ZUR CHARAKTERISIERUNG VON SATURATIONSKLASSEN IN DER THEORIE DER FOURIERREIHEN

P. L. BUTZER und E. GÖRLICH

(Received December 20, 1964)

1. Bezeichnungen und Hauptsatz. In der Theorie der trigonometrischen Approximation periodischer Funktionen erhält man bei der Bestimmung von Saturationsklassen[1] in den Räumen $C_{2\pi}$ und $L_{2\pi}^p$ $(1 \leqq p < \infty)$ als Ergebnis häufig eine der im folgenden unter (1.3) definierten Klassen W_X^ρ. Da die Definition (1.3) die Eigenschaften einer Funktion $f(x) \in W_X^\rho$ nur indirekt mit Hilfe ihrer Fourierreihe beschreibt, stellt sich das Problem, diese Klassen durch äquivalente Eigenschaften der Funktionen $f(x)$ selbst zu charakterisieren. Für ganzzahlige Werte von ρ sind verschiedene äquivalente Charakterisierungen bekannt; sie werden im Abschnitt 3 zusammengestellt und noch einmal ausführlich bewiesen, da die Beweise in den angegebenen Arbeiten oft nur skizziert sind. Für den Fall, dass $\rho > 0$ keine ganze Zahl ist, existieren bisher nur im Intervall $0 < \rho \leqq 1$ und für den Raum $C_{2\pi}$ Charakterisierungen von G. Sunouchi [9], S. 130 und S. Aljančić [1], S. 682. Ziel der vorliegenden Arbeit ist es, eine für die Räume $C_{2\pi}$ und $L_{2\pi}^p$ $(1 \leqq p < \infty)$ und *alle* $\rho > 0$ gültige Charakterisierung aufzustellen. Das Hauptergebnis ist der folgende Satz (1.4). Vor der Formulierung dieses Satzes sind zunächst einige Bezeichnungen zu erklären. Unter $C_{2\pi}$, $L_{2\pi}^p$ $(1 \leqq p < \infty)$, $L_{2\pi}^\infty$, $BV_{2\pi}$ werden die Räume derjenigen 2π-periodischen Funktionen verstanden, die stetig, bzw. zur p-ten Potenz Lebesgue-integrierbar, bzw. wesentlich beschränkt, bzw. von beschränkter Variation sind.

Die Fourierreihe einer Funktion $f(x) \in L_{2\pi}^1$ ist definiert durch

$$S[f] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \hat{f}(k)\, e^{ikx} = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} A_k(x)$$

mit

$$\hat{f}(k) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(u)\, e^{-iku}\, du\,, \quad A_k(x) = a_k \cos kx + b_k \sin kx\,,$$

$$a_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(u) \cos ku\, du\,, \quad b_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(u) \sin ku\, du\,.$$

---

1) Zur Definition dieses Begriffes, der von J. Favard eingeführt wurde, vgl. z. B. G. Sunouchi u. C. Watari [10], II, S. 480.