

SUR CERTAINS GROUPES D'OPÉRATEURS UNITAIRES

PAR

ANDRÉ WEIL

Institute for Advanced Study, Princeton, N. J., U. S. A. ⁽¹⁾

A force d'habitude, le fait que les séries thêta définissent des fonctions modulaires a presque cessé de nous étonner. Mais l'apparition du groupe symplectique comme un *deus ex machina* dans les célèbres travaux de Siegel sur les formes quadratiques n'a rien perdu encore de son caractère mystérieux. Le but de ce mémoire, et de ceux qui lui feront suite, n'est pas, bien entendu, d'élucider définitivement la question, mais de jeter un peu de lumière sur certains aspects de cette théorie qui étaient restés dans l'ombre jusqu'à présent.

Une analyse attentive des travaux de Siegel permet en effet de déceler le rôle capital qu'y joue une certaine représentation unitaire, non pas du groupe symplectique lui-même, mais d'une extension centrale de ce groupe, ainsi que des groupes analogues sur les corps p -adiques. Il se trouve que cette représentation, pour le cas du groupe symplectique réel (et même de sa généralisation naturelle à l'espace de Hilbert), a été définie et étudiée récemment par D. Shale [7], après que son existence, ou du moins celle de la représentation projective correspondante, eût été reconnue par I. Segal [5] à propos de mécanique quantique. Celui-ci est revenu sur la question [6], à la suite d'un exposé où j'en avais souligné l'importance en théorie des nombres; j'ai emprunté à son travail, dont je lui suis reconnaissant de m'avoir communiqué le manuscrit, le principe de la démonstration du théorème d'existence (théorème 1 ci-dessous; pour une autre démonstration, cf. G. Mackey [3]), ainsi que l'idée de prendre pour point de départ la théorie générale des groupes abéliens localement compacts.

En conséquence, les théorèmes fondamentaux concernant la représentation unitaire en question seront exposés au Chapitre I pour un groupe abélien localement compact qui n'est soumis à aucune hypothèse restrictive; qu'il me soit permis, en passant, de signaler l'intérêt qu'il y aurait peut-être à examiner de plus près, du point de vue de la

⁽¹⁾ Pendant la période où ce mémoire a été rédigé, j'ai été supporté à la fois par la National Science Foundation (contrat GP-823) et par l'Institut des Hautes Etudes Scientifiques de Bures-sur-Yvette; à l'une et à l'autre je suis heureux d'exprimer ici ma reconnaissance.