SUR L'HYPOTHÈSE DE RIEMANN.

PAR

MARCEL RIESZ

à STOCKHOLM.

1°. Dans cette Note, je me propose de représenter la fonction $\dfrac{\Gamma\left(1-\frac{s}{2}\right)}{\zeta(s)}$ par une intégrale de la forme

$$\int_0^\infty F(x)\, x^{-\left(\frac{s}{2}+1\right)} dx,$$

$F(x)$ désignant une fonction entière donnée explicitement. Comme on sait, l'hypothèse de Riemann consiste en ce que la fonction $\zeta(s)$ n'a pas de zéros dans le demi-plan $R(s) > \frac{1}{2}$. Notre représentation fournira une condition nécessaire et suffisante pour la validité de cette hypothèse de Riemann. Je ne sais pas encore décider si cette condition facilitera la vérification de l'hypothèse.

2°. Formons les quantités

$$C_k = \sum_{n=1}^\infty n^{-2k} \qquad (k = 1, 2, \ldots)$$

et la fonction entière

$$F(x) = \sum_{k=1}^\infty \frac{(-1)^{k+1}}{C_k \Gamma(k)} x^k.$$

D'après le calcul des résidus, on a

$$F(x) = \frac{i}{2} \int_{a-i\infty}^{a+i\infty} \frac{x^z}{\zeta(2z)\Gamma(z)\sin \pi z} dz, \qquad \left(\frac{1}{2} \leqq a < 1\right)^1 \tag{1}$$

[1] En ce qui concerne l'ordre de grandeur de $\frac{1}{\zeta(z)}$ cf. LANDAU: Handbuch der Lehre der Verteilung der Primzahlen (Teubner, 1909) t. I p. 177—178.