J. Math. Soc. Japan
Vol. 17, No. 4, 1965

Une démonstration de l'existence d'une fonction analytique sur une surface de Riemann

Par Reiko YASUDA

(Reçu le 21 sept. 1964)
(Revisé le 10 mars, 1965)

§ 1. Introduction.

Riemann s'assura premièrement de l'existence d'une fonction méromorphe non-constante sur toute surface de Riemann fermée, en montrant, d'après le principe de Dirichlet, qu'il existe une fonction harmonique possédant effectivement une singularité donnée. Depuis Riemann plusieurs personnes démontrèrent l'existence d'une telle fonction harmonique, selon des différentes méthodes.

Dans le présent mémoire, nous nous proposons de montrer qu'on peut construire, d'après l'idée d'Oka[1], une fonction méromorphe non-constante sur toute surface de Riemann fermée, c'est-à-dire sur toute variété analytique complexe compacte à une dimension.

Si un certain premier problème de Cousin non-trivial admetait une solution sur la surface, cette solution serait une fonction méromorphe non-constante. Mais, en général, un premier problème de Cousin n'a pas de solution sur une surface fermée. Cette impossibilité nous amène à permettre à la solution d'avoir de certains pôles convenables en outre de ceux de la donnée du problème. Manifestement, une telle solution incomplète est aussi une fonction voulue. Notre but est donc de montrer que toute première donnée de Cousin admet une solution incomplète. Une fonction méromorphe non-constante nous permes de considérer la surface fermée comme un domaine infini ramifié sur la sphère de Riemann d'une variable complexe.

En résolvant de nouveau un certain premier problème de Cousin, d'une façon incomplète dans le sens précédent, nous pouvons construire une fonction méromorphe qui sépare les feuillets du domaine ramifié. Il en résulte que toute variété analytique complexe, connexe et compacte, à une dimension est analytiquement équivalente à la surface de Riemann d'une fonction algébrique d'une variable.

Remarquons finalement que, pour obtenir une solution incomplète pour une première donnée de Cousin, il suffit de permettre à la solution de n'avior

1) K. Oka, Mémoire IX (Japanese Journal of Mathematics, vol. XXIII 1953).