$L(f_n(A(r))) \geq C(\varepsilon, \beta, K).$$

Ceci nous fournit la contradiction recherchée. q.e.d.

Nous pouvons maintenant démontrer notre lemme.

Preuve. Soit y un point de $f_0(\partial D)$. Par définition, il existe une suite de points (y_n) tel que $y = \lim(f_0(y_n))$. Puisque f_n converge sur tout compact vers f_0, nous pouvons supposer que pour toute suite p_n telle que $p_n \geq n$,

$$(*) \qquad y = \lim_{n \to \infty} (f_{p_n}(y_n)).$$

Munissons D de la métrique hyperbolique et supposons que les boules B_n de rayon 1 autour des y_n soient disjointes.

Maintenant puisque l'aire de $f_n(D)$ est uniformément majorée, l'aire de $f_0(D)$ est bornée et donc

$$\lim_{n \to \infty} (\text{Aire}(f_0(B_n))) = 0.$$

Il existe donc une suite p_n telle que $p_n \geq n$ et

$$(**) \qquad \lim_{n \to \infty} (\text{Aire}(f_{p_n}(B_n))) = 0.$$

Considérons maintenant une famille g_n de transformations conformes de D telle que $g_n(0) = y_n$ et la famille d'applications pseudo-holomorphes $\bar{f}_n = f_{p_n} \circ g_n$. D'après $(**)$, g_n tend sur tout compact vers une application constante. Par ailleurs, $g_n(D) = f_{p_n}(D)$ a une aire uniformément majorée. Notre proposition précédente nous permet d'affirmer que

$$\lim_{n\to\infty} (d(g_n(\partial D), g_n(0))) = 0,$$

et donc que

$$\lim_{n\to\infty} (d(f_{p_n}(y_n), f_{p_n}(\partial D))) = 0.$$

Ceci et $(*)$ nous permettent donc de conclure que y appartient à $\lim(f_n(\partial D))$.

2. Description pseudo-holomorphe des immersions isométriques

Nous allons décrire le 1-jet d'une immersion isométrique d'une surface S dans une variété M de dimension 3. Ce jet est à valeur dans l'ensemble $E = \mathrm{Isom}(TS, TM)$ des isométries linéaires de TS dans TM. Notre but est de munir un ouvert O de E d'une structure presque complexe telle que le 1-jet d'une immersion isométrique elliptique (ou localement convexe) définisse une courbe pseudo-holomorphe de O.

Nous verrons aussi que d'autres courbes pseudo-holomorphes, les *surfaces de pli* s'introduisent naturellement (2.9). Enfin, en 2.10, nous étudierons, le *calibrage* de notre espace, et en 2.12, établirons, à l'aide de Codazzi-Mainardi, l'équation que vérifie la courbure moyenne dans notre contexte.

2.1 Espace des immersions isométriques. Notre première étape va être de décrire E et plus particulièrement son espace tangent.

E est naturellement un fibré sur $S \times M$. On notera π_S et π_M, les projections sur S et M respectivement. Pour simplifier, on notera leur différentielle de la même manière.

La fibre au point (s, m) est $\mathrm{Isom}(T_sS, T_mM)$, l'ensemble des isométries de T_sS dans T_mM. L'space tangent à la fibre en un point g s'identifie à l'ensemble des applications linéaires f de T_sS dans T_mM qui vérifient

$$\langle f(u) | g(u) \rangle = 0,$$

où u appartient à T_sS et $\langle \mid \rangle$ désigne le produit scalaire de T_mM. Une telle f s'écrivant nécessairement $f = g \wedge v$, où v appartient à T_mM, cet espace tangent s'identifie canoniquement à T_mM.

On muni ce fibré de la connexion induite par les connexions de Levi-Civita sur S et M, et on note π_F la projection sur l'espace tangent à la fibre qui s'en déduit.

Nous avons donc décomposé l'espace tangent à E en

$$T_{(s,m,g)}E = T_sS \oplus T_mM \oplus T_mM$$

à l'aide des projections π_S, π_M et π_F.

2.2 1-jet d'immersions isométrique. Soit maintenant f une immersion isométrique de S dans M. Nous noterons f_* la différentielle de f, j^1f son 1-jet, ∇ la connexion de M, n le vecteur normal à la surface $f(S)$ et J_0 la structure complexe naturelle sur $f_*(TS)$ induite par le métrique et l'orientation, donnée par $J_0(u) = n \wedge u$.

Nous allons maintenant décrire l'espace des vecteurs tangent à la surface $j^1f(S)$ dans E.

2.3 Proposition. *A l'aide de la décomposition précédente, cet espace se décrit comme l'ensemble des vecteurs de la forme*

$$v = (u, f_*(u), -J_0\nabla_{f_*(u)}n),$$

où u désigne un vecteur de TS.

Preuve. Seul le dernier terme est à vérifier. Considérons tout d'abord l'espace tangent à la fibre comme un espace d'applications linéaires. Le dernier terme est alors l'application $\pi_F(v)$ qui à w associe $\pi_F(v)(w)$ où

$$\pi_F(v)(w) = \nabla_{f_*(u)}f_*(w) - f_*(\nabla_u w) = \mathrm{II}(u,w)n,$$

où $\mathrm{II}(\ ,\ )$ désigne la deuxième forme fondamentale de la surface immergée. Or

$$\mathrm{II}(u,w)n = -\langle_{f_*(u)}n|f_*(w)\rangle n = (n \wedge \nabla_{f_*(u)}n) \wedge f_*(w) = f_*(w) \wedge -J_0\nabla_{f_*(u)}n.$$

2.4 Cas elliptique. Dans le cas elliptique, la deuxième forme fondamentale est une métrique. On a alors

$$\nabla_{f_*(u)}n = kJ_0J,$$

où k est la racine carrée de la courbure de Gauss de la surface, c'est à dire la différence des courbures extrinsèques et intrinsèques du plan tangent à la surface,

$$k^2 = K(TS) - K(f_*(TS))$$

et J désigne la structure complexe associée à la deuxième forme fondamentale et qui respecte l'orientation.

En particulier, nous avons

2.5 Proposition. *L'espace tangent à $j^1f(S)$ dans E est constitué des vecteurs de la forme*

$$v = (u, f_*(u), kf_*(Ju)),$$

où u désigne un vecteur de TS.

On remarquera que k est une fonction parfaitement définie sur E.

2.6 Structure presque complexe. Soit O l'ouvert de E constitué des points où la courbure de Gauss k est strictement positive. Nous allons munir O d'une structure presque complexe telle que $j^1 f(S)$ soit une courbe pseudo-holomorphe pour f elliptique.

Nous allons décomposer TE d'une nouvelle manière

$$T_g E = V \oplus W,$$

où $V = \{G(u,v) = (u, g(u), kg(v)); \forall u, v \in TS\}$ et $W = \{(u, -g(u) + \alpha n, \beta n)\}$.

Munissons TE de la structure presque complexe

$$J|_V : G(u,v) \mapsto G(v, -u),$$
$$J|_W : (u, -g(u) + \alpha n, \beta n) \mapsto (J_0 u, -g(J_0 u) + \beta_n, -\alpha n).$$

En fait, la structure complexe sur W n'a aucune incidence sur la suite du problème. Munissons V de la métrique hermitienne μ

$$\mu(G(u_1, v_1), G(u_2, v_2)) = k\langle u_1 | u_2 \rangle + k\langle v_1 | v_2 \rangle,$$

où $\langle \, | \, \rangle$ désigne la métrique de S. On munit ensuite W de n'importe quelle métrique.

2.7 Courbes pseudo-holomorphes. Nous allons maintenant exhiber des courbes pseudo-holomorphes.

2.8 Proposition. *Si f est une immersion isométrique elliptique de S dans M, $j^1 f(S)$ est une courbe pseudo-holomorphe de O. De plus la structure presque complexe induite sur S est celle donnée par la deuxième forme fondamentale. L'aire ω induite est $H\omega_0$ où H désigne la courbure moyenne de l'immersion et ω_0 l'elément d'aire de la métrique initiale.*

La preuve découle de 2.5.

Il existe d'autre courbes pseudo-holomorphes. Celles que nous allons définir maintenant nous seront utiles.

2.9 Proposition, Définition. *Soient $\gamma(t)$ une géodésique de S et $\Gamma(t)$ une géodésique de M, toutes deux paramétrées par l'arc. La surface $F = F(\gamma, \Gamma)$ de E constituée des isométries de $T_{\gamma(t)}S$ dans $T_{\Gamma(t)}M$ qui envoient $\frac{d\gamma}{dt}$ sur $\frac{d\Gamma}{dt}$, est une courbe pseudo-holomorphe. Nous l'appelerons* ***Surface de pli****.*

A nouveau la preuve est immédiate.

2.10 Calibrage. Une notion utile (voir 1.2) pour l'étude des courbes pseudo-holomorphes est celle de calibrage. Un compact O est calibré s'il existe une 1-forme β, définie sur O, telle que

$$d\beta(x, Jx) > 0.$$

Dans notre cas, nous intéresserons seulement au calibrage respectivement à V, c'est à dire que nous demandons que la formule ci-dessus soit vérifiée uniquement pour les vecteurs x de V. Nous pouvons alors montrer

2.11 Proposition. *Toute fibre* $F_{(s,m)} = \mathrm{Isom}(T_sS, T_mM)$ *de* $E \to S \times M$ *est calibrée respectivement à* V.

Preuve. Considérons h le champ de vecteur de M défini au voisinage de m qui à un point x associe l'image réciproque, par l'application exponentielle, de m. On remarque que ce champ de vecteur vérifie $\nabla_u h = u$ en m. On peut relever ce champ de vecteur en un champ de vecteur de E à valeur dans TM.

Considérons alors la 1-forme β définie par

$$\beta(u, v, w) = \det(h, n, w),$$

où n désigne à nouveau ici le champ de vecteur normal. Si nous différencions cette forme, nous obtenons le long de $F_{(s,m)}$

$$d\beta((u_1, v_1, w_1), (u_2, v_2, w_2)) = \det(v_1, n, w_2) - \det(v_2, n, w_1).$$

On vérifie maintentant que pour tout vecteur x tangent à V le long de $F_{(s,m)}$, nous avons $d\beta(x, Jx) > 0$. q.e.d.

Les calculs effectués lors de la démonstration de notre dernière proposition sont liés à ceux permettent d'obtenir les formules de Minkowski (voir [9]).

2.12 Courbure moyenne et équation de Codazzi Mainardi. Soit H la courbure moyenne de notre immersion. Remarquons tout d'abord que la fonction $W = 1/H$, définie sur $j^1 f(S)$, peut se définir également comme le determinant de la projection sur S. L'équation de Codazzi-Mainardi va nous permettre de montrer le

2.13 Lemme. *La fonction* W *est solution d'une équation du type*

$$dW \circ J = W\beta = \pi_s^* \omega(-4(kW)^2 + 1),$$

où k *est la courbure de Gauss,* ω *la forme de connexion du repère des directions principales et* β *une* 1*-forme qui ne dépend que la projection orthogonale sur l'espace tangent à* $j^1 f(S)$.

Preuve. Commençons par calculer la projection orthogonale π d'un vecteur de $G(u, v)$ de V sur $Tj^1 f(S)$. Nous obtenons

$$\pi G(u, v) = WkG(J_0 v + JJ_0 u, JJ_0 v - J_0 u).$$

Pour effectuer ce calcul, il suffit de remarquer que l'orthogonal de $Tj^1 f(S)$ dans V est constitué des vecteurs de la forme $G(u, J_0 J J_0 u)$ et que nous avons

$$JJ_0 + J_0 J = \frac{H}{k}\,\mathrm{Id}.$$

Rappelons maintenant l'équation de Codazzi Mainardi. Si nous écrivons la deuxième forme fondamentale

$$\mathrm{II}(u,v) = \langle A(u)|v\rangle$$

et si nous désignons par R le tenseur de courbure de M et par n le vecteur normal à la surface, cette équation s'écrit

$$\nabla_u A(v) - \nabla_v A(u) = R(u,v)n.$$

Or nous pouvons écrire

$$A = kJ_0J = J_0B.$$

Notre équation se reécrit

$$\nabla_u B(v) - \nabla_v B(u) = -J_0R(u,v)n.$$

Nous avons ensuite les relations de commutation

$$(\nabla_u B)J + J(\nabla_u B) = -2(u.k)\,\mathrm{Id}.$$

En reportant dans l'équation précédente, nous obtenons

$$\begin{aligned}(\nabla_{Ju}B)(v) - (\nabla_u B)(Jv) = {} & 2(u.k)v - 2(v.k)u \\ & - JJ_0R(u,v)n + J_0R(u,Jv)n.\end{aligned}$$

En A, cela donne

$$\begin{aligned}(\nabla_{Ju}A)(v) - (\nabla_u A)Jv = {} & 2(u.k)J_0v - 2(v.k)J_0u \\ & - J_0JJ_0R(u,v)n - R(u,Jv)n.\end{aligned}$$

Nous allons prendre la trace de cette équation. Un bref calcul nous donne tout d'abord

$$\mathrm{tr}((\nabla_u A)J) = (H^2 - 4k^2)\omega.$$

Notons ensuite $\overline{R}(u)$ l'opérateur défini par $\overline{R}_u v = R(u,v)n + J_0R(u,J_0v)n$. Nous obtenons alors

$$dH(Ju) - (H^2 - 4k^2)\omega = -2dk(J_0u) - \mathrm{tr}(J\overline{R}_u).$$

Nous allons relever cette équation sur $j^1f(S)$. Nous sommes donc conduit à relever les opérateurs J_0 et R_u. Leurs relevés que nous notons de la même manière sont donnés par

$$\begin{aligned}J_0(G(v,Jv)) &= G(J_0v, JJ_0v),\\ \overline{R}_{G(u,Ju)}G(v,Jv) &= G(\overline{R}_u v, J\overline{R}_u v).\end{aligned}$$

En fait ces opérateurs sont les restrictions d'opérateurs de la forme $H\pi L$ où L est un opérateur bien défini sur V. Nous avons

$$J_0(u) = H\pi L_1(u),$$

où $L_1(G(u,v)) = kG(0,u)$. Ainsi que

$$\overline{R}_u v = H\pi L_2(v,w),$$

où $L_2(G(u,v), G(w,z)) = kG(0, -J_0\overline{R}_u w)$. En reportant tout cela nous obtenons finalement que

$$dH \circ J = H\beta + \pi_S^* \omega(H^2 - 4k^2),$$

où β ne dépend que de π, k, L_1 et L_2.

3. Convergence des jets

Nous allons maintenant exploiter l'interprétation pseudo-holomorphe de la section précédente. Notre but est de montrer (3.3) que, sous certaines hypothèses, le graphe du 1-jet d'une suite d'immersions isométriques elliptiques converge, localement, soit vers un graphe, soit vers une *surface de pli.*

3.1 Hypothèses. Dans cette section les données sont les suivantes:

(i) une variété M de dimension 3, munie d'une métrique g,

(ii) une surface S,

(iii) une suite d'immersions ε-elliptiques (f_n) de S dans M convergeant C^0 vers une application f_0 et telle que

(iv) la suite de métriques $(g_n = f_n^* g)$ convergent C^∞ vers une métrique g_0.

On note alors J_n la structure complexe sur S donnée par la deuxième forme fondamentale (qui est d'après nos hypothèses une métrique) de $f_n(S)$ et H_n sa courbure moyenne.

On se donne également une suite (x_n) de points de S convergeant vers un point x_0, et une suite (O_n) de voisinages ouverts suffisamment petit de (x_n) homéomorphes au disque et tels que

(v) $\int_{O_n} H_n \, dg_n$ est uniformément majorée,

(vi) $d(j^1 f_n(x_n), j^1 f_n(\partial O_n))$ est uniformément minorée par α.

Considérons maintenant le difféomorphisme γ_n de D dans O_n, donné par la représentation conforme de O_n muni de J_n. Soit alors $h_n = j^1 f_n \circ \gamma_n$, immersion du disque dans $J^1(S, M)$. D'après 2.8, h_n est une application pseudo-holomorphe du disque D dans E muni de la suite $\overline{J}_n$ de structures presque complexes associées aux métriques g_n. Ces structures presque complexes convergent C^∞, puisque les g_n convergent.

3.2 Convergence. Notre but dans cette section est de montrer la

3.3 Proposition. *Il existe une sous-suite (h_{p_n}) de (h_n) convergeant C^∞ vers une immersion pseudo-holomorphe h_0 telle que $h_0(\partial D)$ est inclus dans*

la limite de Haussdorff des $h_{p_n}(\partial D)$. De plus, nous avons l'alternative suivante.

Soit $h_0(D)$ est inclus dans le graphe d'une immersion isométrique, et dans cas (f_{p_n}) converge C^∞ au voisinage de x_0 vers f_0.

Soit $h_0(D)$ est inclus dans une "surface de pli" $F(\gamma, \Gamma)$ (cf. 2.9). Dans ce cas, si nous paramétrisons γ avec l'origine en x_0, nous avons de plus

(i) *$\gamma]-\alpha, \alpha[$ est la limite des courbes intégrales c_{p_n}, passant par x_n, du champ (défini sur O_{p_n}) de la direction principale associée à la plus petite valeur propre de la deuxième forme fondamentale. De même Γ est la limite des $f_{p_n}(c_{p_n})$,*

(ii) *enfin f_0 est une isométrie de $\gamma]-\alpha, \alpha[$ dans Γ, et si (u_{p_n}) est une suite de vecteurs tangents en x_{p_n} convergeant vers un vecteur u_0 tangent à γ, alors $(Df_{p_n}(u_{p_n}))$ converge vers $Df_0(u_0)$*

La démonstration se fait en deux étapes.

3.4 Première étape. Nous allons montrer la première partie de la proposition, c'est à dire l'existence d'une sous-suite de (h_n) convergeant C^∞ vers une immersion pseudo-holomorphe h_0 telle que $h_0(\partial D)$ soit inclus dans la limite de Hausdorff des $h_n(\partial D)$.

Tout d'abord puisque les O_n sont suffisamment petits, les $f_n(O_n)$ sont uniformément inclus un petit voisinage de $f_0(x_0)$ dans M. Nous en déduisons que $j^1 f_n(O_n)$ est inclus dans un petit voisinage de la fibre au dessus du point $(x_0, f_0(x_0))$ qui d'après 2.11 est calibrée.

Nous pouvons donc appliquer le lemme de Schwarz 1.2 et extraire de notre suite (h_n), une sous-suite convergeant (h_{p_n}) vers une application pseudo-holomorphe h_0. Nous notons cette sous-suite, pour simplifier, également (h_n). Notre hypothèse (v) entraîne que l'aire des $h_n(D)$ est uniformément bornée (voir 1.6). Le lemme 1.8, nous permet donc d'affirmer que $h_0(\partial D)$ est inclus dans $\lim(h_n(\partial D))$. En particulier notre hypothèse (vi) entraîne que h_0 n'est pas constante.

Il nous reste simplement à montrer que h_0 est une immersion. D'après 1.6, il suffit de montrer que le relevé de h_n, $\bar{h}_n$, par l'application de Gauss, à valeur dans $G_2(E)$, converge.

Pour cela remarquons tout d'abord que $\bar{h}_n$ est en fait à valeur dans l'espace total du fibré $\mathbf{CP}(V) \to E$, dont la fibre est constituée des droites complexes incluses dans le sous-fibré V du fibré tangent à E, défini en 2.6. Ce fibré est muni canoniquement d'une connexion, et sa fibre, conforme à $\mathbf{CP}^1 = S^2$, est kälherienne. Plus précisement, $\bar{h}_n$ est à valeur dans de compact K de $\mathbf{CP}(V)$ constitué des droites complexes dont la projection sur TS (induite par π_S) a un déterminant positif. On remarque que l'intersection de K avec la fibre est une hémisphère. Les hypothèses du

lemme 1.3 sont donc vérifiées, et nous pouvons par le théorème d'Ascoli en déduire l'existence d'une sous-suite convergente de $\bar{h}_n$. Ceci, comme nous l'avons déjà remarqué, suffit à prouver que h_0 est une immersion.

3.5 Deuxième étape. Nous allons maintenant démontrer la deuxième partie de notre assertion. Pour cela, remarquons à nouveau que la fonction $W_n = 1/H_n$ definie de $h_n(D)$ dans $\mathbf{R}$, peut se définir également comme le determinant de la projection sur S. Cette fonction converge donc C^∞ vers une fonction W_0 définie sur $h_0(D)$. Rappelons le lemme 2.13 que nous pouvons énoncer dans notre contexte sous la forme suivante

3.6 Proposition. *Les fonctions W_n sont solutions d'équations du type*

$$(*) \qquad dW_n \circ \overline{J}_n = W_n\beta_n + \pi_S^*\omega_n(-4(kW_n)^2 + 1),$$

où k est la courbure de Gauss, ω_n la forme de connexion du repère des directions principales et β_n converge C^∞.

En effet, nous venons de voir que la suite de surfaces $(h_n(D) = j^1 f_n(S))$ convergeait C^∞, ce qui nous permet d'assurer que (β_n) converge C^∞.

Nous allons tout d'abord montrer

3.7 Proposition.

- *soit W_0 est constamment nulle,*
- *soit W_0 n'est jamais nulle.*

Preuve. On se place au voisinage d'un point où W_0 est nulle. On désigne par C_i des constantes. Pour n grand, $(*)$ nous permet de dire

$$(1) \qquad |\pi_S^*\omega_n| \leq C_1(|W_n| + |dW_n|) \leq C_2.$$

Dérivons $(*)$. Cela donne en notant Ω_n la forme de courbure de la métrique g_n sur S

$$(2) \qquad \begin{aligned} &d(dW_n \circ \overline{J}_n) - dW_n \wedge \beta_n \\ &\quad = W_n(d\beta_n - 8\pi_S^*\omega_n \wedge kd(kW_n)) + \pi_S^*\Omega_n(-4(kW_n^2) + 1). \end{aligned}$$

Maintenant, puisque la courbure des g_n est uniformément bornée

$$(3) \qquad |\pi_S^*\Omega| \leq C_3|W_n|.$$

En combinant (1), (2) et (3), on obtient

$$|d(dW_n \circ \overline{J}_n) - dW_n \wedge \beta_n| \leq C_4|W_n|,$$

ce qui donne à la limite

$$|d(dW_0 \circ \overline{J}_0) - dW_0 \wedge \beta_0| \leq C_4|W_0|.$$

Il existe donc un opérateur linéaire elliptique du deuxième ordre sans terme constant, L, tel que

$$|L(W_0)| \leq C_4|W_0|.$$

Nous pouvons maintenant conclure à l'aide du principe du maximum, puisque W_0 est positive ou nulle. q.e.d.

Il nous reste à montrer

3.8 Proposition. *Si W_0 n'est jamais nulle, $h_0(D)$ est inclus dans le graphe d'une immersion isométrique. Si W_0 est nulle, $h_0(D)$ est inclus dans une "surface de pli" $F(\gamma, \Gamma)$. Dans ce cas, si nous paramétrisons γ avec l'origine en x_0*

(i) *$\gamma]-\alpha, \alpha[$ est la limite des courbes intégrales c_{p_n}, passant par x_n, du champ (défini sur O_{p_n}) de la direction principale associée à la plus petite valeur propre de la deuxième forme fondamentale. De même Γ est la limite des $f_{p_n}(c_{p_n})$,*

(ii) *enfin f_0 est une isométrie de $\gamma]-\alpha, \alpha[$ dans Γ, et si (u_{p_n}) est une suite de vecteurs tangents en x_{p_n} convergeant vers un vecteur u_0 tangent à γ, alors $(Df_{p_n}(u_{p_n}))$ converge vers $Df_0(u_0)$.*

Preuve. La première partie de notre assertion est une trivialité, puisque W_0 est le déterminant de la projection sur S. Examinons la deuxième partie.

Dans ce cas, W_n converge C^∞ vers 0. Remarquons alors que, d'après l'inégalité (1) de la proposition précédente, $\pi_S^* \omega_n$ tend lui aussi vers 0.

Soit maintenant c_n la courbe intégrale, passant par x_n, du champ (défini sur O_n) de la direction principale associée à la plus petite valeur propre de la deuxième forme fondamentale. D'après notre remarque précédente sa courbure géodésique tend vers 0. Par ailleurs, la courbure normale de $f_n(c_n)$ tend également vers 0 puisque $H_n = 1/W_n$ tend vers 0. D'après notre hypothèse (vi) de 3.1, sa longueur est uniformément minorée par α.

Ceci nous permet de conclure que c_n tend vers une géodésique γ de S, et que $f_n(c_n)$ tend vers une géodésique Γ de M. $h_0(D)$ va donc avoir une infinité de point communs avec la surface de pli $F(\gamma, \Gamma)$. Nous pouvons conclure en utilisant, par exemple, le principe de Carlemann (cf. [1]) qui nous dit que deux courbes pseudo-holomorphes ayant une infinité de points communs sont confondues. Le reste de la proposition suit aisément.

4. Preuve du Théorème D

Rappelons son énoncé

Théorème D. *Soit (f_n) une suite d'immersions ε-elliptiques d'une surface S dans un compact d'une variété M de dimension 3, munie d'une métriques g, telle que*

(i) *les métriques $g_n = f_n^* g$ convergent C^∞ vers une métrique g_0,*

(ii) *l'intégrale de la courbure moyenne des $f_n(S)$ est uniformément majorée.*

Alors il existe une sous-suite convergeant C^∞ sur tout compact vers une immersion isométrique f_0 de (S, g_0) dans (M, g).

Preuve. Nos hypothèses et le théorème d'Ascoli nous permettent d'extraire une sous-suite de (f_n) convergeant C^0 sur tout compact vers une application f_0. Notons cette sous-suite (f_n).

Soit O un ouvert suffisamment petit autour d'un point x. Nous sommes alors dans les hypothèses de la §3.1, avec $O_n = O$. En utilisant les mêmes notations qu'en 3.1, construisons la suite h_n d'applications pseudo-holomorphes du disque dans E (cf. 2.8). Par construction, $h_n(D) = j^1 f_n(O)$.

La proposition 3.3 nous permet d'extraire une sous-suite (h_{p_n}) convergeant vers h_0. De plus, $h_0(\partial D)$ est inclus dans la limite de Haussdorff des $h_{p_n}(\partial D)$, et en particulier

$$\pi_S(h_0(\partial D)) \subset \partial O.$$

Dès lors, $h_0(D)$ ne peut être inclus dans une surface de pli, puisque dans ce cas $\pi_S(h_0(\partial D))$ est un arc géodésique. Nous sommes dans le premier cas de l'alternative de 3.3 et (f_{p_n}) converge donc C^∞ sur un voisinage de x vers f_0.

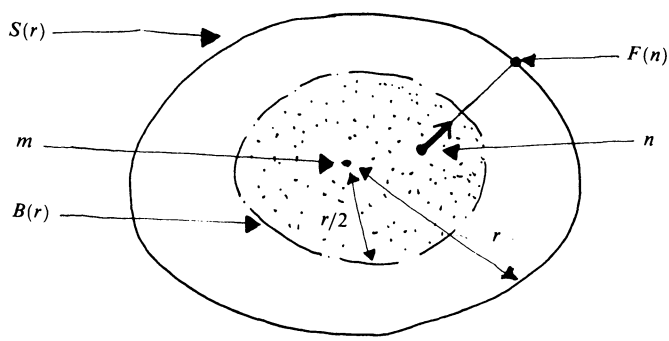

FIGURE 2

5. Voisinage et contrôle de l'intégrale de la courbure moyenne

Dans les hypothèses 3.1, apparaissent des voisinages ayant de bonnes propriétés ((v), (vi)). Nous allons montrer l'existence de tels voisinages. Notre but est de démontrer le Lemme 5.6. Nous allons montrer également comment contrôler l'intégrale de la courbure moyenne (5.2).

Avant cela quelques remarques.

5.1 Remarque et proposition. Soit $U(r)$ le fibré unitaire de la boule $B(r)$ de rayon $r/2$ autour d'un point m de M, et $S(r)$ la sphère de rayon r centrée sur ce même point. On considère alors l'application F de $U(r)$ dans $S(r)$ qui à un vecteur unitaire n associe l'intersection de la géodésique dans la direction n avec $S(r)$ (Figure 2).

Pour r suffisamment petit une telle application est bien définie. L'espace horizontal H_n du fibré tangent à $U(r)$ en n s'identifie naturellement à TM. De même le fibré vertical V_n s'identifie avec un sous espace de TM.

Montrons

5.2 Proposition. *Pour r suffisamment petit, il existe une constante C_0 telle que si*

$$(u, v) \in T_n U(r) = H_n \oplus V_n$$

avec $\langle u|n\rangle = 0$ et $\langle u|v\rangle \leq 0$, nous avons

$$|DF(u, v)|^2 \geq C_0(|v|^2 + |u|^2).$$

Preuve. C'est une propriété qui est invariante pour des petites perturbations de la métrique. Puisque l'on s'intéresse à r petit, il suffit de la prouver pour $\mathbf{R}^3$. Dans ce cas elle est facile à vérifier.

5.3 Surface elliptique. Soir t tel qu'en 5.2, S une surface ε-elliptique incluse dans $B(r)$ et n son champ de vecteur normal. On considère alors l'application $N = F \circ n$ de S dans $S(r)$, c'est à dire l'application qui à un point de S associe l'intersection de la géodésique partant dans la direction normale à avec $S(r)$ (Figure 3).

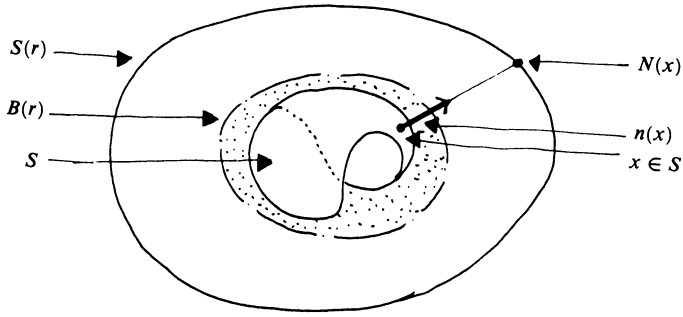

FIGURE 3

Nous allons montrer les propriétés suivantes de l'application N.

5.4 Propriétés. *Il existe des constantes C_1, C_2 et C_3 ne dépendant que de ε et d'une majoration de la courbure de S telles que*

(i) $|DN| \geq C_1$,

(ii) $d_1(n(z), n(y)) \geq C_2\, d(N(z), N(y))$, *où* d_1 *est la métrique du fibré unitaire de* M *et* d *celle de* M,

(iii) *si* N *est injectif de* O *dans* $S(r)$, *alors*

$$\int_O H\, dg \leq C_3;$$

ici H *désigne la courbure moyenne et* g *la métrique de* S.

Preuve. Remarquons tout d'abord que la propriété (ii) est évidente, elle provient simplement de la continuité de F. Ensuite, on a

$$Dn(u) = (Df(u), \nabla_{Df(u)} n),$$

la surface étant elliptique, nous avons

$$\langle Df(u) | \nabla_{Df(u)} n \rangle = -\mathrm{II}(u, u) \leq 0.$$

Nous pouvons appliquer 5.2, ce qui nous donne

$$|DN(u)|^2 \geq C_0(|u|^2 + |\nabla_u n|^2). \tag{1}$$

Ceci prouve (i). Montrons (iii). Soit K la courbure de Gauss de la surface, $(*)$ nous donne alors qu'il existe une constante C telle que

$$\int_O dg + \int_O K^2\, dg \leq C. \tag{2}$$

Nous savons que

$$\frac{H}{K}\mathrm{II}(u, u) = |u|^2 + \frac{1}{K}|\nabla_n n|^2. \tag{3}$$

Or, l'aire de la métrique $\frac{H}{K}\mathrm{II}$ est l'intégrale de la courbure moyenne. De (1), (2) et (3) on en déduit bien (iii).

5.5 Bon voisinage. Ces propriétés vont nous permettre de démontrer le

5.6 Lemme. *Soit* f *une immersion isométrique* ε*-elliptique d'une surface* (S, g_0) *dans une variété* (M, g) *de dimension* 3, *et* x *un point de* S. *Il existe alors un voisinage* O *de* x, *homéomorphe au disque et tel que*

(i) $\int_O H\, dg_0 \leq A$,

(ii) $d(j^1 f(x), j^1 f(\partial O)) \geq B$,

où A *et* B *ne dépendent que de* g, g_0, x *et* $f(x)$.

Preuve. Soit en effet r suffisamment petit pour que les propriétés précédentes soient vraies autour de $f(x)$. Soit $D(\alpha)$ le disque de rayon α autour de $N(f(x))$ dans $S(r)$ avec

$$\alpha = \frac{\inf(r\, d_0(x, \partial S))}{4C_1};$$

ici d_0 désigne la distance de S. Le voisinage que nous cherchons est O, la composante connexe de x dans $N^{-1}\{D(\alpha)\}$.

En effet d'après 5.4(i), N est étale de O dans $D(\alpha)$. De plus d'après cette même propriété et le choix de α, elle est surjective. N est donc un difféomorphisme et O est difféomorphe au disque.

D'après 5.4(iii), (i) est vérifiée. Enfin N envoyant ∂O dans $\partial D(\alpha)$, 5.4 (ii) nous donne (ii).

6. Preuve du Théorème E

Donnons son énoncé complet:

Théorème E. *Soit (f_n) une suite d'immersions ε-elliptiques d'une surface S dans (M, g), convergeant C^0 vers f_0, et telle que les métriques induites $g_n = f_n^* g$ convergent C^∞ vers g_0.*

On suppose que la suite (f_n) ne converge pas C^∞ au voisinage d'un point x de S. Il existe alors une géodésique pour g_0, γ, passant par x et telle que

(i) *f_0 est une isométrie de γ dans une géodésique de M.*

De plus

(ii) *une telle géodésique est unique,*

(iii) *si (x_n) converge vers un point de γ, et si c_n est la courbe intégrale, passant par x_n, de la direction principale associée à la plus petite valeur propre de la deuxième forme fondamentale de f_n, alors (c_n) converge vers γ. De même Γ est la limite de $(f_n(c_n))$,*

(iv) *si (u_n) est une suite de vecteurs tangents tendant vers un vecteur u tangent à la géodésique γ, alors $Df_n(u_n)$ tend vers $Df_0(u)$.*

Réciproquement, l'existence d'une géodésique vérifiant (i) entraîne que (f_n) ne converge pas C^∞ au voisinage de x. En particulier, (f_n) ne converge C^∞ au voisinage d'aucun point de γ.

6.1 Applications contractantes. Le seule chose que nous sachions pour le moment sur f_0 est qu'elle est contractante de (S, g_0) dans (M, g). Nous allons avoir besoin de la

6.2 Propriété. *Soit f_0 une application contractante d'une surface S dans une variété M. On suppose qu'il existe deux arcs géodésiques γ_1 et γ_2 de S se coupant en un point x, et envoyés isométriquement par f_0 sur deux arcs géodésiques, alors*

(i) *l'angle des géodésiques $f_0(\gamma_i)$ est égal à l'angle des géodésiques γ_i*

(ii) *la courbure de S en x est inférieure ou égale à la courbure sectionelle k du plan de $T_{f_0(x)}M$ engendré par les $f_0(\gamma_i)$.*

Preuve. On notera dans cette démonstration d_s la distance de S, et d_m celle de M. Le fait que f_0 soit contractante se traduit par:

$$d_m(f_0(x), f_0(y)) \leq d_s(x, y).$$

Prouvons (i): Soient donc γ_i deux géodésiques comme dans l'énoncé, se coupant en un point x. On paramétrise ces deux géodésiques par l'arc en mettant l'origine en x. Les deux courbes $\Gamma_i = f_0(\gamma_i)$ sont alors des géodésiques paramétrées par l'arc d'aprés les hypothèses. Soit α l'angle en x entre les géodésique γ_i et β l'angle entre les géodésiques Γ_i. Pour tout λ et t de $\mathbf{R}$:

$$d_s^2(\gamma_1(t), \gamma_2(\lambda t)) = t^2(1 + \lambda^2 - 2\lambda \cos\alpha) + o(t^2),$$

ainsi que

$$d_m^2(\Gamma_1(t), \Gamma_2(\lambda t)) = t^2(1 + \lambda^2 - 2\lambda \cos\beta) + o(t^2).$$

Le fait que f_0 est contractante nous permet d'écrire:

$$d_s^2(\gamma_1(t), \gamma_2(\lambda t)) \geq d_m^2(\Gamma_1(t), \Gamma_2(\lambda t)),$$

en divisant par t^2 et en faisant tendre t vers 0, on a:

$$-2\lambda \cos\alpha \geq -2\lambda \cos\beta.$$

Ceci étant vrai pour tout λ, nous avons bien:

$$\alpha = \beta.$$

Montrons (ii).

Remarquons tout d'abord que d'après ce qui précède l'angle entre les γ_i et les $\Gamma_i = f_0(\gamma_i)$ est le même.

Munissons alors un voisinage de 0 dans l'espace tangent en x de la métrique d_1 induite par l'exponentielle, et de la métrique d_2 à courbure constante k en coordonnées normales.

Soit u_1 et u_2 les vecteurs tangents aux géodésiques γ_i. Ces géodésiques et leurs images ayant le même angle,

$$\begin{aligned} d_1(tu_1, tu_2) &= d_s(\gamma_1(t), \gamma_2(t)), \\ d_2(tu_1, tu_2) &= d_m(\Gamma_1(t), \Gamma_2(t)) + O(t^4) \\ &= d_m(f_0(\gamma_1(t)), f_0(\gamma_2(t))) + O(t^4). \end{aligned}$$

Maintenant f_0 étant contractante, la comparaison à l'ordre 3 des métriques nous donne l'inégalité voulue.

6.3 Preuve du Théorème E. Soit x un point de S au voisinage duquel (f_n) ne converge pas C^∞. Montrons

6.4 Lemme. *Il existe un arc géodésique γ passant par x telle que*

(i) *f_0 est une isométrie de γ sur une géodésique γ de M,*

(ii) *$d(x, \partial\gamma) \geq \alpha(x)$ où $\alpha(x)$ est une fonction continue positive sur S,*

(iii) *les 2-plans tangents à Γ en $f_0(x)$ ont une courbure inférieure ou égale à $k_0(x) - \varepsilon$ où k_0 désigne la courbure de g_0,*

(iv) *enfin si γ_1 est un autre arc géodésique, passant par x, envoyé isométriquement par f_0 sur une géodésique de M, γ_1 est tangent à γ.*

Preuve. Soit donc $O_n(x)$ le voisinage de x homéomorphe au disque défini pour tout n à l'aide de 5.6 et qui vérifie

(a) $\int_{O_n} H\, dg_n \leq A$,

(b) $d(j^1 f_n(x), j^1 f_n(\partial O_n)) \geq B$

où A et B ne dépendent que de g, g_n, x et $f_n(x)$.

D'après le Théorème D, il existe une sous-suite p_n telle que

$$(*) \qquad \lim(d_n(x, \partial O_{p_n})) = 0.$$

On considère la suite (h_{p_n}) d'applications pseudo-holomorphes du disque dans E associée par 3.1. On peut alors, grâce à 3.3, extraire une sous-suite convergente vers une immersion pseudo-holomorphe h_0. A cause de $(*)$, nous sommes dans le deuxième cas de l'alternative de la proposition. $h_0(D)$ est donc inclus dans une surface de pli $F(\gamma, \Gamma)$, f_0 envoyant isométriquement γ sur Γ. Nous venons de vérifier (i) et (ii).

Remarquons que ceci entraîne que (f_n) ne converge C^∞ au voisinage de x pour aucune sous-suite.

Montrons (iii). On considère l'ensemble A, des 2-plans P tangents à Γ en $f_0(x)$, pour lesquels il existe une suite de points (x_{p_n}) tendant vers x et tels que

$$P = \lim(Df_{p_n}(T_{x_{p_n}} S)).$$

Un tel ensemble est clairement fermé. Montrons qu'il est ouvert. Soit P un plan de A, et (x_{p_n}) la suite de points associée. On construit alors une suite de voisinages de ces points à l'aide de 5.6, qui vérifie les hypothèses 3.1. A nouveau, $(*)$ va être vérifiée (en remplaçant x par x_{p_n}). Soit alors h_0' l'immersion pseudo-holomorphe du disque à nouveau obtenue à l'aide de 3.3. De nouveau, à cause de $(*)$, $h_0'(D)$ est inclus dans une surface de pli. Puisque h_0' est une immersion, $h_0'(D)$ est ouvert dans cette surface de pli et en particulier les plans proches de P sont atteints. Ceci montre que A est ouvert.

A est donc ouvert et fermé et contient donc tous les plans tangents à Γ. Or tous les plans de A vérifient la condition (iii).

Enfin (iv) est une conséquence de (iii) et de 6.2.

6.5 Lemme. *Il existe un unique arc géodésique γ passant par x telle que f_0 est une isométrie de γ sur une géodésique de M de plus*

(i) $d(x, \partial\gamma) \geq \alpha(x)$,

(ii) *si (x_n) converge vers x et si c_n est la courbe intégrale, passant par x_n, de la direction principale associée à la plus petite valeur propre de la deuxième forme fondamentale de f_n, alors c_n converge vers γ. De même Γ est la limite des $fn(c_n)$,*

(iii) *enfin si (u_n) est une suite de vecteurs tangents convergeant vers un vecteur u_0 tangent à γ, alors $(Df_n(u_n))$ converge vers $Df_0(u_0)$.*

Preuve. Nous venons de montrer la première partie, montrons (ii) et (iii). Remarquons, à nouveau, que l'existence d'un arc γ entraîne que f_n ne converge C^∞ sur aucune sous-suite. Soit maintenant O_n la suite de voisinage défini en 5.6, associée à x_n et f_n. Soit alors h_0 l'immersion pseudo-holomorphe du disque obtenue grâce à 3.3. Nous sommes nécessairement dans le deuxième cas de l'alternative et donc $h_0(D)$ est inclus dans $F(\gamma, f_0(\gamma))$ par unicité de γ. Ceci, (i) et (ii) de 3.3 entraînent notre résultat. q.e.d.

Cette proposition est la version locale de notre théorème. Pour terminer il suffit de remarquer que (f_n) ne converge C^∞ au voisinage d'aucun point de notre arc géodésique γ et de d'utiliser un argument de connexité usant de l'unicité de γ.

7. Preuve des théorèmes de Pogorelov

7.1 Rigidité infinitésimale. Soit S une surface immergée dans une variété riemanniene M de dimension 3. Un champ, v, de déformation isométrique infinitésimale est un champ le long de S qui vérifie, pour tout u vecteur tangent de TS,

$$\langle \nabla_u v | u \rangle = 0, \tag{1}$$

où ∇ est la connexion de Levi-Civita de M. Une surface *infintésimalement rigide* est une surface telle que tout champ de déformation infinitésimale isométrique (vérifiant éventuellement des conditions de normalisations, voir ci dessous) est nul.

On peut imposer les conditions de normalisation suivantes.

Une surface est *ancrée en un point* si l'on impose que tout champ de déformation v isométrique est nul en ce point.

Une surface est *ancrée en un point et une direction u* si l'on impose de plus que $\nabla_u v = 0$.

Une surface est *ancrée en un point et son espace tangent* si elle est ancrée en ce point et dans toutes les directions.

Enonçons le théorème de rigidité infinitésimale de Pogorelov.

Théorème C (*Pogorelov*). *Une surface fermée localement convexe S d'une variété M de dimension* 3 *est infinitésimalement rigide dans les cas suivants:*

(i) *S est homéomorphe à la sphère et ancrée en un point et son espace tangent,*

(ii) *S est homéomorphe au projectif et ancrée en un point et une direction,*

(iii) *S est homéomorphe au tore au à la bouteille de Klein et ancrée en un point,*

(iv) *la caractéristique d'Euler de S est négative.*

Dans son énoncé original (voir [8, pp. 424–434]), Pogorelov se restreint au cas orientable. Son résultat se généralise aisément au cas non orientable en passant au revêtement des orientations sauf, semble-t-il, pour le cas du projectif. Nous allons donner une preuve extrêmement rapide et élémentaire de ce résultat.

Preuve. On se ramène au cas où S est orientable en utilisant éventuellement son revêtement des orientations.

Soit n le champ de vecteur normal et v un champ de déformation isométrique, décomposons v en sa partie tangentielle et sa partie normale, soit

$$v = x + an.$$

Soit maintenant $\overline{\nabla}$ la connexion de Levi-Civita de S pour la métrique induite de celle de M et II la deuxième forme fondamentale, l'équation (1) se traduit par

$$\langle \overline{\nabla}_u x | u \rangle = a\mathrm{II}(u, u). \tag{2}$$

En particulier, pour montrer que v est nul, il suffit de montrer que x est nul.

Soit maintenant J, la structure complexe définie par la deuxième forme fondamentale, qui, d'après nos hypothèses, est une métrique, et soit J^* sa transposée pour la métrique initiale. Utilisant (2), il est alors facile de montrer que pour tout u de TS

$$J^* \overline{\nabla}_u x + \overline{\nabla}_{Ju} x = 0. \tag{3}$$

Cette équation nous dit que si l'on munit TS de la structure presque complexe donnée par J sur l'espace horizontal et $-J^*$ sur l'espace vertical, $x(S)$

est une courbe pseudo-holomorphe. Remarquons que la section nulle nous fournit également une courbe pseudo-holomorphe et que

$$\chi(S) = I(x, 0), \tag{4}$$

où $\chi(S)$ désigne la caractéristique d'Euler de la surface et $I(x, 0)$ l'indice d'intersection de x et de la section nulle.

Par ailleurs ([2], [1]), la remarque fondamentale de Lefschetz nous dit que, en dimension 4, l'indice d'intersection en un point de deux courbes pseudo-holomorphes distinctes est positif et supérieur à l'ordre de contact en ce point. Ceci nous donne immédiatement (iv). Pour conclure dans les autres cas, il nous suffit de calculer l'ordre de contact imposé par nos conditions de normalisation et de reporter dans (4).

–Ancrer une surface en un point entraîne bien évidemment un ordre de contact supérieur ou égal à 1, ce qui démontre (iii).

– Si l'on ancre une surface en un point s et une direction u, on a

$$x(s) = 0, \quad a(s) = 0, \qquad \overline{\nabla}_u x = 0, \quad da(u) = 0. \tag{5}$$

Par ailleurs (3) entraîne que $\overline{\nabla}_{Ju} x = 0$. En particulier l'ordre de contact est supérieur ou égal à 2. Ceci donne (ii).

–Enfin ancrer une surface en un point et son espace tangent entraîne que (5) est vérifiée tout u. Si l'on dérive maintenant (2) par rapport à un vecteur u', on obtient en x et pour tout champ de vecteur u.

$$\langle \overline{\nabla}_{u'} \overline{\nabla}_u x | u \rangle = 0.$$

Comme par ailleurs d'après (5)

$$\overline{\nabla}_{u'} \overline{\nabla}_u x = \overline{\nabla}_u \overline{\nabla}_{u'} x,$$

on en déduit aisément pour tout u et u' de TS,

$$\overline{\nabla}_{u'} \overline{\nabla}_u x = 0.$$

L'ordre de contact est donc supérieur ou égal à 3. Ceci donne (i).

7.2 Existence d'immersions isométriques. Nous allons donner une preuve du théorème suivant [8, p. 413].

Théorème B (*Pogorelov*). *Soit M une variété de dimension 3, à courbure sectionnelle inférieure où égale à K_0 et m un point de M. Soit S une surface orientée homéomorphe à la sphère et à courbure supérieure strictement à K_0, s un point de S et I une isométrie de T_sS dans T_mM. Il existe alors une unique immersion isométrique qui respecte l'orientation de S dans M telle que $f(s) = m$ et $D_s f = I$.*

Par immersion isométrique (ici nécessairement elliptique) qui respecte l'orientation, nous entendons, que le vecteur normal induit par l'orientation engendre une deuxième forme fondamentale positive.

Le schéma de la démonstration est celui, classique dans ce genre de problèmes, des démonstrations des théorèmes du même ordre par Nirenberg [6], Aleksandrov [8, p. 21] et Pogorelov [8, p. 413].

On se donne donc

–une surface S orientée homéomorphe à la sphère, et un point s de S,

–une variété riemannienne (M, g) de dimension 3,

On considère alors l'espace F, constitué des immersions f de S dans M telles que

–la métrique induite f^*g est à courbure supérieure strictement à K_0,

–f respecte l'orientation.

On considère l'espace G, constitué des métriques sur S à courbure supérieure strictement supérieure à K_0 espace H constitué des couples (g_0, I) où g_0 est un point de G et I est une isométrie de (T_sS, g_0) dans TM.

Nous allons étudier l'opérateur P de F dans H qui, à une immersion, associe la métrique induite et le 1-jet de l'immersion en s:

$$P(f) = (f^*g, j^1(s)).$$

Plus précisement, nous allons montrer que P est un homéomorphisme. Pour cela, il nous suffit de montrer que

1. H est connexe,
2. P est un homéomorphisme local,
3. P est propre,
4. P est injectif.

Pour montrer 1, il suffit de montrer que G est connexe. Ceci est classique, nous pouvons renvoyer à par exemple à [3, p. 289].

7.3 Preuve de 2. Nous allons raisonner de la même manière que [4] en utilisant la catégorie des bons espaces de Fréchet que y est développée, et à laquelle appartiennent F, G et P.

L'espace tangent à F en f est l'espace des champs de vecteur v le long de $f(S)$. L'espace tangent à H en (g_0, I) où I est une isométrie de (T_s, S, g_0) dans (T_mM, g), s'identifie à l'espace des triplets (h, v_0, A), où h est une deux-forme symétrique le long de S, v_0 un vecteur de T_mM et A un endomorphisme de T_sS dans T_mM vérifiant

$$\forall w \in T_sS, \quad g(I(w), A(w)) = h(w, w).$$

Le linéarisé de P en un point f est l'opérateur $DP = (D^1P, D^2P, D^3P)$ où les $D^iP(v)$ sont donnés par

$$\begin{aligned} g_0(DP^1(v)(w), w) &= g(\nabla_{f_*w}v, f_*w), \\ D^2P(v) &= v(s), \\ D^3P(v)(w) &= \nabla_w v(s). \end{aligned} \tag{6}$$

Nous allons chercher à inverser DP en f. Pour simplifier, on identifie S et son image par f. On se donne donc (h, v_0, A) un vecteur de TH, et l'on cherche un champ de vecteur v le long de $f(S)$ vérifiant

$$\begin{aligned} g(\nabla_w, v, w) &= h(w, w), \\ v(s) &= v_0, \\ \nabla_w v(s) &= A(w). \end{aligned} \tag{7}$$

Reécrivons (7) et, pour cela, décomposons, comme dans la démonstration du théorème précédent, v en sa partie normale et sa partie tangentielle, soit

$$v = x + an.$$

Nous allons séparer les variables x et a et écrire tout d'abord un système d'équations uniquement en x. Nous obtenons tout d'abord avec les mêmes notations que dans la démonstration du théorème précédent:

$$h(w, w) = g_0(\overline{\nabla}_w x, w) + a\mathrm{II}(w, w). \tag{8}$$

Ceci nous donne de la même manière qu'en (3)

$$J^*h(w) + h(Jw) = J^*\overline{\nabla}_u x + \overline{\nabla}_{Ju}x = L(x). \tag{9}$$

De plus, en utilisant (7) et en dérivant (8), on s'aperçoit que le 2-jet de x en s est imposé par v_0, A et le 1-jet de h en s. Par ailleurs, l'opérateur L est clairement elliptique et, étant homotope au $\overline{\partial}$ de S^2, son indice est 6. De plus, nous avons vu au cours de la démonstration du théorème précédent que la dimension du noyau est inférieure ou égale à 6. Celle ci est donc exactement 6. L'opérateur L' qui associe à un champ de vecteur x, l'endomorphisme $L(x)$ et le 2-jet de x en s est donc de noyau nul et surjectif.

Nous pouvons raisonner comme en [4] et inverser notre opérateur L' qui est un bon opérateur, puisque obtenu à partir d'un opérateur elliptique. On résout ensuite algébriquement (7) pour obtenir a. Nous obtenons ainsi une bonne famille d'opérateurs DP. On conclut enfin à l'aide du théorème de Nash-Moser [4].

Nous ne faisons ici que suivre servilement [4, p. 238], où la démonstration est faite lorsque M est l'espace euclidien, et utiliser l'équation (3) de la démonstration du Théorème C, qui nous simplifie la vie.

7.4 Preuve de 3. C'est surtout à cette partie de la démonstration de Pogorelov que nous avons apporté une amélioration. Nos résultats nous permettent d'éviter les longs calculs nécéssaires à l'obtention d'une majoration a-priori de la courbure moyenne [8, pp. 351–365 et 401–413]. Nous utiliserons ici le Théorème E. On se donne donc une famille d'immersions (f_n) de S dans M telle que, d'une part, $(f_n(s))$ converge et, d'autre part, les métriques induites sont à courbure strictement supérieure à K_0 et convergent C^∞ vers une métrique g_0. Nous voulons montrer qu'il existe une sous-suite C^∞ convergente.

Nous pouvons, tout d'abord, à l'aide du théorème d'Ascoli, extraire de (f_n), une sous-suite convergeant C^0 vers une application f_0, et notée de la même manière. Ensuite notre condition sur la courbure entraîne que

$$\operatorname{diam}(f_n(S)) \leq C_0,$$

où C_0 vaut $+\infty$ si K_0 est négatif, et $2\pi/\sqrt{K_0}$, si K_0 est positif. Supposons maintenant que (f_n) ne converge pas C^∞ au voisinage d'un point x de S et notons $M = f_0(x)$. La surface S étant simplement connexe nous pouvons relever notre famille d'immersions f_n en des immersions $\bar{f}_n$ de S dans la boule B de rayon C_0 de T_mM munie de la métrique induite par l'exponentielle.

On applique maintenant le Théorème E à la famille $\bar{f}_n$. D'après ce théorème, cette suite ne convergeant pas C^∞, il existe une géodésique γ pour g_0, envoyée isométriquement par $\bar{f}_0$ dans une géodésique γ de B. Nous aurions alors une géodésique complète de B passant par 0, or de telles géodésiques sont des droites, ce qui nous fournit la contradiction.

7.5 Preuve de 4. Ici nous allons grosso-modo suivre Pogorelov. Pour l'instant, nous avons montré que P est propre et un homéomorphisme local de F dans H. Montrons que P est injectif.

Premier cas. M est à courbure constante. On peut supposer que M est simplement connexe pour simplifier. On se fixe alors un vecteur u de T_sS, un point m de M, un plan P orienté de T_mM et un vecteur u' de P. On considère ensuite F_0 le sous-ensemble de F constitué des immersions f telles que

– $f(s) = m$,

– $Df(s)$ envoie T_sS sur P en respectant l'orientation,

– $Df(u)$ est dans la direction de u'.

Ce que nous avons montré précédemment entraîne que l'opérateur, qui associe à un élement de F_0, la métrique induite, est propre et est un homéomorphisme local. Il nous faut montrer que cet opérateur est injectif. Pour cela, il nous suffit de remarquer que d'une part F_0 est connexe, ce qui se démontre à l'aide de l'addition de Minkowski des convexes dans un modèle projectif de M, et d'autre part que G est contractile, pour ce point nous renvoyons toujours à [3, p. 289].

Deuxième cas. Soit donc f_0 et f_1 deux éléments de F induisant la même métrique et ayant le même 1-jet en s.

Soit x un point de M n'appartenant ni à $f_0(S)$ ni à $f_1(S)$. On pertube alors la métrique de M au voisinage de x de façon à ce qu'elle soit à courbure constante prés de x et toujours à courbure inférieure à K_0.Nous avons montré que P était un revêtement, si maintenant nous prenons une métrique de très petit diamètre et des conditions initiales en x, une immersion isométrique associée est alors incluse dans un petit voisinage de x, en particulier d'après ce qui précède elle est unique. Ceci entraîne que P est un homéomorphisme et donc que $f_0 = f_1$.

8. Preuve du Théorème A

Rappelons son énoncé,

Théorème A. *Soit M une variété simplement connexe de dimension 3 à courbure sectionelle inférieure où égale à K_0 et m un point de M. Soit U un domaine de $\mathbf{R}^2$ muni d'une métrique complète et à courbure supérieure strictement à K_0, s un point de S et I une isométrie de T_sS dans T_mM. Il existe alors un plongement propre isométrique qui respecte l'orientation de S dans M telle que $f(s) = m$ et $D_sf = I$.*

Une telle immersion n'est pas nécessairement unique. Ce théorème généralise un théorème analogue obtenu lorsque M est à courbure constante (voir [8, *p.* 38]*).*

Preuve. Commençons par remarquer qu'il existe une suite U_n d'ouverts de S tels que

(i) U_n est inclus dans U_{n+1},

(ii) S est la réunion des U_n,

(iii) chaque U_n se plonge isométriquement dans une 2-sphère S_n munie d'une métrique à courbure supérieure à K_0.

En effet, d'après le théorème précedemment cité, S se plonge isométriquement dans l'espace M_0 simplement connexe à courbure constante K_0 comme le bord d'une surface convexe. Notons f ce plongement et B_n

la boule de rayon $1/n$ autour de $f(s)$ dans M_0. Il est alors clair que les ouverts définis par $U_n = f^{-1}(B_n \cap f(S))$ vérifient les conditions exigées.

On utilise ensuite le Théorème B pour plonger isométriquement S_n dans M avec les conditions requises en s. Remarquons que les images sont des bords de convexes. Notons f_n le plongement de U_n qui s'en déduit. Nous pouvons alors d'après le théorème d'Ascoli en extraire une sous-suite convergeant C^0 sur tout compact vers une application f_0. Il nous reste alors simplement à montrer que (f_n) converge C^∞ sur tout compact vers f_0, qui sera le plongement que nous cherchons.

Soit donc x un point de S, on considère alors la boule B de M de rayon r autour de $f_0(x)$, où r est un réel vérifiant la Proposition 5.2. On considère également b la boule de S de rayon $1/2r$ autour de x. Pour n suffisamment grand, $f_n(b)$ est inclus dans B. De plus comme nous l'avons déjà remarqué $f_n(b)$ est inclus dans le bord d'un convexe.

L'application N de $f_n(b)$ dans le bord de B définie en 5.3 est alors clairement injective. La proposition 5.4 nous permet alors d'affirmer que l'intégrale de la courbure moyenne de $f_n(b)$ est uniformément majorée. D'après le Théorème D, (f_n) converge C^∞ vers f_0 au voisinage de x. C'est ce qu'il fallait démontrer.

Références

[1] D. Bennequin, *Problèmes elliptiques, surfaces de Riemann et structures symplectiques*, Séminaire Bourbaki, No. 657, 1986.

[2] M. Gromov, *Pseudo-holomorphic curves on almost complex manifold*, Invent. Math. **82** (1985) 307–347.

[3] ——, *Partial differential relations*, Springer, Berlin, 1986.

[4] R. S. Hamilton, *The inverse function theorem of Nash and Moser*, Bull. Amer. Math. Soc. (N.S.) 7 (1982) 65–222.

[5] F. Labourie, *Limite d'hypersurfaces localement convexes*, Invent. Math., a paraître.

[6] L. Nirenberg, *The Weyl and Minkowski problem in differential geometry in the large*, Comm. Pure Appl. Math. **6** (1953) 337–394.

[7] P. Pansu, *Notes sur la démonstration du théorème de compacité des courbes cusps de Gromov*, preprint, à paraître.

[8] A. V. Pogorelov, *Extrinsic geometry of convex surfaces*, Israel Program for Scientific Translation, Jerusalem, 1973.

[9] M. Spivak, *A comprehensive introduction to differential geometry*, Publish or Perish, Boston, 1975.

ECOLE POLYTECHNIQUE, PALAISEAU