

Sur le nombre de réflexions pleines dans les groupes de Coxeter finis

F. Chapoton

Résumé

On considère différents aspects d'une formule dans les groupes de Coxeter finis.

Abstract

Several aspects of a formula which counts full reflections in finite Coxeter groups are considered.

0 Brief English introduction

This article deals with a product formula defined for any finite Coxeter group W in terms of its exponents and which counts the number of full reflections in W . By a full reflection, we mean a reflection whose reduced decompositions involve all the simple reflections of the Coxeter group. This fact has so far no other proof than a case by case check that the formula (1) works.

In the first part of this article, a conjectural interpretation of the formula is given as an equality of virtual characters of the Coxeter group and this conjecture is proved for type A, B, I . This involves on one hand a direct sum of copies of the regular representation and on the other hand the tensor product of two virtual characters. The first of these characters is given by the action of the Coxeter group on the set of half-spaces that it defines. The other one is related to the cohomology of the complex hyperplane arrangement.

Received by the editors July 2004.

Communicated by J. Tits.

1991 *Mathematics Subject Classification* : 20F55 ; 06A.

Key words and phrases : Coxeter group, full reflections, exponents, antichain.

It may be possible to find a better explanation of formula (1) as induced by a quasi-isomorphism of complexes of modules. Such a construction may well be the key to a uniform proof.

The latter part of the paper is related to another occurrence of the formula, counting some subset of the antichains in the poset of positive roots in a finite root system. More precisely, it is shown that the number of antichains which do not contain any simple root and have the maximal cardinality w.r.t. this property is given again by formula (1). This should be related to the previous instance by a conjectural duality on antichains [14].

The last section is devoted to a conjecture on a possible relation between some enumeration of antichains and some enumeration of faces of the generalized associahedra of Fomin and Zelevinsky [6]. The formula which is the theme of this paper is involved as a corner coefficient.

1 Introduction

Cet article tourne autour d'une formule qui définit, pour chaque groupe de Coxeter fini W , un entier positif f_W dépendant seulement de la donnée des exposants de ce groupe de Coxeter. On peut vérifier facilement, au cas par cas, que cet entier est le nombre de réflexions dans W qui sont pleines, *i.e.* dont toutes les décompositions réduites font intervenir tous les générateurs de Coxeter.

Cet article comprend deux parties de natures différentes. Dans la première partie, on cherche à obtenir une catégorification de la formule, c'est à dire à l'interpréter comme une égalité de dimensions provenant d'un isomorphisme entre deux modules sur le groupe de Coxeter. On obtient une conjecture qui décrit précisément les modules qui doivent entrer en jeu, puis on démontre cette conjecture dans les cas des types A, B et I .

La seconde partie est consacrée à une autre apparition de la formule dans le contexte des systèmes de racines. Dans le cas des systèmes de racines, les réflexions sont en bijection avec les racines positives. Par cette bijection, les réflexions pleines correspondent aux racines positives qui sont pleines, au sens où leur expression dans la base des racines simples n'a pas de coefficient nul. Par une dualité conjecturale sur l'ensemble des antichaînes du poset des racines positives, les racines pleines devraient être en bijection avec les antichaînes sans racines simples de cardinal maximal. On montre que le nombre de telles antichaînes est bien égal au nombre de réflexions pleines. On propose ensuite une conjecture reliant le polynôme H qui énumère les antichaînes selon leur cardinal et le nombre de racines simples qu'elles contiennent à un polynôme F similaire introduit précédemment [5]. Par définition, un des coefficients de H est donné par la formule qui nous intéresse ici.

2 Réflexions pleines

Soit W un groupe de Coxeter fini de rang n et $S = \{s_1, \dots, s_n\}$ l'ensemble des réflexions simples de W . Une réflexion σ dans W est dite *pleine* si toute décomposition réduite de σ fait intervenir tous les éléments de S . Dans le cas où W est le groupe de Weyl d'un système de racines cristallographique, les réflexions pleines correspondent

aux racines positives de support plein, *i.e.* dont l'expression dans la base des racines simples n'a pas de coefficient nul.

On vérifie aisément au cas par cas la proposition suivante, en utilisant par exemple les tables de [3].

Proposition 2.1. *Le nombre f_W de réflexions pleines dans W est donné par la formule*

$$f_W = \frac{1}{|W|} (nh) \prod_{i=2}^n (e_i - 1), \tag{1}$$

où $|W|$ est l'ordre du groupe W , h est le nombre de Coxeter et e_1, \dots, e_n sont les exposants de W . Explicitement, on obtient :

A_n	B_n	D_n	E_6	E_7	E_8	F_4	G_2	H_3	H_4	$I_2(h)$
1	n	$n - 2$	7	16	44	10	4	8	42	$h - 2$

La formule (1) peut se mettre sous la forme suivante, plus suggestive.

$$(nh) \prod_{i=2}^n (e_i - 1) = f_W |W|. \tag{2}$$

Il est alors naturel de chercher une interprétation de la formule (2) en termes d'un isomorphisme entre W -modules ou d'une égalité entre caractères du groupe W . Comme f_W est un entier, on peut interpréter le membre de droite comme une somme directe de copies de la représentation régulière Reg de W . Le membre de gauche est plus subtil.

On appelle *racine* un demi-espace délimité par un des hyperplans de W dans l'espace euclidien. Soit R la représentation de W sur l'ensemble des racines. Par une formule classique, la dimension de R est nh . Ceci fournit donc un W -module susceptible de remplacer le premier facteur du membre de gauche de la formule (2).

Il reste donc à décrire un candidat pour le second facteur. Soit G la représentation de W sur la cohomologie du complémentaire du complexifié de l'arrangement d'hyperplans associé à W . Alors d'après [4], la dimension graduée du W -module gradué G est donnée par

$$\sum_{k=0}^n \dim G_k(-t)^k = \prod_{i=1}^n (1 - te_i). \tag{3}$$

On utilise alors [13, Lemma 3.13] qui donne une différentielle acyclique naturelle ∂ sur l'algèbre de Orlik-Solomon d'un arrangement d'hyperplans non vide [12]. Le Lemme suivant en est une conséquence immédiate.

Lemme 2.2. *Le caractère de G est divisible par $1 - t$ et le quotient est le caractère d'une représentation graduée.*

Remarque : Comme ∂ est en fait une dérivation pour le produit en cohomologie, le quotient $\frac{G}{1-t}$ a une structure d'algèbre graduée, liée dans le cas des groupes symétriques à la cohomologie des espaces de modules de courbes de genre 0 (voir [7]).

Soit G' le W -module virtuel obtenu en faisant $t = 1$ dans le W -module gradué $\frac{G}{1-t}$. Par la formule (3), la dimension (virtuelle) de G' est $\prod_{i=2}^n (1 - e_i)$.

On a donc défini des W -modules R et Reg et un W -module virtuel G' qui vérifient une égalité de dimensions équivalente à la formule (2) :

$$(\dim R)(\dim G') = (-1)^{n-1} f_W \dim(\text{Reg}). \quad (4)$$

Cette égalité devrait être une conséquence de la conjecture suivante.

Conjecture 2.3. *On a une égalité de caractères :*

$$R \otimes G' = (-1)^{n-1} f_W \text{Reg}. \quad (5)$$

On peut peut-être espérer un énoncé plus précis, comme l'existence d'une différentielle sur le W -module gradué

$$R \otimes \frac{G}{1-t}, \quad (6)$$

dont l'homologie serait concentrée en degré $n-1$ et isomorphe en ce degré à une somme de f_W copies de la représentation régulière.

Si une telle différentielle existe, il doit exister un W -module dont le caractère est donné par

$$\frac{1}{1-t} \left(R \otimes \frac{G}{1-t} - (-t)^{n-1} f_W \text{Reg} \right). \quad (7)$$

Les trois sections suivantes sont consacrées à la preuve de la conjecture 2.3 pour les groupes symétriques, les groupes hyperoctaédraux et les groupes diédraux respectivement. Dans le cas des groupes symétriques, on montre non seulement la conjecture 2.3, mais aussi que la formule (7) définit bien un module gradué.

3 Le cas des groupes symétriques

Dans cette section, on démontre la conjecture 2.3 dans le cas du groupe de Coxeter de type A_{n-1} , qui est le groupe symétrique \mathfrak{S}_n sur n lettres. On utilise des résultats de la théorie des opérades. Une autre preuve est probablement possible, dans l'esprit de celle donnée plus loin pour le type B .

3.1 Le caractère de R

Étudions d'abord le caractère de R . Soit N la représentation naturelle de dimension n , *i.e.* l'action de \mathfrak{S}_n par permutations de l'ensemble $\{1, \dots, n\}$. Alors on a clairement un isomorphisme $N \otimes N \simeq N \oplus R$. Le caractère χ_N de N est facile à décrire. Si λ est une partition de n , on note m_λ le nombre de parts de taille 1 dans λ . Sur la classe de conjugaison C_λ associée à une partition λ , on a $\chi_N(C_\lambda) = m_\lambda$. Par conséquent, on obtient $\chi_R(C_\lambda) = m_\lambda^2 - m_\lambda$.

Lemme 3.1. *Le caractère χ_R s'annule sur la classe de conjugaison C_λ si et seulement si m_λ est au plus égal à 1.*

3.2 Le caractère de G'

Pour démontrer que le caractère de $R \otimes G'$ est un multiple du caractère de la représentation régulière, il suffit donc de montrer que le caractère $\chi_{G'}$ de G' vérifie la condition suivante :

$$\text{Si } m_\lambda \geq 2 \text{ et } \lambda \neq 1^n \text{ alors } \chi_{G'}(C_\lambda) = 0. \tag{8}$$

Par définition de G' , ceci est équivalent à la condition :

$$\text{Si } m_\lambda \geq 2 \text{ et } \lambda \neq 1^n \text{ alors } \chi_G(C_\lambda) \text{ a une racine double en } t = 1. \tag{9}$$

On passe au langage des fonctions symétriques, en identifiant un caractère à une fonction symétrique de la manière habituelle. Pour $n \geq 1$, on note p_n la fonction symétrique “somme des puissances” d’ordre n . L’assertion précédente est donc équivalente au Lemme suivant.

Lemme 3.2. *La valeur de*

$$\frac{1}{1-t} \partial_{p_1}^2 \chi_G \tag{10}$$

en $t = 1$ est proportionnelle à la fonction symétrique p_1^n .

La preuve de ce Lemme est obtenue dans la section 3.4.

3.3 Quelques généralités

Pour la commodité du lecteur, on présente ici brièvement quelques notions utilisées plus loin dans le texte.

Un \mathfrak{S} -module M est une collection $(M_n)_{n \geq 1}$ où M_n est un module sur le groupe symétrique \mathfrak{S}_n . Les \mathfrak{S} -modules forment une catégorie pour les morphismes évidents. A chaque \mathfrak{S} -module correspond un foncteur dit “analytique” qui associe à un espace vectoriel V l’espace vectoriel

$$M(V) = \bigoplus_{n \geq 1} M_n \otimes_{\mathfrak{S}_n} V^{\otimes n}. \tag{11}$$

La composition de ces foncteurs analytiques admet une description en termes de \mathfrak{S} -modules, qui définit un produit tensoriel noté \circ sur la catégorie des \mathfrak{S} -modules :

$$(M \circ N)(V) \simeq M(N(V)). \tag{12}$$

Une opérade est essentiellement un monoïde dans cette catégorie monoïdale [11]. A chaque \mathfrak{S} -module, on peut associer son caractère $\text{Ch}(M)$, qui est une fonction symétrique. A la composition des \mathfrak{S} -modules correspond alors le pléthysme des fonctions symétriques, également noté \circ :

$$\text{Ch}(M \circ N) = \text{Ch}(M) \circ \text{Ch}(N). \tag{13}$$

Le pléthysme est linéaire à gauche seulement et peut être considéré comme un analogue de la composition des séries formelles en une variable, voir [9].

Il est connu que pour toutes fonctions symétriques f et g , on a

$$\partial_{p_1}(f \circ g) = \partial_{p_1}g((\partial_{p_1}f) \circ g). \tag{14}$$

3.4 Séries génératrices

Soit Gerst la série génératrice des caractères χ_G :

$$\text{Gerst} = \sum_{n \geq 1} \chi_{G^n}, \quad (15)$$

où G^n est le module G pour le groupe \mathfrak{S}_n . Par convention, G^1 est le module trivial. On va utiliser la propriété cruciale suivante :

$$\partial_{p_1} \text{Gerst} = \frac{1}{(1 + p_1 t)^2} (1 + \text{Gerst}). \quad (16)$$

Démonstration. Pour démontrer cette relation, on utilise la description de Gerst fournie par la théorie des opérades. En effet, le complémentaire du complexifié de l'arrangement de type A_{n-1} est homotope à l'espace des petits disques, formé par l'ensemble des plongements disjoints de n disques dans le disque unité du plan complexe. Il en résulte un isomorphisme en homologie. Mais les petits disques ont une structure d'opérade topologique et leur homologie est l'opérade dite de Gerstenhaber, voir [15].

On sait par ailleurs que le foncteur analytique sous-jacent à l'opérade de Gerstenhaber est le composé des foncteurs analytiques Com sous-jacent à l'opérade des algèbres commutatives et du foncteur $\Sigma_t \text{Lie}$ sous-jacent à la suspension de l'opérade des algèbres de Lie, voir par exemple [10, 7].

Soit Com la somme $\sum_{n \geq 1} h_n$ des fonctions symétriques complètes, et soit $\Sigma_t \text{Lie}$ la fonction symétrique

$$\sum_{n \geq 1} \frac{(-t)^{n-1}}{n} \sum_{d|n} \mu(d) p_d^{n/d}, \quad (17)$$

où μ est la fonction de Möbius. On a donc :

$$\text{Gerst} = \text{Com} \circ (\Sigma_t \text{Lie}), \quad (18)$$

où \circ est le pléthysme. De plus, on démontre facilement que

$$\partial_{p_1} \text{Com} = 1 + \text{Com} \quad \text{et} \quad \partial_{p_1} \Sigma_t \text{Lie} = \frac{1}{1 + p_1 t}. \quad (19)$$

On en déduit la relation (16), en utilisant la relation (14). Une autre preuve de la relation (16) est possible en utilisant la formule explicite suivante [7, Prop. 5.5] :

$$\text{Gerst} = \prod_{n=1}^{\infty} (1 + t^n p_n)^{R_n(t)} - 1 \quad \text{où} \quad R_n(t) = \frac{1}{n} \sum_{d|n} \frac{\mu(n/d)}{t^d}. \quad (20)$$

■

On déduit maintenant de la formule (16), et du fait que ∂_{p_1} est une dérivation pour le produit, que

$$\partial_{p_1}^2 \text{Gerst} = \frac{1-t}{(1+p_1 t)^2} (1 + \text{Gerst}). \quad (21)$$

Par le Lemme 2.2, la valeur de Gerst en $t = 1$ est p_1 . On a donc

$$\left(\frac{1}{1-t} \partial_{p_1}^2 \text{Gerst} \right) \Big|_{t=1} = \frac{1}{(1+p_1)^2} (1+p_1). \tag{22}$$

Comme cette expression est une fonction de p_1 seulement, on a démontré le Lemme 3.2 et donc la conjecture 2.3 pour les groupes de Coxeter de type A . Mais on peut obtenir plus, en calculant la série génératrice correspondant à la formule (7).

On remarque d'abord que le produit tensoriel par le module R est donné par l'opérateur $p_1^2 \partial_{p_1}^2$. En effet, le produit tensoriel par N est donné par l'opérateur $p_1 \partial_{p_1}$ et on a $N \otimes N = N \oplus R$.

La série génératrice des modules $R \otimes \frac{G}{1-t}$ est donc

$$p_1^2 \partial_{p_1}^2 \left(\frac{1}{1-t} (\text{Gerst} - p_1) \right). \tag{23}$$

En enlevant la série correspondant à $(-t)^{n-1} f_W \text{Reg}$, on obtient

$$p_1^2 \partial_{p_1}^2 \left(\frac{1}{1-t} (\text{Gerst} - p_1) \right) - \frac{p_1^2}{1+tp_1}. \tag{24}$$

En remplaçant la dérivée seconde de Gerst par son expression (21) et en simplifiant, on obtient donc

$$p_1^2 \left(\frac{\text{Gerst} + 1}{(1+tp_1)^2} - \frac{1}{1+tp_1} \right), \tag{25}$$

soit encore

$$\frac{p_1^2}{(1+tp_1)^2} ((\text{Gerst} - p_1) + (1-t)p_1). \tag{26}$$

Cette série génératrice est divisible par $1-t$ et le quotient

$$\frac{p_1^2}{(1+tp_1)^2} \left(\frac{\text{Gerst} - p_1}{1-t} + p_1 \right) \tag{27}$$

est bien la série génératrice d'une collection de modules gradués, et pas seulement de modules virtuels. Par conséquent, la formule (7) est bien le caractère d'un module gradué.

4 Groupes hyperoctaédraux

On considère ici le cas du groupe de Coxeter W de type B_n . On renvoie à [8] pour la description des classes de conjugaison de W par des paires de partitions.

Soit R le module des racines. Si $(\epsilon_i)_{i \in \{1, \dots, n\}}$ est une base orthonormale, les racines sont $\pm \epsilon_i$ et $\pm \epsilon_i \pm \epsilon_j$ pour $i \neq j$. Commençons par décrire les classes de conjugaison non triviales de W sur lesquelles le caractère de R est non nul, *i.e.* qui ont au moins un point fixe dans R . Si un élément g du groupe fixe la racine ϵ_i , il doit avoir un point fixe i , *i.e.* un cycle positif de longueur 1. Si g fixe une racine $\epsilon_i - \epsilon_j$, alors il doit vérifier $g(i) = -j$ et $g(j) = -i$. De même, si g fixe une racine $\epsilon_i + \epsilon_j$, il doit vérifier $g(i) = j$ et $g(j) = i$. Dans ces deux cas, g a un cycle positif de longueur 2.

En conclusion, on a obtenu le Lemme suivant.

Lemme 4.1. *Le caractère de g sur R est non nul si et seulement si g a un cycle positif de longueur 1 ou un cycle positif de longueur 2.*

On utilise ensuite la description de la cohomologie due à Lehrer [8, Thm. 5.6]. On change t en $-t$ dans les résultats de Lehrer pour respecter nos conventions. En particulier, la valeur du caractère de la cohomologie sur un élément g ,

$$\chi(g) = \sum_{k=0}^n \text{tr}_g(G_k)(-t)^k, \quad (28)$$

est décrite dans [8] comme un produit de facteurs explicites ne dépendant que de la décomposition en cycles positifs et négatifs de g .

Si un élément g de W ayant un cycle positif de longueur 1 est non trivial, alors g possède soit un cycle négatif soit un cycle positif de longueur au moins 2, *i.e.* g possède au moins deux cycles de longueurs ou signes différents. D'après les résultats de [8], le polynôme $\chi(g)$ est divisible par $1-t$ autant de fois qu'il y a de cycles dans g . On en déduit que le caractère de G' est nul sur la classe de g .

Si maintenant g a un cycle positif de longueur 2, on déduit de [8] que le caractère de G sur la classe de g est divisible par $(1-t)^2$. Par conséquent, le caractère de G' sur la classe de g est nul.

On a donc montré le Lemme suivant.

Lemme 4.2. *Soit g un élément non trivial de W qui a un cycle positif de longueur 1 ou un cycle positif de longueur 2. Alors le caractère de G' est nul sur la classe de conjugaison de g .*

Les deux Lemmes précédents entraînent la conjecture 2.3 pour le type B_n .

5 Groupes diédraux

On considère maintenant le cas des groupes diédraux. Soit W un groupe de type $I_2(h)$.

Si h est impair, alors le module R donné par l'action de W sur les racines est isomorphe à la représentation régulière Reg , donc la conjecture 2.3 est trivialement vraie, car les dimensions sont égales.

Supposons donc h pair. Dans ce cas, un élément non trivial de W a une trace non nulle dans le module R des racines si et seulement si c'est une réflexion. Il faut donc montrer que le caractère de G' s'annule sur les réflexions. Soit donc H_0 un hyperplan fixé parmi les hyperplans de W et soient H_1, \dots, H_{h-1} les autres hyperplans dans un ordre cyclique. Soit σ la réflexion par rapport à H_0 .

Comme le rang du groupe de Coxeter W est 2, on dispose d'une description explicite du module gradué $\frac{G}{1-t}$ comme suit.

En degré 0, le module a pour base la fonction 1, donc la trace de σ est 1.

En degré 1, le module est le noyau de la différentielle ∂ de degré -1 sur la cohomologie en degré 1. On rappelle [13] que cette différentielle est définie par $\partial(\omega_H) = 1$ pour tout hyperplan H de l'arrangement, où ω_H est la forme différentielle logarithmique associée à H . Par conséquent, ce module a une base $O_i = \omega_{H_0} - \omega_{H_i}$ pour

$i = 1, \dots, h - 1$. L'action de σ est donnée par $\sigma(O_i) = O_{h-i}$. Il y a un seul point fixe qui est $O_{h/2}$, donc la réflexion σ a pour trace 1.

Au total, la trace de la réflexion σ sur G' est donc nulle, ce qui démontre la conjecture 2.3 pour les groupes diédraux.

6 Antichaînes sans racines simples

On considère maintenant une autre apparition de la formule (1) dans le contexte des systèmes de racines.

Soit Φ un système de racines fini de rang n , $\Phi_{>0}$ l'ensemble des racines positives et $\Pi = \{\alpha_i\}_{i \in I}$ l'ensemble des racines simples. Soit W le groupe de Weyl associé. Il existe un ordre partiel naturel \leq sur $\Phi_{>0}$ défini par $\alpha \leq \beta$ si $\beta - \alpha$ est une combinaison linéaire à coefficients positifs de racines simples.

Une *antichaîne* dans un poset P est une partie de P formée d'éléments tous incomparables pour \leq . On note $\mathcal{A}(P)$ l'ensemble des antichaînes de P . Par la suite, le poset considéré est toujours $\Phi_{>0}$ pour la relation \leq .

Les antichaînes dans ce poset des racines positives ont été beaucoup étudiés récemment [1, 2, 6]. En particulier, on sait que leur nombre est égal au nombre de Catalan généralisé associé au système de racines Φ . Le lemme suivant est bien connu.

Lemme 6.1. *Le cardinal maximal d'une antichaîne est n . L'unique antichaîne de cardinal n est $A = \{\alpha_i\}_{i \in I}$.*

On constate au cas par cas (voir [2]) que le nombre d'antichaînes de cardinal k est égal au nombre d'antichaînes de cardinal $n - k$, pour tout k . Conjecturalement, ceci doit être une conséquence de l'existence d'une dualité sur l'ensemble des antichaînes qui envoie les antichaînes de cardinal k sur les antichaînes de cardinal $n - k$. Une dualité ayant cette propriété a été construite par Panyushev pour les types A, B et C dans [14].

Soit A une antichaîne. On définit le *type* de A noté $t(A)$ qui est une sous-partie de l'ensemble des arêtes du diagramme de Dynkin. Une arête (i, j) est dans $t(A)$ si et seulement si il existe une racine α dans A telle que i et j soient dans le support de α .

Panyushev propose de chercher une dualité ayant des propriétés plus fortes, cf. sa conjecture [14, Conj. 6.1]. On peut reformuler en partie ses hypothèses sous la forme suivante : la dualité doit préserver le type.

Si le type $t(A)$ est le diagramme de Dynkin complet, on dit que A est de type plein. Comme cas particulier de la conjecture d'existence d'une dualité respectant le type, on a la conjecture ci-dessous.

Conjecture 6.2. *Il existe une bijection naturelle entre les antichaînes de cardinal 1 de type plein et les antichaînes de cardinal $n - 1$ de type plein.*

Une antichaîne A de cardinal 1 est juste une racine positive α . Une racine positive α est de type plein comme antichaîne si et seulement si elle est de support plein, *i.e.* correspond à une réflexion pleine. Il y a donc une bijection entre antichaînes de cardinal 1 de type plein et réflexions pleines.

Lemme 6.3. *Une antichaîne A de cardinal $n - 1$ est de type plein si et seulement si elle ne contient pas de racine simple.*

Démonstration. C'est clairement vrai si $n = 1$. Supposons donc $n \geq 2$. Si une antichaîne A contient une racine simple α_i , elle ne peut contenir aucune autre racine ayant α_i dans son support. Par conséquent toute arête de la forme (i, j) ne peut pas être couverte par A . Une telle arête existe car n est au moins 2, donc A n'est pas de type plein.

Réciproquement, si A est une antichaîne de cardinal $n - 1$ de type non plein, il existe une arête non couverte par A . Considérons le diagramme de Dynkin non connexe obtenu en enlevant cette arête. Il existe une partition de ce diagramme en deux parties non vides de cardinal p et q avec $p + q = n$, sans arêtes entre elles. Alors A est l'union disjointe de deux antichaînes A_1 et A_2 contenues respectivement dans les posets associés à ces deux diagrammes. Par le Lemme 6.1, le cardinal de A_1 est inférieur ou égal à p et celui de A_2 est inférieur ou égal à q . Quitte à échanger les indices 1 et 2, on peut supposer que A_1 est une antichaîne de cardinal p . Par le Lemme 6.1, A_1 est donc formée de racines simples. Donc A contient au moins une racine simple. ■

La conjecture 6.2 se reformule donc ainsi.

Conjecture 6.4. *Il existe une bijection naturelle entre les racines pleines et les antichaînes de cardinal $n - 1$ sans racines simples.*

Vérifions que cette relation est vraie au niveau des cardinaux de ces ensembles.

Proposition 6.5. *Le nombre d'antichaînes de cardinal $n - 1$ sans racines simples est égal au nombre de réflexions pleines, donc donné par la formule (1).*

Démonstration. On utilise les polynômes de Narayana généralisés définis par

$$N_{\Phi}(x) = \sum_{k=0}^n n_k(\Phi)x^k, \quad (29)$$

où $n_k(\Phi)$ est le nombre d'antichaînes de cardinal k dans le poset $(\Phi_{>0}, \leq)$. On constate au cas par cas sur les résultats d'Athanasias [2] que ces polynômes sont symétriques, *i.e.* vérifient la relation

$$N_{\Phi}(x) = x^n N_{\Phi}(1/x). \quad (30)$$

Considérons maintenant les polynômes

$$P_{\Phi}(x) = \sum_{k=0}^n p_k(\Phi)x^k, \quad (31)$$

où $p_k(\Phi)$ est le nombre d'antichaînes pleines de cardinal k dans le poset $(\Phi_{>0}, \leq)$.

Les polynômes N et P sont en fait naturellement définis pour des diagrammes de Dynkin non nécessairement connexes et sont alors donnés par le produit des polynômes associés aux composantes connexes.

Par définition de la notion de type, on a la relation suivante entre les polynômes N et P :

$$N_\Phi = \sum_E P_{\Phi[E]}, \tag{32}$$

où la somme porte sur l'ensemble des parties E de l'ensemble des arêtes du diagramme de Dynkin de Φ et $\Phi[E]$ désigne le diagramme de Dynkin non nécessairement connexe obtenu en ne gardant que les arêtes dans E .

Par conséquent, par inversion de Möbius, on peut exprimer les polynômes P en fonction des polynômes N . On en déduit que

$$P_\Phi(x) = x^n P_\Phi(1/x). \tag{33}$$

En particulier, le nombre des antichaînes de type plein de cardinal $n - 1$ est égal au nombre de réflexions pleines. ■

7 Une conjecture énumérative

On conjecture ici une relation entre le polynôme énumérateur F des associaèdres généralisés introduit dans [5] et un polynôme énumérateur H des antichaînes selon deux paramètres. Un des coefficients de H est le nombre de la formule (1).

Soit Φ un système de racines. Considérons le polynôme suivant :

$$H = \sum_{k,\ell} h_{k,\ell} x^k y^\ell, \tag{34}$$

où $h_{k,\ell}$ est le nombre d'antichaînes de cardinal k contenant ℓ racines simples. En particulier $h_{n-1,0}$ est le nombre d'antichaînes de cardinal $n - 1$ sans racines simples considéré précédemment.

On rappelle brièvement la définition du polynôme F . Dans [6], Fomin et Zelevinsky ont introduit pour chaque système de racines un complexe simplicial $\Delta(\Phi)$ dont l'ensemble des sommets est l'ensemble des racines presque positives $\Phi_{\geq -1} = \Phi_{>0} \sqcup (-\Pi)$. On définit le polynôme F par la formule

$$F(x, y) = \sum_{k=0}^n \sum_{\ell=0}^n f_{k,\ell} x^k y^\ell, \tag{35}$$

où $f_{k,\ell}$ est le nombre de simplexes de $\Delta(\Phi)$ ayant exactement k sommets dans $\Phi_{>0}$ et ℓ sommets dans $-\Pi$. Ce polynôme a été défini et étudié dans [5].

Conjecture 7.1. *On a la relation suivante :*

$$H(x, y) = (1 - x)^n F(x/(1 - x), xy/(1 - x)). \tag{36}$$

On peut aisément vérifier cette conjecture pour les systèmes de racines de petit rang.

Références

- [1] C. A. Athanasiadis. Generalized Catalan numbers, Weyl groups and arrangements of hyperplanes. *Bull. London Math. Soc.*, 36(3) :294–302, 2004.
- [2] C. A. Athanasiadis. On a refinement of the generalized Catalan numbers for Weyl groups. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 357(1) :179–196 (electronic), 2005.
- [3] N. Bourbaki. *Éléments de mathématique. Fasc. XXXIV. Groupes et algèbres de Lie. Chapitre IV, Chapitre V, Chapitre VI*. Hermann, 1968.
- [4] E. Brieskorn. Sur les groupes de tresses [d’après V. I. Arnold]. In *Séminaire Bourbaki, 24ème année (1971/1972), Exp. No. 401*, pages 21–44. Lecture Notes in Math., Vol. 317. Springer, 1973.
- [5] F. Chapoton. Enumerative properties of generalized associahedra. *Séminaire Lotharingien de Combinatoire*, 51, 2004.
- [6] S. Fomin and A. Zelevinsky. Y -systems and generalized associahedra. *Ann. of Math. (2)*, 158(3) :977–1018, 2003.
- [7] E. Getzler. Operads and moduli spaces of genus 0 Riemann surfaces. In *The moduli space of curves (Texel Island, 1994)*, volume 129 of *Progr. Math.*, pages 199–230. Birkhäuser Boston, 1995.
- [8] G. I. Lehrer. On hyperoctahedral hyperplane complements. volume 47 of *Proc. Sympos. Pure Math.*, pages 219–234. Amer. Math. Soc., 1987.
- [9] I. G. Macdonald. *Symmetric functions and Hall polynomials*. The Clarendon Press Oxford University Press, New York, 1979. Oxford Mathematical Monographs.
- [10] M. Markl. Distributive laws and Koszulness. *Ann. Inst. Fourier (Grenoble)*, 46(2) :307–323, 1996.
- [11] M. Markl, S. Shnider, and J. Stasheff. *Operads in algebra, topology and physics*, volume 96 of *Mathematical Surveys and Monographs*. American Mathematical Society, Providence, RI, 2002.
- [12] P. Orlik and L. Solomon. Combinatorics and topology of complements of hyperplanes. *Invent. Math.*, 56(2) :167–189, 1980.
- [13] P. Orlik and H. Terao. *Arrangements of hyperplanes*, volume 300 of *Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften*. Springer-Verlag, 1992.
- [14] D. I. Panyushev. ad-nilpotent ideals of a Borel subalgebra : generators and duality. *J. Algebra*, 274(2) :822–846, 2004.
- [15] A. A. Voronov. The Swiss-cheese operad. In *Homotopy invariant algebraic structures (Baltimore, MD, 1998)*, volume 239 of *Contemp. Math.*, pages 365–373. Amer. Math. Soc., 1999.

Institut Camille Jordan
 Université Claude Bernard Lyon 1
 Bâtiment Braconnier
 21 Avenue Claude Bernard
 F-69622 VILLEURBANNE Cedex
 FRANCE
 email : chapoton@math.univ-lyon1.fr