49. *Suites limite-périodiques et théorie des nombres.* VIII

Par J.-L. MAUCLAIRE
C.N.R.S. et Université Waseda

(Communicated by Shokichi IYANAGA, M. J. A., April 12, 1983)

Soit $f: N^* \to \{0, 1\}$ une suite indexée par les entiers strictements positifs ne prenant que les valeurs 0 et 1. f est donc la fonction caractéristique d'une partie A de N^*. On suppose que f est limite-périodique B^1 (voir [3]). On définit une function $\delta(n)$ par :

$$\delta(n)=\begin{cases} 0 & \text{si } n \notin A, \\ \min\limits_m \{m-n \mid m>n,\ m \in A\} & \text{si } n \in A\,; \end{cases}$$

dans ce cas, δ est l'écart entre deux éléments consécutifs de A. On a le résultat suivant :

Théorème. *Si la densité de A est non-nulle, alors $\delta(n)$ est limite-périodique B^1.*

Preuve. 1) On a $\sum_{n\le x} \delta(n)=x+o(x),\ x\to+\infty$.

En effet, soient $N(x)=\operatorname{Max}\{n \mid n\le x,\ n \in A\}$ et $L(x)=\delta(N(x))+N(x)$. Pour y vérifiant $N(x)\le y\le L(x)-1$, on a

$$S(y)=\sum_{n\le x} f(n)=S(N(x))=S(L(x)-1).$$

D'où, comme la moyenne de f existe et égale la densité de A,

$$o(1)=\frac{S(N(x))}{N(x)}-\frac{S(L(x)-1)}{L(x)-1}=S(y)\cdot\left(\frac{1}{N(x)}-\frac{1}{L(x)-1}\right)$$
$$=S(y)\cdot\frac{\delta(N(x))-1}{N(x)\cdot(L(x)-1)},$$

ce qui donne

$$\frac{\delta(N(x))}{N(x)}\cdot d(A)=o(1), \qquad x\longrightarrow+\infty,$$

i.e.
$$\frac{\delta(N(x))}{N(x)}=o(1), \qquad x\longrightarrow+\infty.$$

Or, $\sum_{n\le x} \delta(n)=L(x)-\operatorname{Min}\{n \mid n \in A\}$. Donc, comme

$$\frac{S(N(x))}{N(x)}=\frac{S(y)}{y}+o(1)=\frac{S(L(x)-1)}{L(x)-1}+o(1),$$
$$x\longrightarrow+\infty, \quad \text{si} \quad N(x)\le y\le L(x)-1,$$

on a, en choisissant $y=x$,

$$\frac{N(x)}{x}=1+o(1), \qquad x\longrightarrow+\infty.$$

Et comme $\delta(N(x))=o(N(x))$, on obtient

$$\frac{L(x)}{x}=1+o(1), \qquad x\longrightarrow+\infty.$$