Vol. 60, No. 1 DUKE MATHEMATICAL JOURNAL © February 1990

RÉDUCTION SEMI-STABLE ET DÉCOMPOSITION DE COMPLEXES DE DE RHAM À COEFFICIENTS

LUC ILLUSIE*

0. Introduction. Soient k un corps parfait de caractéristique $p > 0$ et X un schéma lisse sur k. Il est démontré dans [6] que, si X est de dimension $<p$ et se relève en un schéma lisse sur $W_2(k)$, le complexe de de Rham de X sur k se décompose, dans la catégorie dérivée, en la somme de ses objets de cohomologie. Le théorème de dégénérescence de Hodge et le théorème d'annulation de Kodaira-Akizuki-Nakano en caractéristique nulle en découlent simplement. Des variantes et généralisations du théorème de décomposition précédent sont données dans (loc. cit.) pour des complexes de de Rham $\Omega^{\cdot}_{X/S}(\log D)$, où X est un schéma lisse sur une base S de caractéristique $p > 0$, et $D \subset X$ un diviseur à croisements normaux relatif. Nous étudions dans cet article deux autres types de variantes.

(a) Nous considérons le cas de diviseurs à croisements normaux "verticaux". Supposons par exemple que Y soit une courbe lisse sur k, X un schéma lisse sur k, $E \subset Y$ un diviseur lisse, et $f: X \to Y$ un k-morphisme ayant réduction semi-stable au-dessus de E, i.e plat, lisse hors de E, et, au-dessus de E, localement donné pour la topologie étale sur X par $f^*t = x_1 \ldots x_n$, où t est une équation locale de E et $x_1, \ldots, x_n$ font partie d'un système de coordonnées locales sur X; $D = X \times_Y E$ est alors un diviseur à croisements normaux réduit dans X. On associe classiquement à cette situation le complexe de de Rham de X sur Y à pôles logarithmiques relatif le long de D, $\omega^{\cdot}_{X/Y} := \Omega^{\cdot}_{X/Y}(\log D/E)$ (cf. [3, II 3.3] et 1.3); c'est un complexe à composantes localement libres de type fini, qui prolonge la complexe de de Rham usuel de l'ouvert de lissité de X sur Y (et qui est d'ailleurs caractérisé par cette condition). Nous prouvons que la donnée d'un relèvement semi-stable $\tilde{f}: (\tilde{X}, \tilde{D}) \to (\tilde{Y}, \tilde{E})$ de f sur $W_2(k)$ et d'un relèvement $\tilde{F}_Y: \tilde{Y} \to \tilde{Y}$ du Frobenius de Y tel que $\tilde{F}_Y^{-1}(\tilde{E}) = p\tilde{E}$ fournissent un isomorphisme de $D(X')$

$$\phi(\tilde{f}, \tilde{F}_Y): \bigoplus_{i<p} \omega^i_{X'/Y}[-i] \xrightarrow{\sim} \tau_{<p} F_* \omega^{\cdot}_{X/Y}, \tag{0.1}$$

où X' est déduit de X par changement de base par le Frobenius de Y, $\omega^i_{X'/Y} := \omega^i_{X/Y} \otimes \mathcal{O}_{X'}$, et $F: X \to X'$ est le Frobenius relatif de X/Y; nous traitons d'ailleurs le cas plus général d'un couple (Y, E), avec Y lisse sur k et E un diviseur à croisements normaux relatif, voir (2.2). La démonstration est tout analogue à celle du résultat de décomposition de [6] évoqué ci-dessus. Le point est qu'on dispose encore,

* Unité associée au CNRS URA D 0752.

Received February 5, 1989. Revision received September 25, 1989.