ROCKY MOUNTAIN
JOURNAL OF MATHEMATICS
Volume 29, Number 1, Spring 1999

ENSEMBLE DE CONVERGENCE

GILBERT MURAZ

RÉSUMÉ. Pour quel sous-ensemble K de Γ, groupe dual du groupe l.c.a G, la convergence pour $\gamma \in K$ des séries partielles $\sum_{n\in N_\gamma} a_n$, où $N_\gamma = \{n \in \mathbf{N}, (\langle g_n, \gamma\rangle + \overline{\langle g_n, \gamma\rangle})/2 > \alpha\}$, $\{g_n\}_{n\in\mathbf{N}}$ fixée dans G implique la convergence de la série $\sum_{n\in\mathbf{N}} a_n$? Le comportement de la mesure des ensembles $\{\gamma \in K, (\langle g, \gamma\rangle + \overline{\langle g, \gamma\rangle})/2 > \alpha\}$ lorsque g parcourt G permet d'appporter des solutions.

Le but de ce travail est de démontrer dans le cadre général des groupes localement compacts abéliens, le résultat proposé comme problème 6632, American Mathematical Monthly, 1990 [**3**] pour $G = \mathbf{T}$ ou dans [**9**] pour $G = \mathbf{R}^n$.

L'origine de ce problème est l'étude du domaine d'extension maximal [**10**] de l'opérateur intégral

$$c(u)(\gamma) = \int_{g\in G} \frac{\langle g, \gamma\rangle + \overline{\langle g, \gamma\rangle}}{2} u(g)\, dg$$

où G est un groupe localement compact abélien et Γ son groupe de caractères. Le cas $G = \mathbf{R}$ est traité dans [**6**]. Des applications à la converegnce des séries $\sum_{n\in\mathbf{N}} a_n(\langle g_n, \gamma\rangle + \overline{\langle g_n, \gamma\rangle})/2$ sont données, en particulier une version des classiques théorèmes de Lusin-Denjoy [**1, 2, 4, 11**] et de Salem [**1, 8**]. Des résultats généraux analogues au cas $\Gamma = \mathbf{R}$ ou $\mathbf{T}$ peuvent être obtenus de la même façon.

Par définition, un caractère $\gamma \in \Gamma$ définit sur G une fonction à valeurs dans le tore $\mathbf{T} = \{e^{i\theta}, \theta \in]-\pi, +\pi]\}$ notée $\langle g, \gamma\rangle$.

Réciproquement, par le théorème de Pontryagin [**7**] le groupe de caractères de Γ s'identifie à G. La topologie sur G est définie à partir d'une base de voisinages élémentaires de l'origine de la forme

$$V_{C,\alpha} = \{g \in G, \langle g, \gamma\rangle \in I_\alpha \text{ pour tout } \gamma \in C\}$$

Received by the editors on July 10, 1995, and in revised form on December 7, 1996.

où C est un compact de Γ, α un réel, $0 < \alpha < 1$ et $I_\alpha = \{e^{i\theta} \in \mathbf{T}, \cos\theta > \alpha\}$ [**7**].

Dans le même esprit, pour une suite $\{g_n\}_{n\in\mathbf{N}}$ d'éléments de G, γ un élément de Γ de E un sous-ensemble du tore, est associé le sous-ensemble N_γ de $\mathbf{N}$ défini par $N_\gamma = \{n \in \mathbf{N}, \langle g_n, \gamma\rangle \in E\}$.

Définition. Un sous-ensemble mesurable K de Γ, de mesure positive, est dit de convergence pour une suite $\{g_n\}_{n\in\mathbf{N}}$ d'éléments de G, relativement à un sous-ensemble mesurable E du tore $\mathbf{T}$, si la condition $\sum_{n\in N_\gamma} a_n < \infty$ pour presque tout $\gamma \in K$ implique la convergence $\sum_{n\in\mathbf{N}} a_n < \infty$.

Par définition même, un sur-ensemble d'un ensemble de convergence est encore de convergence pour la même suite relativement au même sous-ensemble E de $\mathbf{T}$.

Dans le cas $E = \mathbf{T}$, tout sous-ensemble (non vide) de Γ est bien sûr de convergence quelle que soit la suite $\{g_n\}_{n\in\mathbf{N}}$.

Les mêmes arguments utilisés pour la démonstration du théorème de Lusin-Denjoy [**1, 2, 4, 11**] ou de G.M.S. [**3**] donnent le critère suivant:

Théorème. *Un sous-ensemble mesurable K de Γ, $0 < |K| < \infty$, vérifiant $\liminf_n |K\cap g_n^{-1}(E)| \geq k > 0$ est de convergence pour $\{g_n\}_{n\in\mathbf{N}}$ relativement à E.*

Démonstration. Soit une série $\sum_{n\in\mathbf{N}} a_n$ de termes réels positifs telle que la fonction $\varphi(\gamma) = \sum_{n\in N_\gamma} a_n$, $N_\gamma = \{n, \langle g_n, \gamma\rangle \in E\}$ soit finie presque partout sur K. La fonction φ est mesurable et pour tout $\varepsilon > 0$ il existe une constante M et un sous-ensemble mesurable K_ε de K tels que

- $|K \backslash K_\varepsilon| < \varepsilon$.
- $\sup_{\gamma\in K_\varepsilon} \varphi(\gamma) \leq M$.

Le théorème de Fubini permet d'écrire

$$M|K_\varepsilon| \geq \int_{K_\varepsilon} \varphi(\gamma)\, d\gamma = \sum_{n\in\mathbf{N}} a_n \int_{K_\varepsilon \cap g_n^{-1}(E)} d\gamma \;= \sum_{n\in\mathbf{N}} a_n |K_\varepsilon \cap g_n^{-1}(E)|.$$

L'hypothèse $\liminf_n |K \cap g_n^{-1}(E)| \geq k > 0$ implique l'existence d'un entier N_0 tel que pour tout $n \geq N_0$ on ait $|K \cap g_n^{-1}(E)| \geq k/2$.

Pour $\varepsilon = k/3$ et $n \geq N_0$ la mesure de l'ensemble $K_\varepsilon \cap g_n^{-1}(E)$ vérifie

$$\begin{aligned} |K_\varepsilon \cap g_n^{-1}(E)| &\geq |K \cap g_n^{-1}(E)| - |(K \backslash K_\varepsilon) \cap g_n^{-1}(E)| \\ &\geq \frac{k}{2} - \frac{k}{3} = \frac{k}{6}. \end{aligned}$$

Les inégalités précédentes s'écrivent:

$$M|K_\varepsilon| \geq \sum_{n \geq N_0} a_n \frac{k}{6}$$

ce qui assure la convergence de la série $\sum_{n \in \mathbf{N}} a_n$. □

Ce critère ramène l'étude des ensembles de convergence au comportement de la mesure des ensembles $K \cap g^{-1}(E)$ lorsque g parcourt G.

Dans ce qui suit l'ensemble E est un voisinage de l'origine de la forme

$$I_\alpha = \{e^{i\theta} \in \mathbf{T}, \cos\theta > \alpha\} = \{e^{i\theta} \in \mathbf{T}, -\arccos\alpha < \theta < \arccos\alpha\}, \\ -1 < \alpha < 1.$$

Théorème. *Tout sous-ensemble mesurable K de Γ, $0 < |K| < \infty$, vérifie*

$$\lim_{g \to 0} |K \cap g^{-1}(I_\alpha)| = |K|.$$

Démonstration. Il suffit de démontrer le résultat pour les ensembles compacts K.

Pour tout g dans le voisinage élémentaire $V_{K,\alpha} = \{g \in G, \langle g, \gamma \rangle \in I_\alpha, \forall \gamma \in K\}$ les ensembles $K \cap g^{-1}(I_\alpha)$ et K coïncident et la mesure $|K \cap g^{-1}(I_\alpha)|$ devient stationnaire lorsque g tend vers 0. □

Théorème. *Pour tout voisinage V de 0 dans Γ, il existe une constante A telle que $|V \cap g^{-1}(I_\alpha)| \geq A|I_\alpha|$, pour tout g dans G.*

Démonstration. Les ensembles J_p de la forme $J_p = \{e^{i\theta} \in \mathbf{T}, -\pi/p < \theta \leq \pi/p\}$ avec p entier, ont pour mesure $|J_p| = 1/p$ en normalisant la mesure du tore $|\mathbf{T}| = 1$. De plus $\mathbf{T}$ est l'union disjointe des $e^{i(2k\pi/p)}J_p$, $k \in \{0, 1, \dots, p-1\}$, $\mathbf{T} = \cup_{k=0}^{k=p-1} e^{2ik\pi/p}J_p$.

Pour tout voisinage V de l'origine dans Γ, il existe un voisinage W de l'origine symétrique $(-W = W)$ tel que $W + W \subset V$.

Pour tout g dans G, $g^{-1}(\mathbf{T})$ est égal à Γ, c'est-à-dire

$$W = W \cap g^{-1}(\mathbf{T}) = \bigcup_{k=0}^{p-1} W \cap g^{-1}(e^{2ik\pi/p}J_p).$$

Il existe un indice k_0 tel que

$$|W \cap g^{-1}(e^{2ik_0\pi/p}J_p)| \geq \frac{|W|}{p}.$$

Soit w_{k_0} dans $W \cap g^{-1}(e^{2ik_0\pi/p}J_p)$; son image $\langle g, w_{k_0}\rangle$ par g est de la forme $e^{2ik_0\pi/p}e^{i\theta_0}$ avec $e^{i\theta_0} \in J_p$ ce qui entraîne:

$$W \cap g^{-1}(e^{2ik_0\pi/p}J_p) = (W - w_0) \cap g^{-1}(e^{2ik_0\pi/p}e^{-2ik_0\pi/p}e^{-i\theta_0}J_p).$$

Comme w_0 est dans W, les inégalités suivantes sont vérifiées pour $\alpha = \cos(3\pi/p)$:

$$\begin{aligned} |V \cap g^{-1}(I_\alpha)| &\geq |(W + W) \cap g^{-1}(I_\alpha)| \\ &\geq |W \cap g^{-1}(e^{2ik_0\pi/p}J_p)| \\ &\geq \frac{|W|}{p} = \frac{|W|}{3}|I_\alpha|. \end{aligned}$$

La démonstration du théorème pour α quelconque est alors immédiate. $\square$

Théorème. *Pour tout ensemble mesurable K de Γ, $0 < |K|$, et tout $\alpha < 0$, il existe $k_\alpha > 0$ tel que* $\liminf_{g\to\infty} |K \cap g^{-1}(I_\alpha)| \geq k_\alpha > 0$.

Démonstration. Il suffit en fait de démontrer ce résultat en supposant que K vérifie $|K| < \infty$. Dans ce cas χ_K, la fonction caractéristique de K est intégrable et d'après le théorème de Riemann-Lebesgue sur le comportement à l'infini de la transformée de Fourier (inverse) $\hat{\chi}_K$ de χ_K il advient:

$$\lim_{g\to\infty}\int_{\gamma\in\Gamma}\langle g,\gamma\rangle\chi_K\,d\gamma=\lim_{g\to\infty}\hat{\chi}_K(g)=0$$

$$\lim_{g\to\infty}\int_{\gamma\in\Gamma}\left(\frac{\langle g,\gamma\rangle+\overline{\langle g,\gamma\rangle}}{2}\right)\chi_K\,d\gamma=0$$

$$\lim_{g\to\infty}\left(\int_{\gamma\in\Gamma}\frac{\langle g,\gamma\rangle+\overline{\langle g,\gamma\rangle}}{2}\chi_{K\cap g^{-1}(I_\alpha)}\,d\gamma\right.$$
$$\left.+\int_{\gamma\in\Gamma}\frac{\langle g,\gamma\rangle+\overline{\langle g,\gamma\rangle}}{2}\chi_{K\cap g^{-1}(I_\alpha^-)}\,d\gamma\right)=0$$

où $I_\alpha^-=\{e^{i\theta}\in\mathbf{C},\cos\theta\le\alpha\}$.

La deuxième intégrale $\int_{\gamma\in\Gamma}((\langle g,\gamma\rangle+\overline{\langle g,\gamma\rangle})/2)\chi_{K\cap g^{-1}(I_\alpha^-)}\,d\gamma$ est majorée par $\alpha\cdot|K\cap g^{-1}(I_\alpha^-)|$.

Si le théorème n'est pas vérifié, il existe une suite généralisée $\{g_i\}_{i\in I}$ d'éléments de G tendant vers l'infini telle que:

$$\lim_{g_i}|K\cap g_i^{-1}(I_\alpha)|=0$$

$$\lim_{g_i}|K\cap g_i^{-1}(I_\alpha^-)|=|K|$$

$$\lim_{g_i}\int_{\gamma\in\Gamma}\frac{\langle g,\gamma\rangle+\overline{\langle g,\gamma\rangle}}{2}\chi_{(K\cap g_i^{-1}(I_\alpha))}\,d\gamma=0$$

$$0=\lim_{g_i}\int_{\gamma\in\Gamma}\frac{\langle g,\gamma\rangle+\overline{\langle g,\gamma\rangle}}{2}\chi_{(K\cap g_i^{-1}(I_\alpha^-)}\,d\gamma\le\alpha|K|<0$$

ce qui est absurde. □

Théorème. *Soit* $\{g_i\}_{i\in I}$ *une suite (généralisée) d'éléments de* G *vérifiant* $\lim_{i\in I}pg_i=\infty$, $p=1,\dots,2s$, $s\in\mathbf{N}^*$. *Pour tout ensemble mesurable* K *de* Γ, $0<|K|$ *et pour tout* $0<\alpha<(1/2)((2s)!/(s!)^2)^{1/2s}$, *il existe* $k_\alpha>0$, *tel que* $\liminf_{i\in I}|K\cap g_i^{-1}(I_\alpha)|\ge k_\alpha>0$.

La démonstration est basée sur l'étude de la limite des intégrales

$$\int_{\gamma\in\Gamma}\left(\frac{\langle g_i,\gamma\rangle+\overline{\langle g_i,\gamma\rangle}}{2}\right)^{2s}\chi_K(\gamma)\,d\gamma$$
$$=\left(\frac{1}{2}\right)^{s}\int_{\gamma\in\Gamma}\left(1+\frac{\langle 2g_i,\gamma\rangle+\overline{\langle 2g_i,\gamma\rangle}}{2}\right)^{s}\chi_K(\gamma)\,d\gamma.$$

La condition $\lim_{i\in I} pg_i=\infty$, quel que soit p, est vérifiée dans les groupes $\mathbf{R}^n$ dès que la suite $\{g_i\}_{i\in I}$ tend vers l'infini; les groupes compacts ne vérifient pas cette condition mais aussi par exemple les groupes infinis d'éléments nilpotents comme $(\mathbf{Z}/2\mathbf{Z})^{\mathbf{N}}$.

Le résultat suivant est encore valable si s est un réel supérieur à $1/2$. Pour une démonstration complète, se reporter à [**5**].

Lemme. *Soit $\{g_i\}_{i\in I}$ une suite (généralisée) d'éléments de G telle que $\lim_{i\in I} pg_i=\infty$, $p=1,\ldots,2s$, $s\in\mathbf{N}^*$. Pour tout $f\in L^1(\Gamma)$ on a:*

$$\lim_{i\in I}\int_{\gamma\in\Gamma}\left(\frac{\langle g_i,\gamma\rangle+\overline{\langle g_i,\gamma\rangle}}{2}\right)^{2s}|f(\gamma)|\,d\gamma$$
$$=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}(\cos t)^{2s}\,dt\int_{\gamma\in\Gamma}|f(\gamma)|\,d\gamma$$
$$=\frac{1}{2^{2s}}C_{2s}^{s}\int_{\gamma\in\Gamma}|f(\gamma)|\,d\gamma.$$

Démonstration. En effet

$$\left(\frac{\langle g,\gamma\rangle+\overline{\langle g,\gamma\rangle}}{2}\right)^{2s}=\frac{1}{2^{2s}}\sum_{p=0}^{2s}C_{2s}^{p}\langle g,\gamma\rangle^{2s-p}\overline{\langle g,\gamma\rangle}^{p}$$
$$=\frac{1}{2^{2s}}\sum_{p=0}^{2s}C_{2s}^{p}\langle g,\gamma\rangle^{2s-2p}.$$

L'intégrale s'écrit

$$\int_{\gamma\in\Gamma}\left(\frac{\langle g_i,\gamma\rangle+\overline{\langle g_i,\gamma\rangle}}{2}\right)^{2s}|f(\gamma)|\,d\gamma$$
$$=\frac{1}{2^{2s}}\sum_{p=0}^{2s}C_{2s}^{p}\int_{\gamma\in\Gamma}\langle(2s-2p)g_i,\gamma\rangle|f(\gamma)|\,d\gamma.$$

Par hypothèse, d'après le théorème de Lebesgue-Riemann (cité précédemment) pour $s \neq p$ les limites des intégrales $\int_{\gamma\in\Gamma}\langle(2s-2p)g_i,\gamma\rangle|f(\gamma)|\,d\gamma$ sont nulles.

Par passage à la limite, il reste:

$$\frac{1}{2^{2s}}C_{2s}^{s}\int_{\gamma\in\Gamma}|f(\gamma)|\,d\gamma. \qquad \square$$

Démonstration du théorème. La quantité $((\langle g_i,\gamma\rangle+\overline{\langle g_i,\gamma\rangle})/2)^{2s}$ est majorée par α^{2s} pour tout $\gamma\in g_i^{-1}(I_\alpha^-)$ et minorée par α^{2s} pour $\gamma\in g_i^{-1}(I_\alpha)$ ce qui permet d'écrire les inégalités

$$\begin{aligned}\int_{\gamma\in\Gamma}\left(\frac{\langle g_i,\gamma\rangle+\overline{\langle g_i,\gamma\rangle}}{2}\right)^{2s}&\chi_K(\gamma)\,d\gamma\\ &\le \alpha^{2s}|K\cap g_i^{-1}(I_\alpha^-)|+|K\cap g_i^{-1}(I_\alpha)|\\ &\le \alpha^{2s}|K|+|K\cap g_i^{-1}(I_\alpha)|(1-\alpha^{2s}).\end{aligned}$$

Par passage à la limite, en utilisant le lemme:

$$\frac{((1/2^{2s})C_{2s}^{2}-\alpha^{2s})|K|}{1-\alpha^{2s}}\le \liminf_i |K\cap g_i^{-1}(I_\alpha)|.$$

Le théorème est démontré pour $(1/2)(C_{2s}^{s})^{1/2s}>\alpha$.

Pour $G=\mathbf{R}$ ou $\mathbf{R}^n$ ou tout groupe G tel que les sous-groupes nG ne soient pas bornés, $n\in\mathbf{N}$, le résultat suivant est immédiat en remarquant que $\lim_s((1/2^{2s})(2s)!/(s!)^2)^{1/2s}=1$. $\square$

Corollaire. *Soit $\{g_i\}_{i\in I}$ une suite (généralisée) d'éléments de G vérifiant*

$$\lim_i pg_i=\infty \quad \textit{pour tout } p\in\mathbf{N}.$$

Pour tout ensemble mesurable K de Γ, $0<|K|$, et tout $\alpha<1$, il existe $k_\alpha>0$ tel que

$$\liminf_i |K\cap g_i^{-1}(I_\alpha)|\ge k_\alpha>0.$$

La généralisation des deux résultats suivants, de Lusin-Denjoy [**1, 4**] et Salem [**1, 8**], sont des applications directes et classiques, comparant la nature de la série $\sum_{n\in\mathbf{N}} a_n$ et de la série "trigonométrique" $\sum_{n\in\mathbf{N}} a_n((\langle g_n,\gamma\rangle + \overline{\langle g_n,\gamma\rangle})/2)$ lorsque g_n tend vers l'infini.

Théorème (Lusin-Denjoy). *Soit $\{g_n\}_{n\in\mathbf{N}}$ une suite d'éléments de G telle que $\lim_n g_n = \lim_n 2g_n = \infty$; la série $\sum_{n\in\mathbf{N}} a_n((\langle g_n,\gamma\rangle + \overline{\langle g_n,\gamma\rangle})/2)$ est absolument convergente sur un ensemble de mesure strictement positive $K \subset \Gamma$ si et seulement si $\sum_{n\in\mathbf{N}} |a_n| < \infty$.*

Démonstration. La condition est évidemment suffisante et il suffit de démontrer le résultat lorsque $a_n \geq 0$, $n \in \mathbf{N}$. Soit $M > 0$ et K' le sous-ensemble de K, de mesure $|K'| > 0$,

$$K' = \left\{\gamma \in K, \sum a_n \left|\frac{\langle g_n,\gamma\rangle + \overline{\langle g_n,\gamma\rangle}}{2}\right| \leq M\right\}.$$

Il advient:

$$\begin{aligned}\sum_n a_n \int_{K'\cap g_n^{-1}(I_\alpha)} \left|\frac{\langle g_n,\gamma\rangle + \overline{\langle g_n,\gamma\rangle}}{2}\right| d\gamma \\ &\leq \int_{K'} \sum_n a_n \left|\frac{\langle g_n,\gamma\rangle + \overline{\langle g_n,\gamma\rangle}}{2}\right| d\gamma \\ &\leq \sum_{n\in\mathbf{N}} a_n \alpha |K' \cap g_n^{-1}(I_\alpha)| \\ &\leq M|K'|.\end{aligned}$$

En utilisant le théorème précédent, l'ensemble K' est de convergence pour la suite $\{g_n\}_{n\in\mathbf{N}}$ relativement à I_α pour $\alpha < \sqrt{2}/2$, ce qui assure le résultat.

Théorème. *Soit une série à termes positifs $a_n \geq 0$ divergente $\sum_n a_n = \infty$; pour $\alpha < (1/2^{2s})C_{2s}^2$ l'ensemble K des éléments γ de Γ tels que*

$$\limsup_{N\to\infty} \frac{\sum_{n=1}^N a_n |\langle g_n,\gamma\rangle + \overline{\langle g_n,\gamma\rangle}|^{2s}}{\sum_{n=1}^N a_n} \leq \alpha,$$

où $\{g_n\}_{n\in\mathbf{N}}$ *est une suite d'éléments de* G *avec* $\lim_n pg_n = \infty$, $p = 1, \dots, 2s$, $s \in \mathbf{N}^*$, *est un ensemble de mesure nulle.*

Le résultat reste valable pour s réel avec la condition pour la suite $\{g_n\}_{n\in\mathbf{N}}$, $\lim_n pg_n = \infty$, pour tout $p \in \mathbf{N}$.

Démonstration. Les hypothèses sur la suite $\{g_n\}_{n\in\mathbf{N}}$ impliquent

$$\begin{aligned}\lim_n \int_K \left(\frac{\langle g_n,\gamma\rangle + \overline{\langle g_n,\gamma\rangle}}{2}\right)^{2s} d\gamma &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} (\cos t)^{2s}\, dt|K| \\ &= \frac{1}{2^{2s}} C_{2s}^2 |K|.\end{aligned}$$

Un argument classique de moyenne de Cèsarò [**11**, p. 75] donne si $|K| > 0$:

$$\lim_{N\to\infty} \int_K \frac{\left(\sum_{n=1}^N a_n((\langle g_n,\gamma\rangle + \overline{\langle g_n,\gamma\rangle})/2)^{2s}\right)}{\sum_{n=1}^N a_n} d\gamma = \frac{1}{2^{2s}} C_{2s}^s |K| \le \alpha |K|$$

ce qui est impossible pour α vérifiant $\alpha < (1/2^{2s}) C_{2s}^s$. $\square$

Des applications relatives à l'étude du domaine d'extension d'opérateurs intégraux sont données dans [**6**].

D'autres applications peuvent être obtenues, analogues au cas $G = \mathbf{R}$ ou $\mathbf{Z}$ lorsque $\{g_n\}_{n\in\mathbf{N}}$ tend vers l'infini, qui peuvent également s'étendre, sans difficultés lorsque $\{g_n\}_{n\in\mathbf{N}}$ ne tend pas vers l'infini.

Le critère fourni pour un ensemble de convergence, n'est évidemment que suffisant et ne concerne que les ensembles de mesures strictement positives.

Dans le cas $G = \mathbf{R}$ ou $\mathbf{R}^d$, un ensemble de mesure positive est de convergence pour la suite $\{n = (n_1, \dots, n_\alpha) \in \mathbf{Z}^d\}$ relativement à I_α, mais aussi à n'importe quel sous-ensemble du tore de mesure strictement positive [**3, 9**].

Remerciements. L'auteur remercie le referee de ce travail de ses remarques pertinentes qui lui ont permis d'en améliorer la rédaction et d'apporter des précisions nécessaires à une meilleure compréhension.

BIBLIOGRAPHIE

1. N.K. Bary, *A treatise on trigonometric series*, vol. I and II, Pergamon Press, 1964.

2. R.E. Edwards, *Fourier series*, vol. I, Second edition, Springer Verlag, New York, 1972.

3. F. Galvin, G. Muraz and P. Szeptycki, *Infinite almost everywhere*, Amer. Math. Month., Advanced problem #6632 (1990), 433.

4. J.P. Kahane and R. Salem, *Ensembles parfaits et séries trigonométriques*, Hermann Paris, 1963.

5. G. Muraz, *Multiplicateurs des espaces* $\Lambda(r,s)$, (*à paraître*).

6. G. Muraz and P. Szeptycki, *Domains of trigonometric transforms*, Rocky Mountain J. Math. **26** (1996), 1517–1527.

7. W. Rudin, *Fourier analysis on groups*, Interscience Publishers, New York, London, 1960.

8. R. Salem, *On the absolute convergence of trigonometrical series*, DMJ **8** (1941), 317–334.

9. P. Szeptycki, *Infinite a.e. in d-dimension*, private communication.

10. ———, *Some remarks on the extended domain of Fourier transform*, Bull. Amer. Math. Soc. **73** (1967), 398–402.

11. A. Zygmund, *Trigonometric series*, Vol. I and II, Cambridge University Press, Cambridge, 1968.

Université de Grenoble I, Institut Fourier, Laboratoire de Mathématiques, UMR 5582 C.N.R.S.-U.J.F., B.P. 74, 38402 St. Martin d'Hères Cedex, France
E-mail address: muraz@fourier.ujf-grenoble.fr