

LE PROBLEME DE DIRICHLET POUR L'OPERATEUR DE SCHRODINGER

JEAN BROSSARD

Introduction. Soit B une boule ouverte de $\mathbb{R}^n$ ($n \geq 3$) et $V(x)$ une fonction définie sur B . Le problème de Dirichlet pour l'opérateur $-\frac{1}{2}\Delta + V$ consiste à trouver une fonction u continue sur $\bar{B}$ égale à une fonction g donnée sur ∂B et vérifiant $-\frac{1}{2}\Delta u + Vu = 0$ au sens des distributions dans B . (Δ désigne l'opérateur laplacien.)

Une intéressante approche utilisant les méthodes probabilistes est déjà fournie par un article de Khas'minsky [9] montrant le lien entre ce problème et la fonctionnelle brownienne $\exp(-\int_0^\tau V(X_s)ds)$. Le côté probabiliste a ensuite été développé par Chung [3] et Chung et Rao [4] avec l'hypothèse que V était une fonction bornée. Enfin, Aizenman et Simon [1], ont montré que l'hypothèse "naturelle" pour la continuité des solutions de $-\frac{1}{2}\Delta u + Vu$ était l'appartenance de V à une classe très générale $\mathcal{K}$ (voir définition ci-dessous) et que sous cette hypothèse, si V est assez petit (plus précisément si $\inf \text{sp}[-\frac{1}{2}\Delta + V] > 0$), la solution du problème de Dirichlet était donné par la formule brownienne:

$$u(x) = E^x \left[e^{-\int_0^\tau V(X_s)ds} g(X_\tau) \right] \quad (*)$$

où X_s désigne la position du mouvement brownien à l'instant s et τ son temps de sortie de la boule B .

Mon but dans cet article est d'apporter des précisions sur le noyau de Poisson ainsi obtenu, en particulier sur sa continuité et son comportement au bord. Plus précisément, on démontrera entre autre le théorème suivant:

THÉORÈME 1. *Soit B une boule de $\mathbb{R}^n$ et V une fonction de la classe $\mathcal{K}$ telle que le spectre de l'opérateur $-\frac{1}{2}\Delta + V^{(1)}$ soit strictement positif. La solution du problème de Dirichlet est alors donnée par la formule de Poisson:*

$$u(x) = \int_{\partial B} g(\theta) K_V(x, \theta) p(x, \theta) d\theta$$

où $p(x, \theta)$ désigne le noyau de Poisson usuel et $K_V(x, \theta)$ une fonction continue sur $\bar{B} \times \partial B$, strictement positive et vérifiant $K_V(\theta, \theta) = 1$.

De plus, dans un $\mathcal{K}$ -voisinage de V , l'application $W \rightarrow K_W$ est continue à valeurs dans $\mathcal{C}(\bar{B} \times \partial B)$.

Received February 22, 1984. **Avertissement.** Cet article expose les démonstrations complètes des résultats annoncés dans [2] en Novembre 1983.

⁽¹⁾ Δ désigne ici le laplacien de Dirichlet, et la somme est définie au sens des formes quadratiques (cf. [1]).