

ÜBER ABEL'S VERALLGEMEINERUNG DER BINOMISCHEN FORMEL

VON

A. HURWITZ

in ZÜRICH.

Bei meinen Untersuchungen über RIEMANN'sche Flächen mit gegebenen Verzweigungspunkten¹ bin ich auf eine Reihe von algebraischen Identitäten geführt worden, welche die von ABEL gegebene Verallgemeinerung der binomischen Formel² als einen speciellen Fall enthalten. In der Zeitschrift für Mathematik und Physik, Bd. 35, S. 56, habe ich vor längerer Zeit einen Theil dieser Identitäten mitgetheilt. Die übrigen, auf welche ich nur kurz in der unten citirten Abhandlung hingewiesen habe, möchte ich in den folgenden Zeilen näher darlegen und begründen.

Es seien r und s zwei (positive oder negative) ganze Zahlen, ferner $u, v, x_1, x_2, \dots, x_n$ unbeschränkt veränderliche Grössen. Ich definire nun eine Function $F_{r,s}$ dieser Grössen durch die Gleichung

$$(I) \quad F_{r,s} = \sum (u + \varepsilon_1 x_1 + \varepsilon_2 x_2 + \dots + \varepsilon_n x_n)^{r + \sum_{i=1}^n \varepsilon_i} (v + \varepsilon'_1 x_1 + \varepsilon'_2 x_2 + \dots + \varepsilon'_n x_n)^{s + \sum_{i=1}^n \varepsilon'_i}.$$

Hier ist ε'_i zur Abkürzung für $1 - \varepsilon_i$ geschrieben und es soll die Summe in der Weise gebildet werden, dass $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n$ unabhängig von einander die beiden Werthe 0 und 1 erhalten. Indem man in jedem einzelnen der 2^n Glieder dieser Summe diejenigen Terme $\varepsilon_i x_i$ bez. $\varepsilon'_i x_i$ unterdrückt, für welche ε_i bez. ε'_i gleich Null ist, erhält die Gleichung (I) offenbar die Gestalt

$$(I') \quad F_{r,s} = \sum (u + x_{\alpha_1} + x_{\alpha_2} + \dots + x_{\alpha_\lambda})^{r+\lambda} (v + x_{\beta_1} + x_{\beta_2} + \dots + x_{\beta_\mu})^{s+\mu},$$

¹ S. Mathematische Annalen, Bd. 39, S. 1 ff.

² ABEL, Oeuvres complètes, nouvelle édition, vol. I, p. 102.