R. Zobel
Nagoya Math. J.
Vol. 78 (1980), 57-63

ZUM BEGRIFF DER BORELMESSBARKEIT

ROBERT ZOBEL

In dieser Arbeit werden die Voraussetzungen untersucht, die an einen topologischen Raum $(X, \mathfrak{S})$ mit dem System offener Mengen $\mathfrak{S}$ zu stellen sind, damit einige der in der Literatur geläufigen Begriffe der Borelmeßbarkeit reellwertiger Funktionen äquivalent sind.

$\mathfrak{B}(\mathfrak{S})$ sei die von $\mathfrak{S}$ erzeugte σ-Algebra. $\mathfrak{K}$ sei das System der kompakten Mengen von $(X, \mathfrak{S})$. $\mathfrak{R}(\mathfrak{K})$ sei der von $\mathfrak{K}$ erzeugte σ-Ring. $(X, \mathfrak{S})$ ist genau dann σ-kompakt, d. h.: abzählbare Vereinigung kompakter Mengen, wenn $\mathfrak{R}(\mathfrak{K}) \supset \mathfrak{B}(\mathfrak{S})$ gilt. Im allgemeinen enthält $\mathfrak{R}(\mathfrak{K})$ nur die σ-beschränkten Teilmengen von $\mathfrak{B}(\mathfrak{S})$, das sind die Mengen mit σ-kompakter Obermenge. Sei $K \in \mathfrak{K}$ und $\mathfrak{S}_K$ die Spurtopologie von $\mathfrak{S}$ auf K, $\mathfrak{R}_K(\mathfrak{K})$ die Spur des σ-Ringes $\mathfrak{R}(\mathfrak{K})$ und $\mathfrak{B}_K(\mathfrak{S})$ die Spur der σ-Algebra $\mathfrak{B}(\mathfrak{S})$ auf K. Dann gilt $\mathfrak{B}(\mathfrak{S}_K) = \mathfrak{B}_K(\mathfrak{S}) \subset \mathfrak{R}_K(\mathfrak{K})$.

Gilt speziell in $(X, \mathfrak{S})$, daß jede kompakte Menge abgeschlossen ist—eine Forderung, die schwächer als das Hausdorff'sche Trennungsaxiom T_2 und stärker als T_1 ist—so erhält man $\mathfrak{R}(\mathfrak{K}) \subset \mathfrak{B}(\mathfrak{S})$. $\mathfrak{R}(\mathfrak{K})$ besteht dann genau aus den σ-beschränkten Teilmengen von X. Für $K \in \mathfrak{K}$ gilt $\mathfrak{B}(\mathfrak{S}_K) = \mathfrak{B}_K(\mathfrak{S}) = \mathfrak{R}_K(\mathfrak{K})$. $(X, \mathfrak{S})$ ist σ-kompakt genau dann, wenn $\mathfrak{R}(\mathfrak{K}) = \mathfrak{B}(\mathfrak{S})$ gilt.

Sei $(X, \mathfrak{S})$ ein beliebiger, topologischer Raum und $\mathfrak{R}$ ein σ-Ring über X mit $\mathfrak{K} \subset \mathfrak{R}$. Dann heißt ein Maß μ auf $(X, \mathfrak{R})$ ein Borelmaß, wenn $\mu(K) < \infty$ für $K \in \mathfrak{K}$ gilt. Es heißt von innen regulär, wenn für $A \in \mathfrak{R}$ gilt $\mu(A) = \sup\{\mu(K) \colon K \in \mathfrak{K} \wedge K \subset A\}$.

Sei μ speziell ein von innen reguläres Borelmaß auf $(X, \mathfrak{R}(\mathfrak{K}))$ und $\mathfrak{R}_\mu(\mathfrak{K})$ die Vervollständigung von $\mathfrak{R}(\mathfrak{K})$ bezüglich μ. Dann ist

$$\mathfrak{B}_\mu(\mathfrak{K}) =_{\mathrm{Df}} \left\{A \colon A \subset X \wedge \bigwedge_{K \in \mathfrak{K}} A \cap K \in \mathfrak{R}_\mu(\mathfrak{K})\right\}.$$

σ-Algebra über X und μ besitzt genau eine Fortsetzung $\bar{\mu}$ zu einem von innen regulären Borelmaß über $(X, \mathfrak{B}_\mu(\mathfrak{K}))$, die wesentliche Fortsetzung

Received June 16, 1978.