Tôhoku Math. Journ.
26 (1974), 95-131.

SUR LES ζ-FONCTION D'EPSTEIN POUR DES OPÉRATEURS ELLIPTIQUES DÉGÉNÉRÉS

NORIO SHIMAKURA

(Received March 22, 1973)

Introduction. Soit A un opérateur différentiel du second ordre défini dans un ouvert borné Ω de R^n $(n \geqq 2)$ à frontière régulière S. Supposons que A soit fortement elliptique dans Ω mais dégénéré partout sur S en toutes les directions. Si A est réalisable comme un opérateur auto-adjoint strictement positif dans $L^2(\Omega)$, il est intéressant de rechercher son spectre. Sous une hypothèse convenable sur la dégénéréssance (par exemple l'Hypothèse III dans le § 1), A^{-1} devient compact et donc le spectre de A est une suite des valeurs propres dont chacune est de multiplicité finie:

$$0 < \lambda_1 \leqq \lambda_2 \leqq \cdots \leqq \lambda_j \leqq \cdots \uparrow \infty . \tag{0.1}$$

Posons

$$N(\lambda) = \sum_{\lambda_j \leqq \lambda} 1 , \quad \text{pour} \quad \lambda > 0 . \tag{0.2}$$

Alors, le comportement asymptotique de λ_j lorsque $j \to \infty$ se reflète dans celui de $N(\lambda)$ lorsque $\lambda \to \infty$ et vice versa.

Baouendi et Goulaouic [1] donnèrent un critère pour que

$$N(\lambda) \sim \text{Cte.}\, \lambda^{n/2} , \quad \text{lorsque} \quad \lambda \to \infty , \tag{0.3}$$

c'est-à-dire, pour que $N(\lambda)$ croisse analoguement au cas où A ne soit pas dégénéré. Pour fixer les idées, soit A de la forme

$$(Au)(x) = -\sum_{j,k=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_j}\left(a^{jk}(x)\frac{\partial u}{\partial x_k}\right) + c(x)u(x) . \tag{0.4}$$

Alors, la formule asymptotique (0.3) est vraie si et seulement si

$$\int_\Omega (\text{dét}(a^{jk}(x)))^{-1/2} dx < \infty . \tag{0.5}$$

Dans les notations de ce mémoire, ce critère est équivalente à l'intégrabilité de $\phi(x)^{-n/2}$ sur Ω, et celle-ci est violée.

Le comportement exact de $N(\lambda)$ fut obtenu par Nordin [5]. Il a considéré la forme quadratique $(Au, u)_{L^2(\Omega)}$ pour les $u \in D(A)$, et l'a approximée, dans un voisinage de S, par des autres formes quadratiques plus concrètes.