

UNE PERTURBATION DES OPÉRATEURS MICROHYPOELLIPTIQUES

par

Tatsushi MORIOKA

§1. Introduction et Résultat

Nous généralisons le résultat de Hoshiro [6] et de Morioka [13] en tenant compte de celui de Wakabayashi–Suzuki [15].

Soit $n \geq 3$ et $2 \leq k \leq n-1$. Pour $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbf{R}^n$, on note $x'' = (x_1, \dots, x_{k-1}) \in \mathbf{R}^{k-1}$ et $x' = (x'', x_n) \in \mathbf{R}^k$. Soit $A = a(x'', D')$ l'opérateur différentiel d'ordre 2 dans \mathbf{R}^n_x , dont le polynôme $a(x, \xi)$ ne dépend que de x'' et de ξ' . On note \tilde{A} au lieu de A , lorsque on considère A comme l'opérateur dans \mathbf{R}^k . Soit $B = \sum_{j=k}^{n-1} L_j^* L_j$, où $L_j = D_j - ix_j D_n$. On définit alors P par $P = A + B$. Soit $\rho \in T^*\mathbf{R}^n \setminus 0$; $\rho = (y, \eta) \in \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n \setminus 0$, $|\eta| = 1$, $y_k = \dots = y_{n-1} = 0$, $\eta_k = \dots = \eta_{n-1} = 0$ et $\eta_n > 0$. On définit $\tilde{\rho} \in T^*\mathbf{R}^k \setminus 0$ par $\tilde{\rho} = (y', \eta')$. On décrit la norme et la multiplication intérieure dans L^2 par $\|*\|$ et par (\cdot, \cdot) . Quant à A , on suppose les hypothèses suivantes.

(H.1) La partie principale de $a(x'', \xi')$ n'est pas négative.

(H.2) Il existe un voisinage conique $\Sigma \subset \mathbf{R}^k$ de η' et une constante $C > 0$ tels que pour tout $v \in \mathcal{S}(\mathbf{R}^k)$; $\text{supp } \hat{v} \subset \Sigma$ on a $\text{Re}(\tilde{A}v, v) \geq -C\|v\|^2$.

Le théorème suivant est notre résultat principal. On dit que l'opérateur différentiel Q dans \mathbf{R}^n est microhypoelliptique à $\rho \in T^*\mathbf{R}^n \setminus 0$ si $u \in \mathcal{D}'$ et $\rho \notin \text{WF}(Qu)$ implique $\rho \notin \text{WF}u$. Pour la définition de WF, on cite Hörmander [4, Définition 8.1.2].

THÉORÈME 1. *On suppose que (H.1) et (H.2) sont vérifiées. Alors, P est microhypoelliptique à ρ si et seulement si \tilde{A} est microhypoelliptique à $\tilde{\rho}$.*

On considère maintenant B comme la perturbation de A . Selon Théorème 1, la perturbation B conserve la microhypoellipticité de A à ρ sous la condition (H.1) et (H.2). En effet, \tilde{A} est microhypoelliptique à $\tilde{\rho}$ si A est microhypoelliptique à ρ .

Nous écrivons alors notre motivation. Hoshiro [6] a étudié l'hypoellipticité de l'opérateur

$$P_0 = D_1^2 + D_2^2 + D_3^2 + x_3^2 D_4^2 + (g(x_1) - 1)D_4 \quad \text{dans } \mathbf{R}^4.$$

Ici, $D_j = -i\partial/\partial x_j$. On suppose que $0 < g(t) \leq 1$ quand $t \neq 0$ et que $tg'(t) \geq 0$. Alors, [6] a montré que P_0 était hypoelliptique si et seulement si (*) $\lim_{t \rightarrow 0} t \log g(t) = 0$ était vérifiée. En revanche, [6] a aussi annoncé que l'opérateur

$$P_1 = D_1^2 + D_2^2 + x_2^2 D_3^2 + (g(x_1) - 1)D_3 \quad \text{dans } \mathbf{R}^3$$

est hypoelliptique si $0 < g(t) \leq 1$ quand $t \neq 0$. Notons que (*) n'est pas nécessaire pour l'hypoellipticité de P_1 . Cette différence provient du fait suivant. Soit $A_0 = D_1^2 + D_2^2 + g(x_1)D_4$ dans \mathbf{R}^3 et $A_1 = D_1^2 + g(x_1)D_3$ dans \mathbf{R}^2 . On suppose que $0 < g(t) \leq 1$ quand $t \neq 0$ et que $tg'(t) \geq 0$. Soit $\rho = (\mathbf{O}; 0, 0, 1) \in T^*\mathbf{R}^3 \setminus 0$ et $\tilde{\rho} = (\mathbf{O}; 0, 1) \in T^*\mathbf{R}^2 \setminus 0$, où \mathbf{O} est origine. Alors, A_0 est microhypoelliptique à ρ si et seulement si (*) est vérifiée. En revanche, A_1 est microhypoelliptique à $\tilde{\rho}$ sans (*). Ces faits sont essentiellement déduits par Morimoto [9] ou par Hoshiro [5]. On cite aussi Fedii [2] et Kusuoka–Stroock [8], qui concernent respectivement A_0 et A_1 . Selon [6], chaque A_k apparaît lorsque l'on prend la projection de chaque P_k sur le premier espace propre de l'opérateur de Hermite. Alors, l'hypoellipticité de P_k est déduite par la microhypoellipticité de A_k . Donc, on n'a pas besoin de (*) pour l'hypoellipticité de P_1 .

L'idée de [6] provient de Boutet de Monvel [1] et de Grigis [3], qui ont construit des paramétrix des opérateurs différentiels à caractéristiques doubles.

Wakabayashi–Suzuki [15, Exemple 5.2] a aussi prouvé l'hypoellipticité de P_0 en utilisant l'idée différente. Soit $B = L^*L$, où $L = D_3 - ix_3 D_4$. Alors, $P_0 = A_0 + B$ et $B \geq 0$. Selon la condition (*), comme Morimoto [9] a étudié, A_1 vérifie que pour tout $\varepsilon > 0$ il existe une constante $C > 0$ telle que pour tout $u \in \mathcal{S}(\mathbf{R}^4)$; $\text{supp } \hat{u} \subset \{(\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4) \in \mathbf{R}^4 : \xi_4 > 0\}$ on a

$$(0.1) \quad \|\log \langle D_4 \rangle u\|^2 \leq \varepsilon (A_0 u, u) + C \|u\|^2.$$

Ici, \mathcal{S} est espace des distributions à décroissance rapide et \hat{u} est la transformé de Fourier de u . Puisque $P_0 = A_0 + B$ et $B \geq 0$, P_0 vérifie aussi (0.1). Alors, l'argument de [9] nous révèle que P_0 est microhypoelliptique à ρ . On peut dire que [15, Exemple 5.2] a généralisé ce processus. Cependant, si on applique [15, Exemple 5.2] à P_1 , il faut supposer (*) pour prouver que P_1 est microhypoelliptique à ρ . Donc, l'idée de [15, Exemple 5.2] ne fonctionne pas bien afin de préciser l'hypoellipticité de P_1 .

Morioka [13] a étudié l'hypoellipticité de l'opérateur

$$P_2 = D_1^2 + f(x_1)D_2^2 + D_3^2 + x_3^2D_4^2 + (g(x_1) - 1)D_4 \quad \text{dans } \mathbf{R}^4.$$

Fixons une intervalle ouverte $I_0 \subset \mathbf{R}$. On dit que une fonction g vérifie (A.1) si

(A.1) $g_I > 0$ pour toutes les intervalles $I \subset I_0$.

Ici, $g_I = |I|^{-1} \int_I g$. On dit que des fonctions f, g vérifient $(M; f, g)$ si

$$(M; f, g) \quad \inf_{\delta > 0} \sup \{ (f_I)^{1/2} |I| |\log g_{3I}| : 3I \subset I_0, \quad g_{3I} < \delta \} = 0.$$

Ici, $3I$ représente l'intervalle dont le centre est commun à celui de I et dont la longueur est trois fois plus grande que celle de I . On suppose maintenant (A.1), que $f, g > 0$ sur ∂I_0 et que $g \leq 1$. Alors, [13] a prouvé que P_2 était hypoelliptique si et seulement si $(M; 1, f)$ et $(M; f, g)$ étaient vérifiées.

La condition $(M; f, g)$ provient de Sawyer [14, Remarque 5], qui a caractérisé la positivité des opérateurs de Schrödinger à une dimension. On cite aussi [11, Sawyer's Lemma].

Comme [13, §1] a mentionné l'hypoellipticité de P_2 ne peut pas être précisée par [15, Exemple 5.2]. En revanche, Théorème 1 explique simultanément l'hypoellipticité de P_0, P_1 et de P_2 . Par surcroît, on obtient le corollaire suivant, si on applique théorème 1 à P_2 . Soit $\rho \in T^*\mathbf{R}^4 \setminus 0; \rho = (y; \eta) \in \mathbf{R}^4 \times \mathbf{R}^4 \setminus 0, y = (y_1, 0, 0, 0), \eta = (0, 0, 0, 1)$ et $y_1 \in I_0$.

COROLLAIRE 2. *On suppose (A.1) et que $f, g > 0$ sur ∂I_0 . Alors, P_2 est microhypoelliptique à ρ pour tout $y_1 \in I_0$ si et seulement si $(M; f, g)$ est vérifiée.*

DÉMONSTRATION DE COROLLAIRE 2. Soit $A_2 = D_1^2 + f(x_1)D_2^2 + g(x_1)D_4$ dans \mathbf{R}^3 . Selon Théorème 1, la microhypoellipticité de P_2 à ρ équivaut à celle de \tilde{A}_2 à $\tilde{\rho}$. Ici, $\tilde{\rho} = (y_1, 0, 0, ; 0, 0, 1)$. Par surcroît, la démonstration de [11, Théorème 1] nous laisse savoir que \tilde{A}_2 est microhypoelliptique à $\tilde{\rho}$ pour tout $y_1 \in I_0$ si et seulement si $(M; f, g)$ est vérifiée. Donc, on obtient la conclusion. \square

Quant à la relation entre [13] et cet article, corollaire 2 est nouveau. En effet, la preuve de l'hypoellipticité de P_2 faite dans [13] nous laisse savoir que P_2 est microhypoelliptique à ρ pour tout $y_1 \in I_0$, sous la condition $(M; 1, f)$ et $(M; f, g)$. Selon la méthode de [13], $(M; 1, f)$ est indispensable. En revanche, corollaire 2 montre microhypoellipticité de P_2 sans $(M; 1, f)$.

Nous écrivons la différence entre la méthode de [13] et celle de cet article. Soit Π_0 la projection sur le premier espace propre de l'opérateur de Hermite. La

définition précise de Π_0 sera donnée à §2. Soit $P = P_2$ et $P = P\Pi_0 + R$. Alors, la microhypoellipticité de P à ρ est déduite par celle de $P\Pi_0$ et de R . On obtient la microhypoellipticité de $P\Pi_0$ à ρ par [11, Théorème 1], car on peut considérer $P\Pi_0$ comme A_2 mentionné dans la preuve de Corollaire 2. Voyez Lemme 2.2 à §2. Dans [13], en poursuivant le technique de Hoshiro [6], nous avons construit le parametrix de R au domaine où $|\xi_4|$ domine $\xi_1^2 + \xi_2^2 + \xi_3^2$ en \mathbf{R}_ξ^n . Puisque D_2^2 dégénère, on ne peut pas avoir parametrix de R dans le cône ordinaire où $|\xi_4|$ est dominant. Voyez [13, §6]. Donc, la microhypoellipticité de P_2 à ρ ne peut pas être déduite sans $(M; 1, f)$, si on adapte le technique de [6] et de [13]. En revanche, nous utilisons dans cet article la méthode de énergie pour prouver la microhypoellipticité de R à ρ . Grâce à cette méthode, nous pouvons déduire la microhypoellipticité de R sans $(M; 1, f)$.

Nous remarquons le fait suivant. Soit $k = n - 1$ à Théorème 1. Alors, $B = L_{n-1}^* L_{n-1}$. Si on remplace L_{n-1} par D_{n-1} , Théorème 1 est faux, malgré que $B \geq 0$. On donne un exemple. Soit A_0, A_1 l'opérateur mentionnés précédemment. Alors, $A_0 = A_1 + D_2^2$ dans \mathbf{R}^3 . On suppose que $g(t) = \exp(-|t|^{-\sigma})$; $\sigma > 0$. Soit $\rho = (\mathbf{0}; 0, 0, 1) \in T^*\mathbf{R}^3 \setminus 0$ et $\tilde{\rho} = (\mathbf{0}; 0, 1) \in T^*\mathbf{R}^2 \setminus 0$. A_0 est microhypoelliptique à ρ si et seulement si $\sigma < 1$. En revanche, A_1 est microhypoelliptique à $\tilde{\rho}$ pour tout $\sigma > 0$. Donc, la perturbation D_2^2 ne conserve pas la microhypoellipticité de A_1 . Quant à cet argument, on cite Morimoto [10].

Théorème 1 est déduit par la propriété de l'opérateur de Hermite. Nous l'étudierons à §2 en poursuivant [6, §2] et [13, §4]. La preuve de Théorème 1 sera donnée à §3.

§2. Opérateur de Hermite

Nous étudions la propriété de l'opérateur de Hermite, $L = -(d/dt)^2 + t^2$, qui jouera un rôle principal dans la démonstration de Théorème 1.

La j -ème fonction propre de l'opérateur de Hermite est

$$(2.1) \quad h_j(t) = \pi^{-1/4} (2^j j!)^{-1/2} \left(\frac{d}{dt} - t \right)^j \exp(-t^2/2).$$

On définit $\varphi_j(t; \eta)$ par $\varphi_j(t; \eta) = |\eta|^{1/4} h_j(t|\eta|^{1/2})$. Alors, $\varphi_j(t; \eta)$ est la j -ème fonction propre de l'opérateur de Hermite à paramètre η : $L_\eta = -(d/dt)^2 + t^2 \eta^2$. En effet, on a $L_\eta \varphi_j(t; \eta) = (2j + 1)|\eta| \varphi_j(t; \eta)$ et $\|\varphi_j\| = 1$.

Soit $k = n - 1$. Alors, $x'' = (x_1, \dots, x_{n-2})$ et $x' = (x'', x_n)$. Soit $\phi(\eta) \in C^\infty(\mathbf{R})$, $0 \leq \phi \leq 1$, $\phi(\eta) = 1$ lorsque $|\eta| \geq 2$ et $\phi(\eta) = 0$ lorsque $|\eta| \leq 1$. On définit $H_j : \mathcal{S}(\mathbf{R}^{n-1}) \rightarrow \mathcal{S}(\mathbf{R}^n)$ par

$$(2.2) \quad (H_j v)(x) = (2\pi)^{-1/2} \int e^{ix_n \xi_n} \phi(\xi_n) \varphi_j(x_{n-1}; \xi_n) \hat{v}(x''; \xi_n) d\xi_n$$

où \hat{v} est la transformé de Fourier de $v(x)$ par rapport à x_n . On définit $H_j^* : \mathcal{S}(\mathbf{R}^n) \rightarrow \mathcal{S}(\mathbf{R}^{n-1})$, qui est adjoint de H_j , par

$$(2.3) \quad (H_j^* u)(x') = (2\pi)^{-1/2} \iint e^{ix_n \xi_n} \phi(\xi_n) \varphi_j(y; \xi_n) \hat{u}(x'', y; \xi_n) dy d\xi_n.$$

On peut aussi définir $H_j : \mathcal{S}'(\mathbf{R}^{n-1}) \rightarrow \mathcal{S}'(\mathbf{R}^n)$ et $H_j^* : \mathcal{S}'(\mathbf{R}^n) \rightarrow \mathcal{S}'(\mathbf{R}^{n-1})$ à partir de (2.2) et de (2.3) en utilisant la relation $(H_j v, u) = (v, H_j^* u)$ pour $v \in \mathcal{S}(\mathbf{R}^{n-1})$, $u \in \mathcal{S}(\mathbf{R}^n)$. Ici $\mathcal{S}'(\mathbf{R}^n)$ représente l'espace des distributions tempérées. On définit $\Pi_j : \mathcal{S}'(\mathbf{R}^n) \rightarrow \mathcal{S}'(\mathbf{R}^n)$ par $\Pi_j = H_j H_j^*$.

On décrit la proposition suivante, qui représente une idée principale dans la preuve de Théorème 1.

PROPOSITION 2.1.

(i) Pour tout $u \in \mathcal{S}(\mathbf{R}^n)$ on a

$$(2.4) \quad (\Pi_0 u)(x) = \int e^{ix\xi} \sigma(\Pi_0)(x, \xi) \hat{u}(\xi) d\xi,$$

où $\sigma(\Pi_0)(x, \xi) = \phi(\xi_n)^2 \exp(-ix_{n-1} \xi_{n-1} - (\xi_{n-1}^2 + x_{n-1}^2 \xi_n^2)/(2|\xi_n|)$.

Par surcroît, pour tout α, β il existe une constante $C_{\alpha, \beta}$ telle que pour tout $(x, \xi) \in \mathbf{R}^{2n}$ on a

$$(2.5) \quad |\sigma(\Pi_0)_{(\beta)}^{(\alpha)}(x, \xi)| \leq C_{\alpha, \beta} \langle \xi_{n-1}, \xi_n \rangle^{-\alpha_{n-1}/2 - \alpha_n + \beta_{n-1}/2},$$

où $\langle t \rangle = (1 + |t|^2)^{1/2}$ et $r_{(\beta)}^{(\alpha)} = \partial_{\xi}^{\alpha} D_x^{\beta} r$.

(ii) Pour tout $u \in L^2(\mathbf{R}^n)$, on a $\sum_{j=0}^{\infty} \Pi_j u = \phi(D_n)^2 u$ dans $L^2(\mathbf{R}^n)$.

(iii) Pour tout j, k , on a $H_j^* H_k = \delta_{jk} \phi(D_n)^2$ dans $\mathcal{S}'(\mathbf{R}^{n-1})$.

(iv) Soit $B = D_{n-1}^2 + x_{n-1}^2 D_n^2 - D_n$ et $B_j = 2jD_n$. Alors, on a $BH_j v = H_j B_j v$ pour $v \in \mathcal{S}'(\mathbf{R}^{n-1})$; $\text{supp } \hat{v} \subset \{\xi' \in \mathbf{R}^{n-1} : \xi_n > 0\}$ et $H_j^* B u = B_j H_j^* u$ pour $u \in \mathcal{S}'(\mathbf{R}^n)$; $\text{supp } \hat{u} \subset \{\xi \in \mathbf{R}^n : \xi_n > 0\}$.

(v) Pour $(x', \xi') \in T^* \mathbf{R}^{n-1}$, on définit $J(x', \xi') \in T^* \mathbf{R}^n$ par

$$J(x', \xi') = (x'', 0, x_n; \xi'', 0, \xi_n).$$

Alors, pour tout $u \in \mathcal{S}'(\mathbf{R}^n)$ et tout $v \in \mathcal{S}'(\mathbf{R}^{n-1})$ on a

$$WF(H_0 v) \subset \{J(x', \xi') \in T^* \mathbf{R}^n \setminus 0 : (x', \xi') \in WFv\},$$

$$WF(H_0^* u) \subset \{(x', \xi') \in T^* \mathbf{R}^{n-1} \setminus 0 : J(x', \xi') \in WFu\}.$$

DÉMONSTRATION DE PROPOSITION 2.1.

(i) Notons que $\widehat{h}_0(t) = h_0(t)$. Alors, on peut obtenir les conclusions à partir de (2.2) et de (2.3).

(ii) On définit l'opérateur $T : L^2(\mathbf{R}^n) \rightarrow L^2(\mathbf{R}^n)$ par

$$(2.6) \quad (Tu)(x) = (2\pi)^{-1} \int \exp(ix_n \xi_n) |\xi_n|^{1/4} \widehat{u}(x'', |\xi_n|^{1/2} x_{n-1}, \xi_n) d\xi_n.$$

Alors, on a $T^*T = TT^* = I$. Ici, I est opérateur identique. On suppose que

$$(2.7) \quad \widehat{T^*u}(x'', x_{n-1}, \xi_n) = f(x'')g(x_{n-1})r(\xi_n),$$

où $f \in L^2(\mathbf{R}^{n-2})$ et $g, r \in L^2(\mathbf{R})$. Alors, on a

$$(2.8) \quad \widehat{u}(x'', x_{n-1}, \xi_n) = f(x'')|\xi_n|^{1/4}g(x_{n-1}|\xi_n|^{1/2})r(\xi_n).$$

Puisque $\{h_j\}_{j=0}^\infty$ est C.O.N.S. dans $L^2(\mathbf{R})$, on a $\sum_{j=0}^\infty \Pi_j u = \phi(D_n)^2 u$ dans $L^2(\mathbf{R})$. Puisque $L^2(\mathbf{R}^n) = L^2(\mathbf{R}^{n-2}) \otimes L^2(\mathbf{R}) \otimes L^2(\mathbf{R})$, on obtient la conclusion.

(iii), (iv) Puisque $\{h_j\}_{j=0}^\infty$ est C.O.N.S. dans $L^2(\mathbf{R})$ et $(L_\eta \varphi_j)(t, \eta) = (2j+1)|\eta|\varphi_j(t, \eta)$, on obtient les conclusions.

(v) Soit $K_1 \in \mathcal{D}'(\mathbf{R}_x^n \times \mathbf{R}_{y'}^{n-1})$ et $K_2 \in \mathcal{D}'(\mathbf{R}_{x'}^{n-1} \times \mathbf{R}_y^n)$ les noyaux de H_0 et de H_0^* , i.e.,

$$(H_0 v)(x) = \int_{\mathbf{R}^{n-1}} K_1(x, y') v(y') dy' \quad \text{et} \quad (H_0^* u)(x') = \int_{\mathbf{R}^n} K_2(x', y) u(y) dy.$$

Selon (2.2) et (2.3), on a

$$K_1(x, y') = \int_{\mathbf{R}^{n-1}} \exp(i\psi_1(x, y'; \theta')) |\theta_n|^{1/4} \phi(\theta_n) d\theta'$$

$$K_2(x', y) = \int_{\mathbf{R}^{n-1}} \exp(i\psi_2(x', y; \theta')) |\theta_n|^{1/4} \phi(\theta_n) d\theta',$$

où $\psi_1(x, y'; \theta') = (x' - y') \cdot \theta' + ix_{n-1}^2 |\theta_n|/2$ et $\psi_2(x', y; \theta') = (x' - y') \cdot \theta' + iy_{n-1}^2 |\theta_n|/2$. Ici, $\theta' = (\theta_1, \dots, \theta_{n-2}, \theta_n)$. Selon Hörmander [4. Théorème 8.1.9], on a

$$WFK_1 \subset \{(x, y'; \xi, \eta') : x' = y', \quad x_{n-1} = 0, \quad \xi' = -\eta', \quad \xi_{n-1} = 0\},$$

$$WFK_2 \subset \{(x', y; \xi', \eta) : x' = y', \quad y_{n-1} = 0, \quad \xi' = -\eta', \quad \eta_{n-1} = 0\}.$$

Selon Hörmander [4. Théorème 8.2.13], on obtient la conclusion. \square

Quant à Proposition 2.1, on cite Grigis [3, Section III.3] et Hoshiro [6, Proposition 1].

On étudie maintenant la relation entre P et \tilde{A} dans Théorème 1 sous la condition $k = n - 1$. Alors, $P = A + B$ et $B = L_{n-1}^* L_{n-1}$. Notons que ce B coïncide à celui qui a été mentionné dans Proposition 2.1-(iv).

LEMME 2.2. $PH_0v = H_0\tilde{A}v$ pour $v \in \mathcal{S}'(\mathbf{R}^{n-1})$; $\text{supp } \hat{v} \subset \{\xi' \in \mathbf{R}^{n-1} : \xi_n > 0\}$ et $H_0^*Pu = \tilde{A}H_0^*u$ pour $u \in \mathcal{S}(\mathbf{R}^n)$; $\text{supp } \hat{u} \subset \{\xi \in \mathbf{R}^n : \xi_n > 0\}$.

DÉMONSTRATION DE LEMME 2.2. Selon Proposition 2.1-(iv), on a $H_0Bv = 0$ et $BH_0^*u = 0$. Puisque $P = A + B$, on obtient la conclusion. \square

§ 3. Démonstration de Théorème 1

Nous prouvons Théorème 1 sous la condition $k = n - 1$. La démonstration au cas où $k \leq n - 2$ est-elle déduite par la répétition.

On explique les notations. Pour les ensembles ouverts $U_1, U_2 \subset \mathbf{R}^m$ qui vérifient $U_1 \Subset U_2$, on définit $Y(U_1, U_2)$ par

$$Y(U_1, U_2) = \{\varphi \in C_0^\infty(U_2) : 0 \leq \varphi \leq 1, \varphi(t) = 1 \text{ si } t \in U_1\}.$$

Pour les cônes ouverts $\Gamma_1, \Gamma_2 \subset \mathbf{R}^m$ qui vérifient $\Gamma_1 \Subset \Gamma_2$, on définit $Z(\Gamma_1, \Gamma_2)$, qui est ensemble des symboles des opérateurs pseudodifférentiels, par

$$Z(\Gamma_1, \Gamma_2) = \{\gamma(\xi) \in S_{1,0}^0(\mathbf{R}^m) : 0 \leq \gamma \leq 1, \text{supp } \gamma \subset \Gamma_2 \text{ et } \gamma(\tau) = 1 \text{ si } \tau \in \Gamma_1, |\tau| \geq 1\}.$$

Pour les notations qui concernent des opérateurs pseudodifférentiels, nous suivons Kumano-go [7].

D'abord, on suppose que P est microhypoelliptique à ρ et on montre que \tilde{A} est microhypoelliptique à $\tilde{\rho}$.

Soit $v \in \mathcal{E}'(\mathbf{R}^{n-1})$, i.e., $\text{supp } v$ est compact et on suppose que $\tilde{\rho} \notin WF(\tilde{A}v)$. On fixe une fonction $\psi(\xi_n) \in C^\infty(\mathbf{R})$; $0 \leq \psi \leq 1$, $\psi(\xi_n) = 0$ lorsque $|\xi_n| \leq 1$ et $\psi(\xi_n) = 1$ lorsque $|\xi_n| \geq 2$. On définit w par $w = \psi(D_n)v$. Alors, on a $\tilde{\rho} \notin WF(\tilde{A}w)$. Ici, on a utilisé le fait que $[\tilde{A}, \psi(D_n)] = 0$. Selon Proposition 2.1-(v), on a $\rho \notin WF(H_0\tilde{A}w)$. Selon Lemme 2.2, on a $\rho \notin WF(P(H_0w))$. Puisque P est microhypoelliptique à ρ , on obtient $\rho \notin WF(H_0w)$. Selon Proposition 2.1-(v), $\tilde{\rho} \notin WF(H_0^*H_0w)$. Selon Proposition 2.1-(iii), $H_0^*H_0w = \phi(D_n)^2w$. Donc, on obtient la conclusion.

Nous prouvons le cas contraire. On suppose que \tilde{A} est microhypoelliptique à $\tilde{\rho}$ et on montre que P est microhypoelliptique à ρ . Soit $u \in \mathcal{E}'(\mathbf{R}^n)$ et $\rho \notin WF(Pu)$. Quant au cône Σ mentionné dans Théorème 1, on peut supposer que $\langle \xi_n \rangle \sim \langle \xi \rangle$ dans Σ . On définit alors $\Sigma^* \subset \mathbf{R}^n$ par $\Sigma^* = \{\xi \in \mathbf{R}^n : \xi' \in \Sigma, \xi_{n-1} \in \mathbf{R}\}$. On fixe Σ_0

et Σ_1 qui sont les voisinages coniques de η et qui vérifient $\Sigma_0 \Subset \Sigma_1 \Subset \Sigma^*$. On fixe aussi $\lambda \in Z(\Sigma_0, \Sigma_1)$ et on définit w par $w = \lambda(D)u$.

LEMME 3.1. *On a $\rho \notin WF(Pw)$.*

DÉMONSTRATION DE LEMME 3.1. Puisque $w = \lambda(D)u$, on a

$$Pw = \lambda(D)Pu - [\lambda(D), P]u.$$

Puisque $\rho \notin WF(Pu)$, on a $\rho \notin WF(\lambda(D)Pu)$. Observons que

$$[\lambda(D), P] = \sum_{|\alpha|=1}^N P_{(\alpha)} \lambda^{(\alpha)}(D) / \alpha! + R_N,$$

où $R_N \in OPS_{1,0}^{2-N}(\mathbf{R}^n)$. Puisque $\lambda^{(\alpha)}(\xi) = 0$ sur $\Sigma_0 \cap \{|\xi| > 1\}$ si $|\alpha| \geq 1$, on a $\rho \notin WF(P_{(\alpha)} \lambda^{(\alpha)}(D)u)$. Donc, on obtient la conclusion. \square

On prend alors l'expansion de w par rapport aux fonctions propres de l'opérateur de Hermite.

LEMME 3.2. $\sum_{j=0}^{\infty} \Pi_j w = \phi(D_n)^2 w$ dans $\mathcal{S}'(\mathbf{R}^n)$.

DÉMONSTRATION DE LEMME 3.2. Puisque $\text{supp } \hat{w} \subset \Sigma_1$ et $\langle \xi_n \rangle \sim \langle \xi \rangle$ dans Σ_1 , il existe $s > 0$ telle que $\langle D_n \rangle^{-s} w \in L^2(\mathbf{R}^n)$. Selon Proposition 2.1–(ii), on a $\sum_{j=0}^{\infty} \Pi_j (\langle D_n \rangle^{-s} w) = \phi(D_n)^2 \langle D_n \rangle^{-s} w$ dans $L^2(\mathbf{R}^n)$. Puisque $[\Pi_j, \langle D_n \rangle^{-s}] = 0$ dans $\mathcal{S}'(\mathbf{R}^n)$, on obtient la conclusion. \square

On définit maintenant w_0 et w_* par $w_0 = \Pi_0 w$ et $w_* = \phi(D_n)^2 w - w_0$. On montre que $\rho \notin WFw_0$ et que $\rho \notin WFw_*$, qui achèvent la démonstration de Théorème 1.

D'abord, on prouve que $\rho \notin WFw_0$. Selon Proposition 2.1–(v) et Lemme 3.1, on a $\tilde{\rho} \notin WF(H_0^* Pw)$. Selon Lemme 2.2, on a $\tilde{\rho} \notin WF(\tilde{A}(H_0^* w))$. Puisque \tilde{A} est microhypoelliptique à $\tilde{\rho}$, on a $\tilde{\rho} \notin WF(H_0^* w)$. Selon Proposition 2.1–(v), on obtient $\rho \notin WFw_0$.

On montre maintenant que $\rho \notin WFw_*$. Les deux propositions suivantes sont la clé à ce prouver.

PROPOSITION 3.3. *Soit $\rho_0 = (y^0, \eta^0) \in T^*\mathbf{R}^n \setminus 0$ et $\eta^0 \in \Sigma^*$.*

- (i) *Si $y_{n-1}^0 \neq 0$, P est microhypoelliptique à ρ_0 .*
- (ii) *Si $\eta_{n-1}^0 \neq 0$, P est microhypoelliptique à ρ_0 .*

DÉMONSTRATION DE PROPOSITION 3.3. Puisque $B = L_{n-1}^* L_{n-1}$ est micro-localement elliptique au voisinage de ρ_0 si $y_{n-1}^0 \neq 0$ ou $\eta_{n-1}^0 \neq 0$, on obtient les conclusions en tenant compte de (H.1). \square

On choisit un cône $\Sigma' \subset \mathbf{R}^{n-1}$ tel que $\Sigma \Subset \Sigma'$ et que $\langle \xi_n \rangle \sim \langle \xi' \rangle$ dans Σ' . On fixe alors $\lambda_0(\xi') \in Z(\Sigma, \Sigma')$. On définit K et Q par $K = D_n \Pi_0 \lambda_0(D')$ et par $Q = P + K$ dans \mathbf{R}^n . Bien que $\lambda_0(D') \in OPS_{1,0}^0(\mathbf{R}^{n-1})$, on le considère comme un opérateur dans \mathbf{R}^n .

PROPOSITION 3.4.

(i) $K \in OPS_{1/2,1/2}^1(\mathbf{R}^n)$. Par surcroît, pour tout α, β il existe une constante $C_{\alpha,\beta}$ telle que pour tout $(x, \xi) \in \mathbf{R}^{2n}$ on a

$$(3.1) \quad |\sigma(K)_{(\beta)}^{(\alpha)}(x, \xi)| \leq C_{\alpha,\beta} \langle \xi \rangle^{-|\alpha''| - (\alpha_{n-1}/2) - \alpha_n + (\beta_{n-1}/2)}.$$

Ici, $\alpha'' = (\alpha_1, \dots, \alpha_{n-2})$.

(ii) $Pw_* = Qw_*$.

(iii) Il existe les constantes $C_1, C_2 > 0$ telles que pour tout $u \in H^2(\mathbf{R}^n)$; $\text{supp } \hat{u} \subset \Sigma^*$, on a

$$\| \langle D_n \rangle^{1/2} u \|^2 \leq C_1 \text{Re}(Qu, u) + C_2 \|u\|^2.$$

DÉMONSTRATION DE PROPOSITION 3.4.

(i) Selon Proposition 2.1-(i) et la définition de K , on obtient la conclusion.

(ii) Selon Lemme 3.2, $w_* = \sum_{j=1}^{\infty} \Pi_j w$ dans $\mathcal{S}'(\mathbf{R}^n)$. Donc, on a $\Pi_0 w_* = 0$ en tenant compte de Proposition 2.1-(iii). Puisque $[\Pi_0, \lambda_0(D')] = 0$, on obtient la conclusion.

(iii) Soit $v \in H^2(\mathbf{R}^{n-1})$; $\text{supp } v \subset \Sigma$. Alors, pour tout $j \geq 1$ on a

$$(3.2) \quad \| |D_n|^{1/2} v \|^2 \leq (B_j v, v),$$

où $B_j = 2jD_n$. Soit $u \in H^2(\mathbf{R}^n)$; $\text{supp } u \subset \Sigma^*$. Alors, on a $\text{supp } \widehat{H_j^* u} \subset \Sigma$. Puisque $\langle D_n \rangle^2 u \in L^2(\mathbf{R}^n)$, on a $H_j^* \langle D_n \rangle^2 u \in L^2(\mathbf{R}^{n-1})$. Puisque $H_j^* \langle D_n \rangle^2 u = \langle D_n \rangle^2 H_j^* u$ et $\langle \xi_n \rangle \sim \langle \xi' \rangle$ dans Σ , on a $H_j^* u \in H^2(\mathbf{R}^{n-1})$. Donc, en remplaçant v par $H_j^* u$ dans (3.2), on a

$$(3.3) \quad \| |D_n|^{1/2} H_j^* u \|^2 \leq (B_j H_j^* u, H_j^* u).$$

Selon Proposition 2.1-(iv), on a

$$(3.4) \quad (\Pi_j |D_n| u, u) \leq (\Pi_j B u, u).$$

Prenons le somme de chaque côté de (3.4) de $j = 1$ à $j = \infty$. Selon Proposition 2.1–(ii), on a

$$(3.5) \quad (|D_n|u, u) - (Ku, u) \leq (Bu, u),$$

car $u \in H^2(\mathbf{R}^2)$, $\Pi_0 B = 0$ et $\lambda_0(D')u = u$. Selon l'hypothèse (H.1), on a

$$(3.6) \quad \operatorname{Re}(Au, u) \geq -C\|u\|^2.$$

À partir de (3.5) et de (3.6), on obtient la conclusion. \square

On déduit alors $\rho \notin WFW_*$. Puisque $[P, \phi(D_n)^2] = 0$, on a $Pw_* = \phi(D_n)^2 Pw - Pw_0$. Puisque $\rho \notin WF(Pw)$ et $\rho \notin WFW_0$, on a $\rho \notin WF(Pw_*)$. Selon Proposition 3.4–(ii), on a $\rho \notin WF(Qw_*)$. Donc, il existe un cône ouvert $\Gamma_0 \subset \mathbf{R}^n$ qui contient η et qui vérifie $\Gamma_0 \subseteq \Sigma^*$, un ensemble ouvert $V_0 \subset \mathbf{R}^{n-1}$ qui contient y' et une intervalle ouverte $I_0 \subset \mathbf{R}$ qui contient 0 tels que pour tout $\gamma(\xi) \in S_{1,0}^0(\mathbf{R}^n)$; $\operatorname{supp} \gamma \subset \Gamma_0$, tout $\psi(x') \in C_0^\infty(V_0)$ et tout $\chi(x_{n-1}) \in C_0^\infty(I_0)$ on a $\psi(x')\chi(x_{n-1})\gamma(D)Qw_* \in H^\infty$. À partir de ces V_0 , I_0 et Γ_0 , on considère des séquences comme ci-dessous. On choisit une séquence des ensembles ouverts $\{V_k\}_{k=0}^\infty \cup \{V\} \subset \mathbf{R}^{n-1}$ et celle des intervalles ouvertes $\{I_k\}_{k=0}^\infty \cup \{I\} \subset \mathbf{R}$ qui vérifient $y' \in V \subseteq V_{k+1} \subseteq V_k$ et $0 \in I \subseteq I_{k+1} \subseteq I_k$ pour tout k . On choisit aussi une séquence des cônes ouverts $\{\Gamma_k\}_{k=0}^\infty \cup \{\Gamma\} \subset \mathbf{R}^n$ et $\{F_k\}_{k=0}^\infty \cup \{F\} \subset \mathbf{R}^{n-1}$ qui vérifient les conditions suivantes.

$$(C.1) \quad \eta \in \Gamma \subseteq \Gamma_{k+1} \subseteq \Gamma_k \text{ et } \eta' \in F \subseteq F_{k+1} \subseteq F_k \text{ pour tout } k.$$

$$(C.2) \quad F_{2k} \subseteq \tilde{\Gamma}_{2k+1} \text{ et } \Gamma_{2k+2} \subseteq F_{2k+1}^* \text{ pour tout } k.$$

Ici, $\tilde{\Gamma}_j = \{\xi' \in \mathbf{R}^{n-1} : (\xi'', 0, \xi_n) \in \Gamma_j\}$ et $F_j^* = \{\xi \in \mathbf{R}^n : \xi' \in F_j, \xi_{n-1} \in \mathbf{R}\}$.

Pour chaque k , on fixe $\psi_k \in Y(V_k, V_{k+1})$, $\chi_k \in (I_k, I_{k+1})$, $\alpha_k \in Z(F_k, F_{k+1})$ et $\gamma_k \in Z(\Gamma_k, \Gamma_{k+1})$.

D'abord, on prouve le lemme suivant.

LEMME 3.5. *Il existe $s > 0$ telle que $w_* \in H^{-s}$.*

DÉMONSTRATION DE LEMME 3.5. Rappelons nous que $w = \lambda(D)u$, $u \in \mathcal{E}'$ et que $\operatorname{supp} \lambda \subset \Sigma_1$. Puisque $\langle \xi_n \rangle \sim \langle \xi \rangle$ dans Σ_1 , il existe $s > 0$ telle que $\langle D_n \rangle^{-s} w \in L^2(\mathbf{R}^n)$. Alors, on a $\langle D_n \rangle^{-s} w_* \in L^2(\mathbf{R}^n)$. Donc, on obtient la conclusion. \square

Soit $s > 0$ mentionné dans Lemme 3.5. Pour $k = 0, 1, 2, \dots$, on définit Λ_k par $\Lambda_k = \langle D_n \rangle^{-s+k/2}$. On définit alors h_k par

$$h_k = \psi_{2k} \chi_k \Lambda_k \gamma_{2k}(D)w_*.$$

PROPOSITION 3.6. *Pout tout $k = 0, 1, 2, \dots$, on a $h_k \in L^2(\mathbf{R}^n)$.*

On admet provisoirement Proposition 3.6. Alors, pout tout $\psi(x') \in C_0^\infty(V)$, tout $\chi(x_{n-1}) \in C_0^\infty(I)$, tout $\gamma(\xi) \in S_{1,0}^0(\mathbf{R}^n)$; $\text{supp } \gamma \subset \Gamma$ et tout $M > 0$ on a

$$\psi\chi\langle D_n \rangle^M \gamma(D)w_* \in H^\infty.$$

Puisque $\langle \xi_n \rangle \sim \langle \xi \rangle$ dans Γ , on obtient $\rho \notin WFw_*$, qui achève la preuve de Théorème 1.

On prouve Proposition 3.6 par l'induction par rapport à k . Lorsque $k = 0$, on obtient $h_0 \in L^2$ à partir de Lemme 3.5.

On montre que $h_{k+1} \in L^2$ en supposant que $h_k \in L^2$. On définit $T_k \in S_{1,0}^0(\mathbf{R}^{n-1})$ par $T_k v = \alpha_{2k+1}(D')(\psi_{2k+1} v)$. On considère désormais T_k comme l'opérateur dans \mathbf{R}^n .

LEMME 3.7. $T_k Q h_k \in H^\infty(\mathbf{R}^n)$.

DÉMONSTRATION DE LEMME 3.7. On définit g_k par $g_k = \chi_k \Lambda_k \gamma_{2k}(D)w_*$. Alors, $h_k = \psi_{2k} g_k$. On montre que $T_k Q g_k \in H^\infty$. Afin de simplifier la notation, on omet momentanément l'indice k . Observons que

$$TQg = I_1 + I_2 + I_3,$$

où $I_1 = \alpha(D')(\psi\chi\Lambda\gamma(D)Qw_*)$, $I_2 = \alpha(D')(\psi\chi[Q, \gamma(D)]\Lambda w_*)$ et $I_3 = \alpha(D')(\psi[Q, \chi]\gamma(D)\Lambda w_*)$. Ici, on a utilisé le fait que $[Q, \Lambda] = 0$.

Puisque $\rho \notin WF(Qw_*)$, on a $I_1 \in H^\infty$.

Quant à I_2 , on a $I_2 = E_1 + E_2$, où

$$E_1 = \alpha(D')(\psi\chi[P, \gamma(D)]\Lambda w_*), \quad E_2 = \alpha(D')(\psi\chi[K, \gamma(D)]\Lambda w_*).$$

Puisque $K \in OPS_{1/2, 1/2}^1(\mathbf{R}^n)$ et $\gamma(D) \in OPS_{1,0}^0(\mathbf{R}^n)$, on a

$$[K, \gamma(D)] = \sum_{|v|=1}^N K_{(v)} \gamma^{(v)}(D) / v! + R_N,$$

où $R_N \in OPS_{1/2, 1/2}^{1-N/2}(\mathbf{R}^n)$. Notons que $\gamma^{(v)}(\xi) = 0$ pour $\xi \in \Gamma_{k+1}$. Selon la condition (C.2), Proposition 3.3–(ii) et le fait que $\rho \notin WF(Pw_*)$, on a

$$\alpha(D')(\psi\chi K_{(v)} \gamma^{(v)}(D)\Lambda w_*) \in H^\infty \quad \text{si } |v| \geq 1.$$

Selon le théorème de Calderón–Vaillancourt, pour lequel on cite Kumano-go [7, page 224], R_N transmet H^τ à $H^{\tau+M}$, où $M = -1 + N/2$. Donc, on obtient $E_2 \in H^\infty$. Par le même argument, on a $E_1 \in H^\infty$. Donc, on obtient $I_2 \in H^\infty$.

Quant à I_3 , on a $I_3 = E_3 + E_4$, où

$$E_3 = \alpha(D')(\psi[P, \chi]\gamma(D)\Lambda w_*) \quad \text{et} \quad E_4 = \alpha(D')(\psi[K, \chi]\gamma(D)\Lambda w_*).$$

Observons que

$$[K, \chi] = \sum_{|v|=1}^N \chi^{(v)} K^{(v)} / v! + R_N,$$

où $R_N \in OPS_{1/2, 1/2}^{1-N/2}(\mathbf{R}^n)$. Selon Proposition 3.3-(i) et le fait que $\rho \notin WF(Pw_*)$, on a

$$\psi \chi^{(v)} K^{(v)} \gamma \Lambda w_* \in H^\infty \quad \text{si} \quad |v| \geq 1.$$

Donc on a $E_4 \in H^\infty$ en tenant compte du théorème de Calderón–Vaillancourt. Par le même argument, on a $E_3 \in H^\infty$. Donc, on obtient $I_3 \in H^\infty$.

Selon (3.7), on a $T_k Q g_k \in H^\infty$. Puisque $h_k = \psi_{2k} g_k$, on a

$$T_k Q h_k = T_k Q g_k + T_k Q (1 - \psi_{2k}) g_k.$$

Selon la définition de T_k et le fait que $V_{2k+1} \Subset V_k$, on a $T_k Q (1 - \psi_{2k}) g_k \in H^\infty$. Donc, on obtient $T_k Q h_k \in H^\infty$. \square

Quant à Lemme 3.7, l'idée provient de Morioka [12, Lemme 2.1].

Pour $\varepsilon \geq 0$, on définit alors $T_{k,\varepsilon}$ par $T_{k,\varepsilon} = \lambda_\varepsilon(D_n) T_k$, où $\lambda_\varepsilon(\xi_n) = (1 + \varepsilon \xi_n^2)^{-1}$.

Notons que $T_k = T_{k,0}$.

LEMME 3.8. *Soit $\varepsilon > 0$. Si on considère $T_{k,\varepsilon}$ comme l'opérateur dans \mathbf{R}^{n-1} , on a $T_{k,\varepsilon} \in OPS_{1,0}^{-2}$. Par surcroît, $\{T_{k,\varepsilon}\}_{\varepsilon \in [0,1]}$ est borné dans $OPS_{1,0}^0$ par rapport à ε .*

DÉMONSTRATION DE LEMME 3.8. Selon la définition de $\{T_{k,\varepsilon}\}$ et le fait que $\langle \xi_n \rangle \sim \langle \xi'_n \rangle$ dans $\text{supp } \psi_{2k+1}$, on obtient les conclusions. \square

LEMME 3.9. *Si on considère $T_{k,\varepsilon}$ comme l'opérateur dans \mathbf{R}^n , on a $T_{k,\varepsilon} h_k \in H^2(\mathbf{R}^n)$ lorsque $\varepsilon > 0$ et $T_{k,0} h_k \in L^2(\mathbf{R}^n)$.*

DÉMONSTRATION DE LEMME 3.9. Selon l'hypothèse de l'induction, $h_k \in L^2$. Selon la définition de $T_{k,\varepsilon}$ et le fait que $\langle \xi_n \rangle \sim \langle \xi \rangle$ dans $\text{supp } \gamma_{2k}$, on obtient les conclusions. \square

On définit alors M_ε par $M_\varepsilon = \langle D_n \rangle^{1/2} T_{k,\varepsilon} h_k$. Selon Lemme 3.9, $M_\varepsilon \in L^2(\mathbf{R}^n)$ si $\varepsilon > 0$.

LEMME 3.10. $\{M_\varepsilon\}_{0 < \varepsilon < 1}$ est borné dans $L^2(\mathbf{R}^n)$.

DÉMONSTRATION DE LEMME 3.10. Notons que $\text{supp } \widehat{T_{k,\varepsilon} h_k} \subset \Sigma^*$. Selon Proposition 3.4-(iii) et Lemme 3.9, on a

$$(3.8) \quad \|M_\varepsilon\|^2 \leq C_1 \text{Re}(QT_{k,\varepsilon} h_k, T_{k,\varepsilon} h_k) + C_2 \|T_{k,\varepsilon} h_k\|^2,$$

où C_1, C_2 sont indépendantes de ε . Selon Lemme 3.7, Lemme 3.8 et (3.8), on a

$$(3.9) \quad \|M_\varepsilon\|^2 \leq C_1(I_{1,\varepsilon} + I_{2,\varepsilon}) + C_2 I_{3,\varepsilon},$$

où $I_{1,\varepsilon} = \text{Re}(T_{k,\varepsilon} Q h_k, T_{k,\varepsilon} h_k)$, $I_{2,\varepsilon} = \text{Re}([Q, T_{k,\varepsilon}] h_k, T_{k,\varepsilon} h_k)$ et $I_{3,\varepsilon} = \|T_{k,\varepsilon} h_k\|^2$.

Selon Lemme 3.9, $T_k h_k \in L^2$ et on obtient $I_{3,\varepsilon} \leq \|T_k h_k\|^2$.

Quant à $I_{1,\varepsilon}$, on a $\|I_{1,\varepsilon}\| \leq \|T_{k,\varepsilon} Q h_k\| \|T_{k,\varepsilon} h_k\| \leq \|T_k Q h_k\| \|T_k h_k\|$.

Quant à $I_{2,\varepsilon}$, on a

$$(3.10) \quad I_{2,\varepsilon} = E_{1,\varepsilon} + E_{2,\varepsilon} + E_{3,\varepsilon} + E_{4,\varepsilon},$$

où $E_{1,\varepsilon} = \text{Re}([A, T_{k,\varepsilon}] h_k, T_{k,\varepsilon} h_k)$, $E_{2,\varepsilon} = \text{Re}([x_{n-1}^2 D_n^2, T_{k,\varepsilon}] h_k, T_{k,\varepsilon} h_k)$, $E_{3,\varepsilon} = \text{Re}([K, T_{k,\varepsilon}] h_k, T_{k,\varepsilon} h_k)$ et $E_{4,\varepsilon} = \text{Re}([-D_n, T_{k,\varepsilon}] h_k, T_{k,\varepsilon} h_k)$.

Quant à $E_{1,\varepsilon}$, on a $E_{1,\varepsilon} = (\Psi_\varepsilon h_k, h_k)$, où $\Psi_\varepsilon = (S_\varepsilon + S_\varepsilon^*)/2$ et $S_\varepsilon = T_{k,\varepsilon}^* [A, T_{k,\varepsilon}]$. Puisque la partie principale de a est réelle et $\{T_{k,\varepsilon}\}_{0 < \varepsilon < 1}$ est borné dans $OPS_{1,0}^0(\mathbf{R}^{n-1})$, $\{\Psi_\varepsilon\}_{0 < \varepsilon < 1}$ est aussi borné dans $OPS_{1,0}^0(\mathbf{R}^{n-1})$. Donc, il existe une constante $C_3 > 0$ qui est indépendante de ε telle que $|E_{1,\varepsilon}| \leq C_3 \|h_k\|^2$. Puisque $h_k \in L^2$, $\{|E_{1,\varepsilon}|\}_{0 < \varepsilon < 1}$ est borné.

Puisque $[x_{n-1}^2, T_{k,\varepsilon}] = 0$, on a $E_{2,\varepsilon} = \text{Re}([D_n^2, T_{k,\varepsilon}](x_{n-1}^2 h_k), T_{k,\varepsilon}(x_{n-1}^2 h_k))$. Puisque $x_{n-1}^2 h_k \in L^2$, $\{|E_{2,\varepsilon}|\}_{0 < \varepsilon < 1}$ est borné.

Notons que $[K, \lambda_\varepsilon(D_n) \alpha_{2k}(D')] = 0$. Alors, on a

$$E_{3,\varepsilon} = \text{Re}(\lambda_\varepsilon(D_n) \alpha_{2k}(D') [K, \psi_{2k+1}(x')] h_k, T_{k,\varepsilon} h_k).$$

Puisque ψ_{2k+1} est indépendant de x_{n-1} , on a $[K, \psi_{2k+1}] \in OPS_{1/2,1/2}^0(\mathbf{R}^n)$ en tenant compte de (3.1). Notons que $\lambda_\varepsilon(\xi_n) \leq 1$. Selon le théorème de Calderón-Vaillancourt, $\{|E_{3,\varepsilon}|\}_{0 < \varepsilon < 1}$ est borné.

Par le même argument, on peut savoir que $\{|E_{4,\varepsilon}|\}_{0 < \varepsilon < 1}$ est borné. Donc, la preuve est terminée. \square

Selon Lemme 3.10, il existe $f \in L^2(\mathbf{R}^n)$ et une séquence $\{r(j)\}_{j=1}^\infty$; $\lim_{j \rightarrow \infty} r(j) = \infty$ telle que pour tout $\varphi \in L^2(\mathbf{R}^n)$ on a $\lim_{j \rightarrow \infty} (M_{r(j)}, \varphi) = (f, \varphi)$, car $L^2(\mathbf{R}^n)$ est espace hilbertien. Selon la définition, $\lim_{j \rightarrow \infty} M_{r(j)} = M_0$ dans $\mathcal{D}'(\mathbf{R}^n)$. Donc, $M_0 = f$ et on obtient $M_0 \in L^2(\mathbf{R}^n)$. Puisque $\alpha_{2k+1}(\xi') = 1$ sur F_{2k+1} et $\Gamma_{2k+2} \subseteq$

F_{2k+1}^* , on a $\langle D_n \rangle^{1/2} \gamma_{2k+2}(D)(\psi_{2k+1} \chi_k \Lambda_{k+1} \gamma_{2k}(D)) w_* \in L^2(\mathbb{R}^n)$. Donc, on obtient $h_{k+1} \in L^2(\mathbb{R}^n)$, qui achève l'induction.

References

- [1] L. Boutet de Monvel., Hypoelliptic operators with double characteristic and related pseudo-differential operators, *Comm. Pure and Appl. Math.* **27** (1974), 585–639.
- [2] Fedii V. S., On a criterion for hypoellipticity, *Math. USSR Sb* **14** (1971), 15–45.
- [3] Grigis. A., Hypoellipticité et paramétrix pour des opérateurs pseudodifférentiels à caractéristiques doubles, *Astérisque* **34–35** (1976), 183–205.
- [4] Hörmander L., *The analysis of Linear Partial Differential Operators I*, Second Edition, Springer-Verlag, 1983.
- [5] Hoshiro T., Hypoellipticity for infinitely degenerate elliptic and parabolic operators of second order, *J. Math. Kyoto Univ.* **28** (1988), 615–632.
- [6] Hoshiro T., On hypoellipticity for a certain operator with double characteristic, *J. Math. Soc. Japan* **43** (1991), 593–603.
- [7] Kumano-go H., *Pseudo-differential operators*, MIT Press (1981).
- [8] Kusuoka S.-Stroock D., Applications of the Malliavin calculus, Part II, *J. Fac. Sci. Univ. Tokyo Sect. IA, Math.* **32** (1985), 1–76.
- [9] Morimoto Y., A criterion for hypoellipticity of second order differential operators, *Osaka J. Math* **24** (1987), 651–675.
- [10] Morimoto Y., Propagation of wave front sets and hypoelliptic operators, *Pitman Res. Notes Math Ser.* **32** (1992), 212–224.
- [11] Morimoto Y.-Morioka T., The positivity of Schrödinger operators and the hypoellipticity of second order degenerate elliptic operators, à apparaitre dans *Bull. Sci. Math.*
- [12] Morioka T., Some remarks on micro-hypoelliptic operators of infinitely degenerate type, *Publ. RIMS Kyoto Univ.* **28** (1992), 129–138.
- [13] Morioka T., Hypoellipticité pour un certain opérateur à caractéristique double, à apparaitre dans *Tsukuba. J. Math.* **22** (1998).
- [14] Sawyer E., A weighted inequality and eigenvalue estimates for Schrödinger operators, *Indiana Univ. Math. J.* **35** (1986), 1–28.
- [15] Wakabayashi S.-Suzuki M., Microhypoellipticity for a class of pseudodifferential operators with double characteristics, *Funkciaj Ekvacioj* **36** (1993), 519–556.

Département de Mathématiques
 Université d'Osaka, Osaka 560,-
 JAPON