Journal of Mathematics,
Osaka City University,
Vol. 12, No. 1-2.

Zur Idealtheorie in Ordnungen

Von Takasaburo UKEGAWA

(Eingegangen am 13, September 1961)

Es sei S ein Schiefring mit Einselement, und $\mathfrak{o}$ sei eine Ordnung von S. Es sei ferner $\mathfrak{o}^*$ eine $\mathfrak{o}$ umfassende, mit $\mathfrak{o}$ äquivalente Maximalordnung, die die folgenden Asanoschen Bedingungen genügt:

A_1: $\mathfrak{o}^*$ ist eine reguläre Maximalordnung.

A_2: Es gilt der Teilerkettensatz für ganze zweiseitige $\mathfrak{o}^*$-Ideale.

A_3: Jedes Primideal von $\mathfrak{o}^*$ ist stark teilerlos, d.i. der Restklassenring nach jedem Primideal ist ein einfacher Ring.

$\mathfrak{f}$ sei der Führer von $\mathfrak{o}$ hinsichtlich $\mathfrak{o}^*$. Im allgemeinen gibt es noch andere solche Maximalordnungen. Zunächst betrachten wir die Beziehungen zwischen den Führern hinsichtlich der verschiedenen solchen Maximalordnungen. Weiter untersuchen wir die Bedingungen dafür, dass jedes in $\mathfrak{o}$ enthaltene zweiseitige $\mathfrak{o}$-Ideal als ein Durchschnitt von endlich vielen Primäridealen dargestellt wird. Bei der Zerlegung der in $\mathfrak{o}$ enthaltenen $\mathfrak{o}$-Ideale müssen wir die Barnessche Primalideale[1] berücksichtigen: tatsächlich in der Zerlegung des Führers $\mathfrak{f}$ treten nicht nur die Primärideale sondern auch Primalideale auf. Wir betrachten die $\mathfrak{f}$-Komponente in $\mathfrak{o}$ wie bei § 10 [2]. Schliesslich untersuchen wir die Blockideale und deren Primteiler, und wir zeigen, dass jedes Blockideal höchstens nur einen regulären Primteiler besitzt, wenn S eine Algebra über dem $\mathfrak{p}$-adischen Zahlkörper $K_{\mathfrak{p}}$ ist: also sind fast alle Primteiler des Blockideals Primteiler von $\mathfrak{f}$.

§ 1. Beziehungen zwischen den Führern von $\mathfrak{o}$ bezüglich verschiedener Maximalordnungen.

Es sei S ein Schiefring mit Einselement 1, $\mathfrak{o}$ eine Ordnung von S, und $\mathfrak{o}_i^*$, $\mathfrak{o}_k^*$, $\cdots$ die Asanoschen Bedingungen (A_1), A_2, A_3 genügende, $\mathfrak{o}$ umfassende, mit $\mathfrak{o}$ äquivalente Maximalordnungen. Es sei $\mathfrak{f}_i$ bzw. $\mathfrak{f}_k$ der Führer von $\mathfrak{o}$ bezüglich $\mathfrak{o}_i^*$ bzw. $\mathfrak{o}_k^*$. Wir setzen $\mathfrak{o}_i^*=\mathfrak{o}^*$ auf einen Augenblick.

HILFSSATZ 1.[2] *Es sei $\mathfrak{p}$ ein Primideal von $\mathfrak{o}$ und setzen wir $\mathfrak{o}^*\mathfrak{p}\mathfrak{o}^*\cap\mathfrak{o}=\mathfrak{p}_0$. $\mathfrak{p}$ ist dann und nur dann nicht ein Verengungsideal von $\mathfrak{o}$, wenn $(\mathfrak{p}:\mathfrak{p}_0)_r=(\mathfrak{p}:\mathfrak{p}_0)_l=\mathfrak{p}$ ist, wobei $(\mathfrak{p}:\mathfrak{p}_0)_r=\{x\in\mathfrak{o}\,|\,\mathfrak{p}_0x\subseteq\mathfrak{p}\}$, $(\mathfrak{p}:\mathfrak{p}_0)_l=\{x\in\mathfrak{o}\,|\,x\mathfrak{p}_0\subseteq\mathfrak{p}\}$ ist.*

Beweis. Aus der Definition $\mathfrak{p}_0(\mathfrak{p}:\mathfrak{p}_0)_r\subseteq\mathfrak{p}$, also $\mathfrak{p}_0\subseteq\mathfrak{p}$ oder $(\mathfrak{p}:\mathfrak{p}_0)_r\subseteq\mathfrak{p}$. Ist

1) Wir nennen Barnessche "primal ideal" [5] Primalideal.

2) Hilfssatz 1 und Satz 1 bedürfen an Stelle von A_3 nur, dass jedes Primideal teilerlos ist,