J. DIFFERENTIAL GEOMETRY
6 (1971) 47-94

VARIÉTÉS KÄHLÉRIENNES À PREMIÈRE CLASSE DE CHERN NON NEGATIVE ET VARIÉTÉS RIEMANNIENNES À COURBURE DE RICCI GÉNÉRALISEE NON NEGATIVE

ANDRE LICHNEROWICZ

Introduction

Le présent article est divisé en deux parties: l'une (Chap. I à V) est consacrée aux variétés kählériennes compactes à première classe de Chern C_1 non négative, l'autre (Chap. VI à VIII) aux variétés riemanniennes compactes à tenseur $\mathbf{C}$ (voir formule (20–10)) non négatif. L'un de ses buts est d'explorer l'analogie existant entre l'étude des applications holomorphes d'une variété kählérienne compacte dans un tore complexe et celle des applications harmoniques d'une variété riemannienne compacte dans un tore réel. On notera que $\mathbf{C}=0$ entraine la nullité du tenseur de Ricci $\mathbf{R}$ de la variété riemannienne envisagée (voir [15] a).

Les principaux résultats de la première partie sont énoncés dans les théorèmes des § 13 et § 16. Certains de ces résultats apparaissent dans [14] et [15] b. Le § 15 tire son importance d'une conjecture qu'il nous faut énoncer: considérons une variété kählérienne compacte de structure complexe fixée, de 2-forme fondamentale F. Faisons varier cette 2-forme dans sa classe de cohomologie réelle; si nous introduisons l'intégrale du carré du tenseur de Ricci (ou celle du carré de la courbure scalaire), les équations d'Euler correspondantes expriment que $d'(\operatorname{Tr}\mathbf{R})$ définit une transformation infinitésimale holomorphe. C'est pourquoi il est possible d'émettre la conjecture suivante.

(C) Sur toute variété kählérienne compacte, il existe une structure kählérienne telle que $d'(\operatorname{Tr}\mathbf{R})$ définisse une transformation infinitésimale holomorphe.

Si cette conjecture, que j'ai énoncée il y a une dizaine d'années, était exacte les résultats du § 16 seraient valables pour toute variété kählérienne compacte à $C_1 \geq 0$ (voir aussi [5]).

Les principaux résultats de la seconde partie sont énoncés dans les théorèmes du § 23 (qui correspondent à l'analogie énoncée) et dans ceux des § 26 et 27 qui constituent, en un certain sens, une extension de résultats de Cheeger-Gromoll. On peut en déduire un théorème concernant la simple connexité de certaines variétés kählériennes.

Communicated October 23, 1970.