REMARQUES SUR LA NOTION DE LA PERFECTION

YOSIHISA IZUMI

(Received June 24, 1952)

Le but de cette note est de montrer quelques propriétés concernant la perfection forte, la perfection faible et l'Entscheidbarkeit. Les définitions de cettes notions ont été données par Hilbert-Ackermann[1], mais en utilisant certains des notations métalogiques de Tarski[2] nous les exprimerons comme suit.

Désignons par S un ensemble qui contient toutes les propositions variables $a, b, c, \cdots\cdots, x, y, z$, et qui est fermé concernant les opérations $\vee$, $.$, $-$, $\rightarrow$, et par $A, B, C, \cdots\cdots, X, Y, Z$ les sous-ensembles de S, et par $Fl(A)$ un produit de tous les ensembles qui contiennent A et qui sont fermés concernant les règles de substitution et de modus ponens. A partir de ceux-là, on définit la non-contradiction de A (que nous considérons dans tout le cours de cette note comme un système d'axiomes) par la formule

$$\overline{A \rightarrow a . \bar{a}},$$

ou

$$A \not\rightarrow a . \bar{a}, \qquad \text{Df 1}$$

et la perfection forte de A par la formule

$$(x)[x \in S . x \,\bar{\in}\, Fl(A) \rightarrow (\{A, x\} \rightarrow a . \bar{a})][3], \qquad \text{Df 2}$$

et de plus, l'Entscheidbarkeit de A par la formule

$$(x)\,(\exists Y)[x \in S \rightarrow Y \subset Fl(A) . (\{Y, x\} \not\rightarrow a . \bar{a}) \vee (\{Y, \bar{x}\} \rightarrow a . \bar{a})]. \qquad \text{Df 3}$$

La lettre B_i suivie d'un indice étant un produit de tous les ensembles qui contiennent toutes les formules satisfaisant la matrice $\mathfrak{M}$ à i valeurs, on définit la perfection faible de A par la formule

$$(x)[B_i \subset S . x \in B_i . A \subset B_i \rightarrow x \in Fl(A)] \quad 1 \leqslant i \leqslant \aleph_0. \qquad \text{Df 4}$$

THÉORÈME 1. *Si A est contradictoire, A est fortement partfait.*

DÉMONSTRATION. D'après la Df 1, on a

$$A \rightarrow a . \bar{a}.$$

On en déduit

$$\{A, b\} \rightarrow a . \bar{a},$$

d'où l'on obtient

$$b \in S . b \,\bar{\in}\, Fl(A) . \{A, b\} \rightarrow a . \bar{a},$$

d'où l'on conclut

$$(x)[x \in S . x \,\bar{\in}\, Fl(A) \rightarrow (\{A, x\} \rightarrow a . \bar{a})]. \qquad \text{Q.E.D.}$$