PACIFIC JOURNAL OF MATHEMATICS
Vol. 33, No. 2, 1970

CLASSES DE CHERN ET THEOREME DE GAUSS-BONNET

NGÔ VAN QUÊ

La theorie des classes caractéristiques peut etrê développée de manière axiomatique dans la catégorie des espaces topologiques "admissibles", i.e., localement compacts, dénombrables á l'infini et de dimension cohomologique finie [Hirzebruch, Topological Methods in Algebraic Geometry, Springer Verlag, N.Y.]. Nous allons nous restreindre à la catégorie des variétés paracompactes, différentiables de classe $\mathscr{C}^\infty$ et introduire les classes caractéristiques telles qu'clles étaient construites originalement par S. Chern [voir par exemple, S. Chern, Differential geometry of fiber bundles, Proc. Int. Congress, 1950]. P. A. Griffiths a démontré le théoremè, dû à Chern, dit de Gauss-Bonnet pour le cas des fibrés vectoriels de rang 1 [On a theorem of Chern, Illinois J. Math. 6 (1962)]. Dans le même ordre d'idées nous voulons donner dans ce travail une démonstration simple, par la théorie des connexions, du théorème de Gauss-Bonnet dans le cas des fibrés vectoriels de rang quelconque.

1. Connexion dans un fibre hermitien.

1. *Soit M une variété (différentiable).* Le fibré tangent de M sera noté par T. Le fibré $T^*_C = T^* \underset{R}{\otimes} C$ désignera le fibré des 1-formes complexes sur M.

DÉFINITION 1.1. Etant donné un fibré vectoriel complexe E sur M, une connexion dans E est la donnée d'un opérateur différentiel

$$\nabla\colon E \longrightarrow T^*_C \otimes E$$

(produit tensoriel de Whitney sur le corps des nombres complexes), tel que pour toute fonction f à valeurs complexes sur M

$$\nabla(fs) = df \otimes s + f\nabla(s) ;$$

dans le cas où E est muni d'une structure hermitienne, la connexion sera dite hermitienne si

$$d\langle s, s'\rangle = \langle \nabla(s), s'\rangle + \langle s, \nabla(s')\rangle .$$

EXEMPLE. Considérons le fibré hermitien trivial

$$E = M \times C^n .$$

Toute section s de E sera un n-tuple $(f^1, \cdots, f^n)$ de fonctions sur M à valeurs complexes, et on a $T^*_C \otimes E = T^*_C \times \cdots \times T^*_C$, produit n-tuple